Devinette

Barnabé demande à Anatole de choisir un polynôme non nul, à coefficients naturels, et de le garder secret. Barnabé pose alors la question suivante à Anatole : « Que vaut ton polynôme évalué en 1 ? ». Anatole lui répond : « Il vaut 12 ». Puis Barnabé pose une deuxième et dernière question à Anatole : « Que vaut ton polynôme évalué en 13 ? ». Après quelques instants, Anatole répond : « Il vaut 5292 ». Barnabé prend alors son smartphone et très vite il trouve le polynôme ! Quel est ce polynôme ?

Remarque

Barnabé ne connaissait même pas le degré du polynôme choisi par Anatole ! Cette devinette peut donc paraître très surprenante, d'autant plus qu'en général, pour un polynôme de degré n à coefficients réels, il faut la donnée de $2n+2$ nombres ($n+1$ points) pour déterminer le polynôme.

Résolvons maintenant la devinette en la généralisant à l'aide du théorème suivant :

Théorème

Soit $p(x)$ un polynôme non nul appartenant à $\mathbb{N}[X]$.
Supposons que l'on connaisse seulement :

(a) $p(1)$

(b) $p(p(1)+1)$

Alors on connaît $p(x)$!

Preuve

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Pour tout nombre naturel b, on a $p(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.
Si b est un entier supérieur à a_i pour tout $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$, on a
$\overline{p(b)}^{b} = a_n a_{n-1} \ldots a_0$, l'écriture du nombre $p(b)$ dans la base b.
Comme $p(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \geqslant a_i$ pour tout $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$, on peut conclure en choisissant $b = p(1)+1$. $\square$

Appliquons maintenant la preuve du théorème pour trouver le polynôme choisi par Anatole.

Si $p(x)$ est ce polynôme, on a $p(1) = 12$. Il suffit donc de déterminer $\overline{5292}^{13}$:

Comme $5292 = 407 \cdot 13 + 1$ on a $a_0 = 1$.
Puis $407 = 31 \cdot 13 + 4$. Donc $a_1 = 4$.
Enfin $31 = 2 \cdot 13 + 5$. D'où $a_2 = 5$ et $a_3 = 2$.

Le polynôme choisi par Anatole est donc $2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$.

Remarque

Barnabé a probablement utilisé son smartphone pour calculer $\overline{5292}^{13}$ à l'aide d'un convertisseur de bases...