Bézout et irrationalité de $\sqrt{2}$

On va prouver, en utilisant l'égalité de Bézout, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors il existe deux nombres naturels a et b premiers entre eux vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Vu l'égalité de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1 \tag{2}$$

L'égalité (1) équivaut à $b\sqrt{2} - a = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
(b\sqrt{2} - a)(u\sqrt{2} - v) &= 0 \\
2bu - bv\sqrt{2} - au\sqrt{2} + av &= 0 \\
(au + bv)\sqrt{2} &= 2bu + av \\
\sqrt{2} &= 2bu + av
\end{aligned}$$

Or $2bu + av$ est un entier. La dernière égalité est donc absurde. La démonstration est achevée. $\square$

Remarque

En remplaçant dans la preuve le nombre 2 par un nombre naturel n quelconque, on obtient le résultat suivant :

$\sqrt{n}$ est un nombre rationnel si et seulement si n est un carré parfait.