

## Hauteur d'une calotte sphérique

Le volume  $V$  d'une calotte sphérique de hauteur  $h$ , inscrite dans une sphère de rayon  $r$ , se calcule grâce à une formule bien connue. On va la retrouver et la démontrer dans la preuve du théorème suivant dont le contenu est moins connu, je pense : on va exprimer la hauteur d'une calotte sphérique en fonction de son volume. On sera amené à une équation du troisième degré que l'on va résoudre en utilisant la méthode de Cardan.

### Théorème

Soit  $r$  un nombre réel strictement positif. Si une calotte sphérique, inscrite dans une sphère de rayon  $r$ , a un volume  $V$  (éventuellement nul), alors la hauteur  $h$  de cette calotte est donnée par la formule :

$$h = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{3V}{2\pi r^3} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

### Preuve

Soit  $h$  un nombre réel vérifiant  $0 \leq h \leq 2r$ .

Grâce au calcul intégral on a

$$\begin{aligned} V &= \int_{r-h}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{r-h}^r \\ &= \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) \end{aligned}$$

Donc

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) \tag{1}$$

On remarque que si  $h = 0$ , alors l'égalité (1) donne  $V = 0$ , et si  $h = 2r$  l'égalité (1) donne  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ , soit le volume d'une sphère de rayon  $r$ . Maintenant, afin d'obtenir l'égalité du théorème, résolvons l'équation (1) par rapport à  $h$ .

L'égalité (1) peut s'écrire

$$h^3 - 3rh^2 + \frac{3V}{\pi} = 0 \quad (2)$$

Afin de faire disparaître le terme en  $h^2$  dans l'équation (2), posons  $h = x + r$ . L'équation (2) devient  $(x + r)^2 - 3r(x + r)^2 + \frac{3V}{\pi} = 0$  ou encore

$$x^3 - 3r^2x + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0 \quad (3)$$

Posons encore  $x = a + b$ . L'équation (3) devient :

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 3r^2(a + b) + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0$$

Et par suite

$$a^3 + b^3 + 3(ab - r^2)(a + b) + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0$$

En imposant  $ab = r^2$ , on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} ab = r^2 \\ a^3 + b^3 = 2r^3 - \frac{3V}{\pi} \end{cases}$$

En élevant au cube la première équation du système précédent, on obtient :

$$\begin{cases} a^3b^3 = r^6 \\ a^3 + b^3 = 2r^3 - \frac{3V}{\pi} \end{cases}$$

Les quantités  $a^3$  et  $b^3$  sont solutions de l'équation

$$t^2 - \left(2r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)t + r^6 = 0 \quad (4)$$

Le discriminant  $\Delta$  de l'équation (4) est égal à

$$\left(2r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)^2 - 4r^6 = \frac{3V}{\pi} \left(\frac{3V}{\pi} - 4r^3\right)$$

Comme le volume d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , on a  $V \in \left[0; \frac{4\pi r^3}{3}\right]$ .  
Procédons par disjonction de cas :

I.  $V = 0$

L'équation (2) s'écrit  $h^2(h - 3r) = 0$ . Alors  $h = 0$  puisque  $0 \leq h \leq 2r$ .

II.  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

L'équation (2) s'écrit  $h^3 - 3rh^2 + 4r^3 = 0$  ou encore  $(h - 2r)^2(h + r) = 0$ .  
Alors  $h = 2r$  puisque  $0 \leq h \leq 2r$ .

III.  $\boxed{0 < V < \frac{4\pi r^3}{3}}$

On a  $\Delta < 0$ .

L'équation (4) possède alors 2 racines complexes conjuguées (distinctes) :

$$t_1 = \frac{2r^3 - \frac{3V}{\pi} + i\sqrt{\frac{3V}{\pi} \left(4r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)}}{2}$$

$$t_2 = \frac{2r^3 - \frac{3V}{\pi} - i\sqrt{\frac{3V}{\pi} \left(4r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)}}{2}$$

On a  $|t_1| = |t_2|$  et l'équation (4) donne, grâce une relation de Viète<sup>1</sup>, l'égalité  $t_1 t_2 = r^6$ . Il s'ensuit que  $|t_1| = |t_2| = r^3$ .

Soit  $\alpha$  l'argument de  $t_1$ , avec  $0 < \alpha < 2\pi$ .

Puisque  $\cos(\alpha) = 1 - \frac{3V}{2\pi r^3}$  et parce que  $\sin(\alpha) > 0$ , on a

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{3V}{2\pi r^3}\right) \quad (5)$$

Sous forme trigonométrique :

$$t_1 = r^3 (\cos(\alpha + 2k\pi) + i \sin(\alpha + 2k\pi))$$

$$t_2 = r^3 (\cos(\alpha + 2k\pi) - i \sin(\alpha + 2k\pi))$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Puisque  $t_1 = a^3$  et  $t_2 = b^3$  (ou le contraire, ce qui reviendrait au même) et parce que  $ab \in \mathbb{R}$ , l'équation (3) possède les 3 solutions réelles suivantes :

$$x_{k+1} = 2r \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \text{ pour } k = 0, 1, 2$$

Par suite, puisque  $h = x + r$ , l'équation (2) possède les 3 solutions réelles suivantes :

$$h_{k+1} = r + 2r \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \text{ pour } k = 0, 1, 2$$

---

1. Pour toute équation du deuxième degré (réelle ou complexe)  $ax^2 + bx + c = 0$ , le produit des racines (éventuellement complexes) vaut  $\frac{c}{a}$ .

Grâce à l'égalité (5) on peut écrire :

$$h_{k+1} = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{3V}{2\pi r^3} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \text{ pour } k = 0, 1, 2$$

Lorsque le volume de la calotte vaut la moitié du volume de la sphère, soit  $\frac{2\pi r^3}{3}$ , la hauteur  $h$  de cette calotte vaut  $r$ .

Or, pour  $V = \frac{2\pi r^3}{3}$ , on a

$$h_1 = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos(1-1) \right) \right) = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) = r (1 + \sqrt{3}) \neq r,$$

$$h_2 = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) \right) = r (1 - \sqrt{3}) \neq r,$$

$$h_3 = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = r \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right) = r.$$

Donc  $h_3$  est la hauteur recherchée.

Enfin, on vérifie sans peine que  $\lim_{V \rightarrow 0^+} h_3 = 0$  et que  $\lim_{V \rightarrow \frac{4\pi r^3}{3}^-} h_3 = 2r$ .

Le théorème est démontré. □