

Collège du Sud

BULLE

Examen écrit de maturité / baccalauréat

Session de juin 2004

Mathématiques niveau standard

Durée : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Pour chaque problème, veuillez utiliser une nouvelle double feuille.

Problème 1 : Analyse (12 points)

A. Soit la fonction $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

Établir le tableau de variation de g (sans faire usage de la dérivée seconde de g) en y incluant les limites à $\pm\infty$ et en déduire que g ne possède qu'un seul zéro r . Esquisser le graphique de g .

Calculer, par la méthode de la bisection, une approximation de r à 10^{-1} près.

B. Faire l'étude complète de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}.$$

(Domaine de définition, zéro(s), limites, équations des asymptotes, tableau de variation sans faire usage de f'' et représentation graphique (unités : 2 carrés pour une unité).)

Indications :

Pour les zéros de $f'(x)$, on observera que

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

où $g(x)$ est la fonction étudiée dans la partie A.

Si vous n'avez pas réussi à calculer le zéro de $g(x)$, donnez-en une estimation graphique.

Problème 2 : Analyse (8 points)

Une population de bactéries est introduite dans un milieu de culture. Elle va augmenter au cours du temps t . Notons-la $P(t)$; le temps t ($t \geq 0$) est mesuré en heures et $P(t)$ est mesurée en millions de bactéries.

La fonction

$$v(t) = 14000 \cdot \frac{e^{1,4t}}{(99 + e^{1,4t})^2}$$

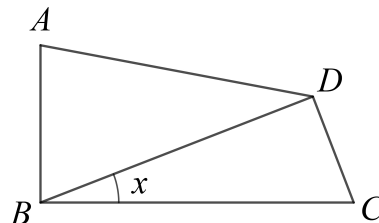
exprime la vitesse d'accroissement instantanée de cette population mesurée en millions de bactéries par heure.

- Que vaut cette vitesse à l'instant $t = 4$?
- À quel instant cette vitesse est-elle maximale et que vaut-elle ? Justifier.
- Combien de bactéries ce milieu comptera-t-il après 3 heures sachant que $P(0) = 1$?

Problème 3 : Trigonométrie (12 points)

On considère un quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. Les côtés AB et BC sont perpendiculaires. De plus, la diagonale BD est perpendiculaire au côté CD .

Soit x l'angle \widehat{CBD} , $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.



- Calculer les aires des triangles BCD et ABD en fonction de x .
- Pour quelle valeur de x ces aires sont-elles égales ?
- Établir que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est donnée par l'expression

$$A(x) = \sin(2x) + \cos^2(x).$$

Déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximale. Justifier.

Indication : $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$

Problème 4 : Probabilités (7 points)

- A. Un revendeur de pneumatiques importe 5% de son stock. Les 95% restants proviennent de la région.

Quelle est la probabilité que, sur 15 pneus choisis au hasard,

- a) exactement 2 pneus soient importés ?
- b) plus de 12 pneus proviennent de la région ?
- c) au moins 1 pneu provienne de la région ?

(Les valeurs numériques doivent apparaître dans les réponses.)

- B. Constatant un défaut systématique dans une série de pneumatiques, une écurie de formule 1 décide de faire une analyse du problème.

Un test permet de diagnostiquer le problème de la façon suivante :

- la probabilité qu'un pneu ayant le défaut ait un test positif est de 95% ;
- la probabilité qu'un pneu n'ayant pas le défaut ait un test négatif est de 98% ;
- la probabilité qu'un pneu ait le défaut est de 8%.

Quelle est la probabilité qu'un pneu ayant subi un test positif ait réellement le défaut ?