Sur le bac d'algèbre d'Albert Einstein

Problème

Un cercle de centre P est inscrit dans un triangle ABC. On connaît les longueurs PA, PB et PC. Calculer le rayon r de ce cercle.

Solution

D'abord un petit peu d'histoire :
En 1896, dans son épreuve de baccalauréat suisse d'algèbre, Albert Einstein a dû résoudre ce problème lorsque $PA = 1$, $PB = \frac{1}{2}$ et $PC = \frac{1}{3}$.
En utilisant la relation

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1,$$

Einstein a été amené à résoudre l'équation $12\rho^3 + 14\rho^2 - 1 = 0$, ρ étant le rayon recherché. Pour ce faire, il a posé $\rho = \frac{1}{x}$ et a ainsi obtenu l'équation $x^3 - 14x - 12 = 0$. Il l'a résolue en utilisant les formules de Cardan. Les calculs ont été effectués à l'aide d'une table de logarithmes et sans calculatrice bien sûr ! Einstein a obtenu $\rho \simeq 0,243$ et la note maximale, soit 6 ! Ce problème était l'unique question de l'épreuve d'algèbre qui s'est déroulée le lundi 21 septembre 1896 de 9h30 à 11h30.

Le problème énoncé ci-dessus est donc une généralisation du problème d'Albert Einstein. Voici la solution que je propose (sans utiliser l'identité trigonométrique ci-dessus ; je ne la connaissais pas au moment où j'ai écrit les calculs qui suivent !)

Soit donc un triangle ABC et P le centre de son cercle inscrit. Soit encore r le rayon de ce cercle.

Afin d'alléger les calculs qui vont suivre, notons respectivement x, y et z les nombres $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ et $\frac{1}{PC}$.

On observe facilement que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{PA} = xr$.
De même $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = yr$ et $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = zr$.
Comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ on a $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$ et par suite $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$.

Or

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{1}$$

Puisque $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et parce que les angles $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ sont aigus, l'égalité (1) peut s'écrire

$$zr=\sqrt{1-x^2r^2}\sqrt{1-y^2r^2}-xyr^2$$

ou encore

$$zr+xyr^2=\sqrt{1-x^2r^2}\sqrt{1-y^2r^2} \tag{2}$$

Comme les deux membres de l'équation (2) sont positifs, la dernière égalité est équivalente à

$$\left(zr+xyr^2\right)^2=(1-x^2r^2)(1-y^2r^2) \tag{3}$$

En effectuant et en réduisant on obtient

$$2xyzr^3+(x^2+y^2+z^2)r^2-1=0 \tag{4}$$

En posant $w=\frac{1}{r}$, l'équation (4) devient

$$w^3-(x^2+y^2+z^2)w-2xyz=0 \tag{5}$$

Posons encore $w=u+v$.
On a

$$u^3+v^3+3uv(u+v)-(x^2+y^2+z^2)(u+v)-2xyz=0$$

et par suite

$$u^3+v^3+\Big(3uv-(x^2+y^2+z^2)\Big)(u+v)-2xyz=0 \tag{6}$$

En imposant $3uv=x^2+y^2+z^2$, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases}3uv=x^2+y^2+z^2\\ u^3+v^3=2xyz\end{cases}$$

Puis, en divisant les deux membres de la première équation par trois et en élevant au cube les deux membres obtenus, on a le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases}u^3v^3=\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}\\ u^3+v^3=2xyz\end{cases}$$

Les quantités u^3 et v^3 sont donc des solutions de l'équation

$$t^2 - 2xyzt + \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27} = 0 \tag{7}$$

Le discriminant simplifié de l'équation (7) est $\Delta' = x^2y^2z^2 - \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}$.

On a $\Delta' \leqslant 0$ pour tous $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, avec égalité si et seulement si $x = y = z$. En effet, l'inégalité arithmético-géométrique [1] appliquée aux trois nombres x^2, y^2 et z^2 donne

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \qquad \text{avec égalité si et seulement si } x = y = z.$$

En élevant la dernière inéquation au cube, on obtient

$$x^2y^2z^2 \leqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}$$

D'où l'affirmation.

- Supposons d'abord $x = y = z$.
  Dans ce cas l'équation (5) s'écrit

  $$w^3 - 3x^2w - 2x^3 = 0$$

  ou encore

  $$(w+x)^2(w-2x) = 0$$

  Cette dernière équation possède une unique solution positive $w = 2x$. Comme $r = \frac{1}{w}$ on a alors $r = \frac{1}{2x} = \frac{PA}{2}$. (Dans ce cas le triangle ABC est équilatéral.)

- Supposons maintenant x, y et z non tous trois égaux.
  Dans ce cas l'équation (7) admet deux solutions complexes conjuguées :

  $$t_1 = xyz + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta'} \quad \text{et} \quad t_2 = xyz - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}$$

  On a $|t_1| = |t_2| = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}$.

  Soit φ l'argument de t_1 compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Voir la page 5.

Puisque $\cos(\varphi) = \frac{xyz}{|t_1|} = \frac{xyz}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}}$ et parce que $\sin(\varphi) > 0$, on a

$$\varphi = \arccos\left(\frac{xyz}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}}\right)$$

Sous forme trigonométrique :

$$t_1 = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}\left(\cos(\varphi+2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+2k\pi)\right)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}\left(\cos(\varphi+2k\pi) - \mathrm{i}\sin(\varphi+2k\pi)\right)$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Puisque $t_1 = u^3$ et $t_2 = v^3$ (ou le contraire, ce qui reviendrait au même) et parce que $uv \in \mathbb{R}$, l'équation (5) possède les 3 solutions réelles suivantes :

$$w_{k+1} = 2\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{xyz}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

où $k = 0, 1, 2$.

Comme l'angle φ est aigu, il est immédiat que w_1 est positif. Les deux autres solutions w_1 et w_2 sont négatives. En effet, vu les relations de Viète, on a $w_1w_2w_3 = 2xyz > 0$, ce qui prouve que w_2 et w_3 sont toutes deux soit positives, soit négatives. Comme $w_1 + w_2 + w_3 = 0$, w_2 et w_3 sont forcément toutes deux négatives. L'affirmation est démontrée.

Conclusion

Le rayon r du cercle inscrit peut être calculé grâce à l'égalité suivante :

$$\frac{1}{r} = 2\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{xyz}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27}}}\right)\right) \tag{8}$$

où $x = \frac{1}{PA}$, $y = \frac{1}{PB}$ et $z = \frac{1}{PC}$.

(L'égalité (8) est aussi valable lorsque $x = y = z$.)

L’inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres

Lemme

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

Preuve

Il suffit d’effectuer et de réduire le membre de droite de l’égalité. $\square$

Théorème

Soit A, B, C trois nombres réels positifs.
On a

$$\sqrt[3]{ABC} \leqslant \frac{A+B+C}{3},$$

avec égalité si et seulement si $A = B = C$.

Preuve

Soit a, b, c les nombres réels tels que $A = a^3$, $B = b^3$ et $C = c^3$.
Alors l’inégalité du théorème s’écrit

$$abc \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

ou encore

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 0$$

Vu le lemme, cette dernière inégalité est toujours vraie. De plus, on a l’égalité si et seulement si

$$a + b + c = 0$$

ou

$$(a-b)^2 = 0 \text{ et } (b-c)^2 = 0 \text{ et } (c-a)^2 = 0,$$

c’est-à-dire si et seulement si $a = b = c = 0$.

Le théorème est démontré. $\square$