Le problème des cailloux

On a $2n+1$ cailloux. Lorsque l'on isole n'importe lequel d'entre eux, on peut séparer l'ensemble des $2n$ cailloux restants en deux groupes de n cailloux dont la somme des masses est égale. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

Solution

Numérotons les cailloux de 1 à $2n+1$ et nommons $m_i > 0$ la masse du i-ème caillou, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$.
Soit $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$ correspondant au i-ème caillou que l'on isole. Par hypothèse, nous pouvons répartir les $2n$ cailloux restants en deux groupes de n cailloux sur chacun des deux plateaux d'une balance à l'équilibre.
Posons $a_{ii} = 0$ et, pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2n+1$ avec $i \neq j$, $a_{ij} = 1$ si le j-ème caillou est sur le plateau de gauche de la balance et $a_{ij} = -1$ s'il se trouve sur le plateau de droite. L'hypothèse nous dit que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j = 0.$$

Comme il y a le même nombre de cailloux sur chaque plateau, nous avons aussi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0.$$

Nous avons ainsi défini une matrice

$$A = (a_{ij}) \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$$

qui vérifie

$$A \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{2n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de montrer que le rang de A vaut $2n$. En effet, dans ce cas, le noyau de A est de dimension 1 et il existe alors $m \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{2n+1} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $m_i = m$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$.

Montrons donc que le rang de A vaut $2n$. Pour cela, il suffit de montrer que les $2n$ premières colonnes de $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendantes. Supposons que ce ne soit pas le cas.
Alors la sous-matrice carrée $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ consistant en les $2n$ premières lignes et $2n$ premières colonnes de A n'est pas inversible et son déterminant est nul. Comme ses coefficients sont dans $\mathbb{Z}$, nous pouvons réduire la matrice B modulo 2, pour obtenir $C_{2n} \in M_{2n}(\mathbb{F}_2)$ qui s'écrit

$$C_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifie aussi $\det(C_{2n}) = 0$.

Mais si U_{2n} est la matrice de $M_{2n}(\mathbb{F}_2)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, nous avons $C_{2n} + I_{2n} = U_{2n}$ et par suite $(C_{2n} + I_{2n})^2 = U_{2n}^2 = 0$.

Or

$$(C_{2n} + I_{2n})^2 = C_{2n}^2 + 2C_{2n} + I_{2n}^2 = C_{2n}^2 + I_{2n}.$$

Nous avons donc $C_{2n}^2 + I_{2n} = 0$ ou encore $C_{2n}^2 = I_{2n}$, ce qui prouve que C_{2n} est inversible. Nous avons ainsi $\det(C_{2n}) = 1$ ce qui est contradictoire. $\square$