Équations fonctionnelles

Voici quelques équations fonctionnelles. Certaines sont très classiques, d'autres plus exotiques.

Problème 1

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Problème 2

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) - f(y)$.

Problème 3

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Problème 4

Trouver les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant, pour tout $(x;y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

Problème 5

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$.

Problème 6

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Problème 7

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X+1) = (X+4)P(X)$.

Problème 8

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

Problème 9

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f \circ f = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Problème 10

Déterminer les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

Problème 11

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f = -\mathrm{Id}$?

Problème 12

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \notin \{0; 1\}$. Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = ax + b$.

Problème 13

Déterminer les polynômes non nuls $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Problème 14

Trouver les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(f(n)) = n + 2025$.

Problème 15

Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,
$f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$.

Problème 16

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,
$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$.

Problème 17

Trouver les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Problème 18

Trouver les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Problème 19

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant, pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Problème 20

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \cos(P(x))$.

Problème 21

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+r) - f(x) \in \mathbb{Q}$.

Problème 22

Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait $f(x)f(y) = f(x + yf(x))$.

Problème 23

Trouver les fonctions $f \in C^2([0\,;1], \mathbb{R})$ telles que $f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)$.

Problème 24

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'on ait $f(f(x)) = x^2 - 2$.

Problème 25

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$.

Problème 26

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Problème 27

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,
$(x+y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$.

Problème 28

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,
$f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

Problème 29

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
$f(a)f(b) + 2 = f(ab) + 2f(a) + 2b$.

Problème 30

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(2x) = f(x)\cos(x)$.