

Bac Mathématiques 2022 Cameroun série C-E

Durée : 4 heures

Coefficient : 7 - 6

Cette épreuve est constituée de deux parties indépendantes.

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

- Résoudre dans \mathbf{C} , l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$.
- Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.
 - Donner les éléments caractéristiques de s .
 - Quelles sont les images par s des points A et B ?
- Soit (\mathcal{E}) l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
 - Déterminer une équation de l'image (\mathcal{E}') de (\mathcal{E}) par la similitude s .
 - Construire (\mathcal{E}') puis (\mathcal{E}) dans le même repère.
- Aïcha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse (\mathcal{E}') .

Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de (\mathcal{E}') ?

Exercice 2 (5 points)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E .

Soit f un endomorphisme de E .

- Pour k appartenant à \mathbf{R} , on considère l'ensemble E_k des vecteurs \vec{u} de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.
 - Démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E .
 - On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.

Démontrer que $\vec{u} \in \text{Im} f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$.
- On suppose ici qu'on a :

$$\begin{aligned}f(\vec{i} + \vec{j}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \\f(\vec{i} - \vec{j}) &= 2\vec{i} - 2\vec{j} \\f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) &= \vec{0}.\end{aligned}$$

- Démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.
- Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Démontrer que $f \circ f = 2f$.
- Déterminer par une de ses bases, le noyau $\text{Ker} f$ de f .
- Déterminer l'image $\text{Im} f$ de f . On précisera une de ses bases.

Exercice 3 (5 points)

f est une fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = e^{-x} \cos(x)$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a 2 cm pour unité et en ordonnée 4 cm pour unité.

1. Démontrer que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. **a.** Démontrer qu'on a : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$.
4. Sur $[0; 2\pi]$, tracer dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ puis la courbe (C_f) .
5. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0; 2\pi]$. On pourra utiliser la question 1.

Partie B : Évaluation des compétences (15 points)

Situation :

Trois gisements de gaz A, B et C présentant chacun 100 milliards de m^3 de quantité, ont été découverts dans un pays. L'inauguration a eu lieu une certaine année (année 0) prise comme origine des temps t (en années).

L'exploitation du gaz des gisements A et B avait commencé à la date $t = 0$ et celle du gisement C légèrement avant. Seulement, à la date $t = 1$, la quantité totale du gaz extraite de chacun des gisements A et C était de 5,01 milliards de m^3 .

– Pour le gisement A et à partir de la 2e année, la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.

– Pour les gisements B et C, les ingénieurs pétrochimistes savent que si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite de chacun de ces gisements à la date t , alors le taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement à cette date t est $q'(t)$ (milliards de m^3 par an).

- Au niveau du gisement B, ce taux est $\left(\frac{1}{2t+1} + 0,02t\right)$ milliard de m^3 par an.
- Au niveau du gisement C, ces taux (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates. A la date $t = 1$ ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an.

Tâches :

1. En combien d'années le gisement A s'épuisera-t-il ?
2. Combien d'années d'extraction suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B ?
3. Après l'inauguration, combien d'années faudra-t-il à ce pays pour vider le gisement C de son contenu ?

Bac Cameroun 2022 série C-E

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 POINTS)

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned} z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0 &\iff z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \\ &\iff z^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 \\ &\iff z^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 \\ &\iff z^2 = (1 + i\sqrt{3})^2 \\ &\iff z = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = -(1 + i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$ est $S = \{1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$.

2. Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.

2. a) Nous devons donner les éléments caractéristiques de s .

Si s est une similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

• Puisque s est la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 0$, le centre de s est O .

• Déterminons le rapport de s .

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

D'où le rapport de s est égal à 2.

• Déterminons l'angle θ de s .

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

D'où l'angle de s est égal à $-\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, s est la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. b) Nous devons déterminer les images par s des points A et B.

Soit $A' = s(A)$ et notons $Z_{A'}$ l'affixe de A' .

$$\begin{aligned}
Z_{A'} &= (1 - i\sqrt{3}) Z_A \\
&= (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) \\
&= 1 + 3 \\
&= 4 \\
&= Z_F
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{s(A) = F}$$

Soit $B' = s(B)$ et notons $Z_{B'}$ l'affixe de B' .

$$\begin{aligned}
Z_{B'} &= (1 - i\sqrt{3}) Z_B \\
&= (1 - i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) \\
&= -(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) \\
&= -(1 + 3) \\
&= -4 \\
&= Z_G
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{s(B) = G}$$

3. Soit (\mathcal{E}) l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

3. a) Nous devons déterminer une équation de l'image (\mathcal{E}') de (\mathcal{E}) par la similitude s .

Le milieu du segment $[AB]$ est le point O car $\frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{2} = 0$.

Dès lors, le centre de (\mathcal{E}) est O .

Puisque s est une similitude directe de centre O , le centre de (\mathcal{E}') est également le point O .

D'où une équation de l'ellipse (\mathcal{E}') est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

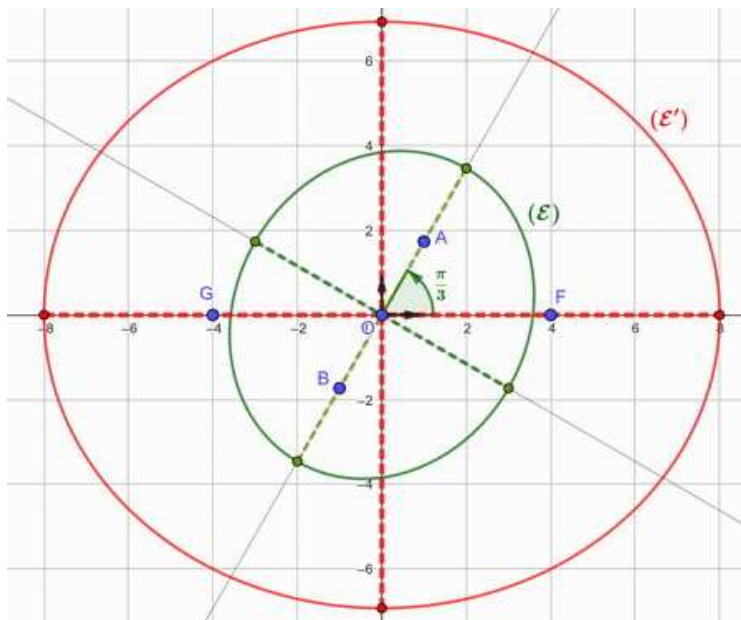
$$\text{Or } \begin{cases} c = OF = 4 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} c = 4 \\ \frac{4}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \boxed{a = 8} \implies \boxed{a^2 = 64}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \implies 16 = 64 - b^2 \implies \boxed{b^2 = 48} \implies \boxed{b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}}$$

Par conséquent, **une équation de (\mathcal{E}') est :** $\boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$.

3. b) Construisons (\mathcal{E}') puis (\mathcal{E}) dans le même repère.

Après avoir construit (\mathcal{E}') , la construction de (\mathcal{E}) s'effectue aisément en sachant que (\mathcal{E}) est l'image de (\mathcal{E}') par la similitude s^{-1} dont le centre est O , le rapport est $\frac{1}{2}$ et l'angle est $\frac{\pi}{3}$.



4. Aicha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse (\mathcal{E}') .

Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de (\mathcal{E}') ?

Parmi les cinq points O, A, B, F et G , l'axe focal de (\mathcal{E}') comprend les trois points O, F et G .

Il y a $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ façons différentes de choisir successivement deux points parmi les trois points de l'axe focal.

Il y a $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ façons différentes de choisir successivement deux points parmi les cinq points O, A, B, F et G .

Les choix de chaque point sont équiprobables.

Donc la probabilité que Aicha ait choisi deux points de l'axe focal de (\mathcal{E}') est égale à $\frac{6}{20}$, soit

à $\boxed{\frac{3}{10}}$.

Exercice 2 (5 points)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E .

Soit f un endomorphisme de E .

1. Pour k appartenant à \mathbb{R} , on considère l'ensemble E_k des vecteurs \vec{u} de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.

1. a) Démontrons que E_k est un sous-espace vectoriel de E .

Pour démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E , nous vérifierons que $\vec{0} \in E_k$ et que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in E_k^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons :
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} \in E_k \\ \lambda\vec{u} \in E_k \end{cases}$$

• Puisque f est un endomorphisme de E , nous savons que $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Or $\vec{0} = k\vec{0}$.

D'où $f(\vec{0}) = k\vec{0}$.

Par conséquent, $\boxed{\vec{0} \in E_k}$.

• Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in E_k^2$,

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ car f est une fonction linéaire

$$\begin{aligned}
&= k\vec{u} + k\vec{v} \quad \text{par définition de } f \\
&= k(\vec{u} + \vec{v}) \\
\implies f(\vec{u} + \vec{v}) &= k(\vec{u} + \vec{v})
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\vec{u} + \vec{v} \in E_k}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u} \in E_k$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(\lambda\vec{u}) &= \lambda f(\vec{u}) \quad \text{car } f \text{ est une fonction linéaire} \\
&= \lambda(k\vec{u}) \quad \text{par définition de } f \\
&= k(\lambda\vec{u})
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{f(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u})}$$

Par conséquent, $\boxed{\lambda\vec{u} \in E_k}$.

Nous en déduisons que E_k est un sous-espace vectoriel de E .

1. b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
Démontrons que $\vec{u} \in \text{Im}f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$.

- Démontrons d'abord que si $\vec{u} \in E_2$, alors $\vec{u} \in \text{Im}f$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in E_2 &\implies f(\vec{u}) = 2\vec{u} \\
&\implies \vec{u} = \frac{1}{2}f(\vec{u}) \\
&\implies \vec{u} = f\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) \quad \text{car } f \text{ est une fonction linéaire} \\
&\implies \vec{u} \in \text{Im}f
\end{aligned}$$

D'où si $\vec{u} \in E_2$, alors $\vec{u} \in \text{Im}f$.

- Démontrons ensuite que si $\vec{u} \in \text{Im}f$, alors $\vec{u} \in E_2$.

$$\vec{u} \in \text{Im}f \implies \exists \vec{v} \in E : \vec{u} = f(\vec{v})$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
f(\vec{u}) &= f(f(\vec{v})) \\
&= (f \circ f)(\vec{v}) \\
&= (2f)(\vec{v}) \\
&= 2f(\vec{v}) \\
&= 2\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\vec{u} \in E_2}$$

D'où si $\vec{u} \in \text{Im}f$, alors $\vec{u} \in E_2$.

Par conséquent, $\vec{u} \in \text{Im}f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$.

2. On suppose ici qu'on a :

$$f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (1)$$

$$f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \quad (2)$$

$$f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0} \quad (3)$$

2. a) Nous devons démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

- Additionnons membre à membre les égalités (1) et (2).

$$\begin{aligned} f(\vec{i} + \vec{j}) + f(\vec{i} - \vec{j}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - 2\vec{j} \\ &= 4\vec{i} \end{aligned}$$

Or $f(\vec{i} + \vec{j}) + f(\vec{i} - \vec{j}) = f(\vec{i}) + f(\vec{j}) + f(\vec{i}) - f(\vec{j})$
 car f est une fonction linéaire
 $= 2f(\vec{i})$

D'où $2f(\vec{i}) = 4\vec{i}$.

Par conséquent, $\boxed{f(\vec{i}) = 2\vec{i}}$

- Soustrayons membre à membre les égalités (1) et (2).

$$\begin{aligned} f(\vec{i} + \vec{j}) - f(\vec{i} - \vec{j}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ &= 4\vec{j} \end{aligned}$$

Or $f(\vec{i} + \vec{j}) - f(\vec{i} - \vec{j}) = f(\vec{i}) + f(\vec{j}) - f(\vec{i}) + f(\vec{j})$
 car f est une fonction linéaire
 $= 2f(\vec{j})$

D'où $2f(\vec{j}) = 4\vec{j}$.

Par conséquent, $\boxed{f(\vec{j}) = 2\vec{j}}$

- En utilisant la relation (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0} &\implies f(\vec{i}) - f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = \vec{0} \\ &\implies 2\vec{i} - 2\vec{j} + f(\vec{k}) = \vec{0} \\ &\implies \boxed{f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}} \end{aligned}$$

- Par conséquent, $\boxed{f(\vec{i}) = 2\vec{i} \quad , \quad f(\vec{j}) = 2\vec{j} \quad , \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}}$.

2. b) Nous devons donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Nous savons par la question 2. a) que :
$$\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ f(\vec{j}) = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \end{cases}$$

Donc la matrice de la transformation linéaire f est
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. c) Démontrer que $f \circ f = 2f$ revient à démontrer que $M \times M = 2M$.

$$\begin{aligned} M \times M &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 0 \times 0 - 2 \times 0 & 2 \times 0 + 0 \times 2 - 2 \times 0 & 2 \times (-2) + 0 \times 2 - 2 \times 0 \\ 0 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 & 0 \times 0 + 2 \times 2 + 2 \times 0 & 0 \times (-2) + 2 \times 2 + 2 \times 0 \\ 0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 0 & 0 \times (-2) + 0 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= 2M$$

$$\implies \boxed{M \times M = 2M}$$

$$\text{D'où } \boxed{f \circ f = 2f}.$$

2. d) Nous devons déterminer par une de ses bases, le noyau $\text{Ker}(f)$ de f .

Soit un vecteur $\vec{u}(x; y; z) \in E$.

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \in \text{Ker}(f) &\implies f(\vec{u}) = \vec{0} \\ &\implies \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 2x = 2z \\ 2y = -2z \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les coordonnées du vecteur \vec{u} sont $(z, -z; z)$.

Autrement dit, $\vec{u} = z\vec{i} - z\vec{j} + z\vec{k}$, soit $\boxed{\vec{u} = z(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}$.

Par conséquent, $\text{Ker}(f)$ est la droite vectorielle dont une base est $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

2. e) Nous devons déterminer l'image $\text{Im}(f)$ de f .

• Par le théorème du rang, nous savons que : $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Or $\dim(E) = 3$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Donc : $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

• $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel E .

Donc $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

$$\text{Mais nous savons que } \begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{j} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} = -f(\vec{i}) + f(\vec{j}) \end{cases}$$

Dès lors, $f(\vec{i}), f(\vec{j})$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Autrement dit, $2\vec{i}, 2\vec{j}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$,

soit \vec{i}, \vec{j} est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

• Par conséquent, $\text{Im}(f)$ est le plan vectoriel dont une base est (\vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 3 (5 points)

f est une fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = e^{-x} \cos(x)$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a 2 cm pour unité et en ordonnée 4 cm pour unité.

1. Démontrons que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

$$\bullet \boxed{f(x) = e^{-x} \cos(x)}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (e^{-x})' \times \cos(x) + e^{-x} \times (\cos(x))' \\ &= -e^{-x} \times \cos(x) + e^{-x} \times (-\sin(x)) \\ &= -e^{-x} \times \cos(x) - e^{-x} \times \sin(x) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{f'(x) = -e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)}$$

$$\bullet \quad f''(x) = -\left(e^{-x} \cos(x)\right)' - \left(e^{-x} \sin(x)\right)'$$

$$\text{Or } \begin{cases} \left(e^{-x} \cos(x)\right)' = -e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x) & (\text{voir ci-dessus}) \\ \left(e^{-x} \sin(x)\right)' = (e^{-x})' \times \sin(x) + e^{-x} \times (\sin(x))' \\ \quad = -e^{-x} \times \sin(x) + e^{-x} \times \cos(x) \\ \quad = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f''(x) &= -\left(-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)\right) - \left(-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)\right) \\ &= e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) \\ &= 2e^{-x} \sin(x) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{f''(x) = 2e^{-x} \sin(x)}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= 2e^{-x} \sin(x) + 2(-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) + 2e^{-x} \cos(x) \\ &= 2e^{-x} \sin(x) - 2e^{-x} \cos(x) - 2e^{-x} \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent, } \boxed{f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0}.$$

2. Nous devons étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x) \\ &= e^{-x} (-\cos(x) - \sin(x)) \end{aligned}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} , le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-\cos(x) - \sin(x))$

Résolvons l'équation $-\cos(x) - \sin(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} -\cos(x) - \sin(x) = 0 &\iff \sin(x) = -\cos(x) \\ &\iff \tan(x) = -1 \\ &\iff x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où, pour tout } x \text{ dans } [0; 2\pi], \quad -\cos(x) - \sin(x) = 0 \iff x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

La fonction $x \mapsto -\cos(x) - \sin(x)$ étant continue sur $[0; 2\pi]$, le signe de $-\cos(x) - \sin(x)$ ne change pas pour x appartenant à $[0; \frac{3\pi}{4}]$.

Il en est de même pour x appartenant aux intervalles $[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$ et $[\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} x = 0 \in [0; \frac{3\pi}{4}] &\implies -\cos(x) - \sin(x) = -\cos(0) - \sin(0) \\ &= -1 - 0 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall x \in [0; \frac{3\pi}{4}], -\cos(x) - \sin(x) < 0}$$

$$x = \pi \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right] \implies -\cos(x) - \sin(x) = -\cos(\pi) - \sin(\pi) \\ = -(-1) - 0 \\ = 1 > 0$$

$$\implies \boxed{\forall x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right], -\cos(x) - \sin(x) > 0}$$

$$x = 2\pi \in \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi \right] \implies -\cos(x) - \sin(x) = -\cos(2\pi) - \sin(2\pi) \\ = -1 - 0 \\ = -1 < 0$$

$$\implies \boxed{\forall x \in \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi \right], -\cos(x) - \sin(x) < 0}$$

Nous pouvons dresser le tableau de signes de f' et de variations de f .

Calculs préliminaires :

$$f(0) = e^0 \cos(0) = 1 \times 1 = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{-\frac{3\pi}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \\ f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = e^{-\frac{7\pi}{4}} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{4}} \\ f(2\pi) = e^{-2\pi} \cos(-2\pi) = e^{-2\pi} \times 1 = e^{-2\pi}$$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π			
$-\cos(x) - \sin(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	1				$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{4}}$		$e^{-2\pi}$

\searrow $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$ \nearrow \searrow

3. a) Démontrons que : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

En effet, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ -1 \leq \cos(x) \leq 1 \end{cases} \implies -e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq e^{-x}$$

Par conséquent, $\boxed{-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}}$.

3. b) Nous devons déterminer les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$.

• Déterminons les coordonnées des éventuels points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation : $f(x) = e^{-x}$.

$$f(x) = e^{-x} \iff e^{-x} \cos(x) = e^{-x} \\ \iff \cos(x) = 1 \text{ en divisant les deux membres par } e^{-x} \neq 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2\pi$$

D'où les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sont : $(0; 1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$.

- Déterminons les coordonnées des éventuels points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec la courbe d'équation $y = -e^{-x}$.

Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation : $f(x) = -e^{-x}$.

$$\begin{aligned} f(x) = -e^{-x} &\iff e^{-x} \cos(x) = -e^{-x} \\ &\iff \cos(x) = -1 \quad \text{en divisant les deux membres par } e^{-x} \neq 0 \\ &\iff x = \pi \end{aligned}$$

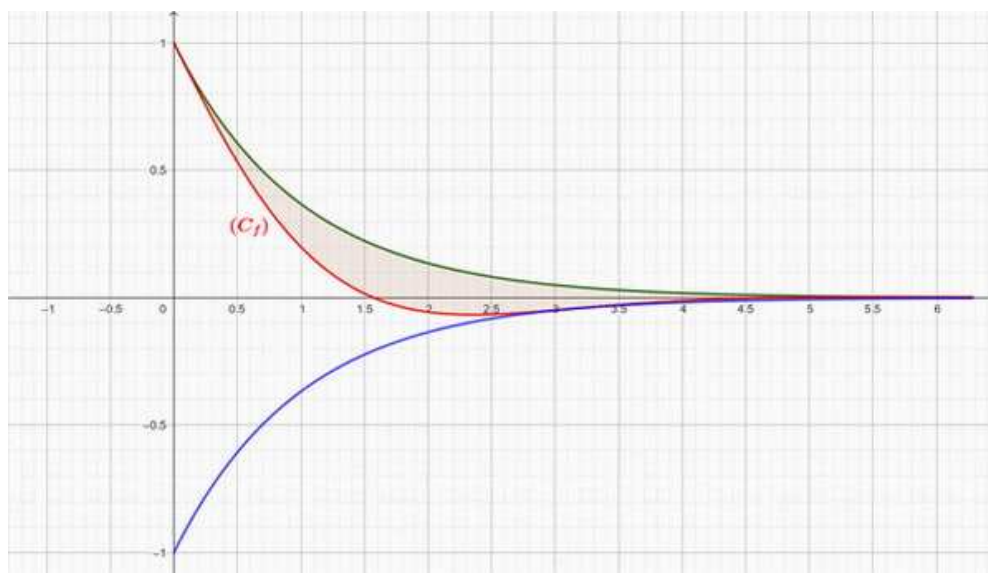
D'où les coordonnées du point d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec la courbe d'équation $y = -e^{-x}$ sont : $(\pi; -e^{-\pi})$.

4. Sur $[0; 2\pi]$, traçons dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ puis la courbe (\mathcal{C}_f) .

La courbe d'équation $y = e^{-x}$ est représentée en vert.

La courbe d'équation $y = -e^{-x}$ est représentée en bleu.

La courbe (\mathcal{C}_f) est représentée en rouge.



5. Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par (\mathcal{C}_f) et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0; 2\pi]$. On pourra utiliser la question 1.

Puisque la courbe d'équation $y = e^{-x}$ est située au-dessus de (\mathcal{C}_f) sur $[0; 2\pi]$, l'aire demandée se calcule

$$\text{par : } \int_0^{2\pi} (e^{-x} - f(x)) dx.$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi} (e^{-x} - f(x)) dx = \int_0^{2\pi} e^{-x} dx - \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

- Calculons $\int_0^{2\pi} e^{-x} dx$.

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{2\pi} = (-e^{-2\pi}) - (-e^0) = -e^{-2\pi} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} e^{-x} dx = 1 - e^{-2\pi}}$$

• Calculons $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

En utilisant la question 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0 &\iff 2f(x) = -f''(x) - 2f'(x) \\ &\iff f(x) = -\frac{1}{2}f''(x) - f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_0^{2\pi} f(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f''(x) dx - \int_0^{2\pi} f'(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[f'(x) \right]_0^{2\pi} - \left[f(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \left[-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x) \right]_0^{2\pi} - \left[e^{-x} \cos(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) - 2e^{-x} \cos(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-x} (\sin(x) - \cos(x)) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-2\pi} (\sin(2\pi) - \cos(2\pi)) - e^0 (\sin(0) - \cos(0)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-2\pi} (0 - 1) - 1 \times (0 - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} (-e^{-2\pi} + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi})}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (e^{-x} - f(x)) dx &= \int_0^{2\pi} e^{-x} dx - \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= (1 - e^{-2\pi}) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi}) \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} (e^{-x} - f(x)) dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi})}$$

Or dans le repère, l'unité de longueur mesure 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

Donc l'unité d'aire est égale à 8 cm².

$$8 \times \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi}) = 4 (1 - e^{-2\pi}).$$

Par conséquent, l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et la courbe d'équation $y = e^{-x}$

sur $[0; 2\pi]$ est égale à $\boxed{4(1 - e^{-2\pi}) \text{ cm}^2}$.

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (15 POINTS)

1. Nous devons déterminer en combien d'années le gisement A s'épuisera.

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que u_n représente, en m^3 , la quantité de gaz extraite du gisement A au temps $t = n$.

Nous savons que $u_1 = 5,01$ et que la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.

Dès lors, avant que le gisement ne soit épuisé, nous obtenons : $u_{n+1} = u_n + 0,75$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $r = 0,75$ dont le premier terme est $u_1 = 5,01$.

La quantité totale S_n de gaz extraite au bout de n années (avant épuisement du gisement) est la somme de ces n termes.

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$\implies S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } u_n &= u_1 + (n - 1) \times r \\ &= 5,01 + (n - 1) \times 0,75 \\ &= 5,01 + 0,75n - 0,75 \\ &= 4,26 + 0,75n \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{u_n = 4,26 + 0,75n}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \frac{5,01 + 4,26 + 0,75n}{2} \\ &= n \times \frac{9,27 + 0,75n}{2} \\ &= n \times (4,635 + 0,375n) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{S_n = 0,375n^2 + 4,635n}$$

Donc la quantité totale S_n de gaz extraite au bout de n années (avant épuisement du gisement) s'exprime par $0,375n^2 + 4,635n$.

Nous devons déterminer en combien d'années le gisement A s'épuisera, ce qui revient à déterminer le plus petit nombre naturel n tel que $0,375n^2 + 4,635n \geq 100$, soit tel que $0,375n^2 + 4,635n - 100 \geq 0$

Résolvons l'inéquation $0,375n^2 + 4,635n - 100 \geq 0$

Discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4,635^2 - 4 \times 0,375 \times (-100) \\ &= 21,483225 + 150 \\ &= 171,483225 > 0 \end{aligned}$$

Racines :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-4,635 - \sqrt{171,483225}}{0,75} \approx -23,64 \\ n_2 &= \frac{-4,635 + \sqrt{171,483225}}{0,75} \approx 11,28 \end{aligned}$$

Tableau de signe du trinôme $0,375n^2 + 4,635n - 100$ dans \mathbb{R} :

n	$\approx -23,64$	0	$\approx 11,28$
$0,375n^2 + 4,635n - 100$	+	0	- - - 0 +

Nous en déduisons que le plus petit nombre naturel n vérifiant l'inéquation $0,375n^2 + 4,635n - 100 \geq 0$ est $n = 12$.

Par conséquent, **le gisement A s'épuisera en 12 ans.**

2. Si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t , alors le taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement à cette date t est $q'(t) = \left(\frac{1}{2t+1} + 0,02t\right)$ (milliards de m^3 par an).

L'ensemble des primitives q de la fonction q' est défini par $q(t) = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,02 \times \frac{t^2}{2} + k$ ($k \in \mathbb{R}$), soit par $q(t) = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2 + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Or nous savons que $q(0) = 0$.

$$q(0) = 0 \implies \frac{1}{2} \ln(1) + 0 + k = 0 \implies \boxed{k = 0}$$

Donc la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t est donnée par $q(t) = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2$.

Nous devons calculer le nombre d'années d'extraction qui suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B.

Pour ce faire, déterminons un encadrement de la valeur t vérifiant l'équation $q(t) = 100$.

- La fonction q est continue sur $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions continues sur $]0; +\infty[$)

- La fonction q est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

En effet,

$$\begin{aligned} \forall t \in]0; +\infty[, \quad \begin{cases} 2t+1 > 0 \\ 0,02t > 0 \end{cases} &\implies \frac{1}{2t+1} + 0,02t > 0 \\ &\implies \boxed{g'(t) > 0} \\ &\implies \boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} f(98) \approx 98,6816 < 100 \\ f(99) \approx 100,6567 > 100 \end{cases} \implies f(98) < 100 < f(99)$

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $q(t) = 100$ admet une seule solution dans l'intervalle $[98; 99]$.

Par conséquent, **le gisement B sera épuisé à la 99^{ième} année.**

3. Au niveau du gisement C, les taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates.

A la date $t = 1$, ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an et la quantité totale du gaz extraite du gisement était également de 5,01 milliards de m^3 .

$$\text{Donc à tout temps } t, \quad \frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{q'(1)}{q(1)} = \frac{5,01}{5,01} = 1 \implies \frac{q'(t)}{q(t)} = 1 \implies \boxed{q'(t) = q(t)}.$$

Les solutions de l'équation $q'(t) = q(t)$ sont les fonctions de la forme $q(t) = C e^t$ où C est une constante.

$$\begin{aligned}
\text{Or } \begin{cases} q(t) = C e^t \\ q(1) = 5,01 \end{cases} &\implies C \times e^1 = 5,01 \\
&\implies C \times e = 5,01 \\
&\implies C = \frac{5,01}{e} \\
&\implies C = 5,01 e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } q(t) = 5,01 e^{-1} e^t \implies \boxed{q(t) = 5,01 e^{t-1}}$$

Le gisement sera vidé au temps t tel que $q(t) = 100$.

$$\begin{aligned}
q(t) = 100 &\iff 5,01 e^{t-1} = 100 \\
&\iff e^{t-1} = \frac{100}{5,01} \\
&\iff t - 1 = \ln\left(\frac{100}{5,01}\right) \\
&\iff \boxed{t = 1 + \ln\left(\frac{100}{5,01}\right) \approx 3,99}
\end{aligned}$$

Par conséquent, **après l'inauguration, il faudra 4 ans à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.**