

# NOMBRES COMPLEXES



C. F. Gauss (1777-1855)



A. L. Cauchy (1789-1857)

Support de cours  
Gymnase de Morges  
Mathématiques renforcées

Vincent Genilloud  
Année 2008-2009

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition et forme algébrique d'un nombre complexe . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Définition des nombres complexes . . . . .	2
1.3	Forme algébrique d'un nombre complexe . . . . .	3
1.4	Conjugué et module d'un nombre complexe . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . . .</b>	<b>6</b>
2.1	Plan complexe . . . . .	6
2.2	Forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . . .	7
2.3	Formule de Moivre . . . . .	8
2.4	Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Réponses . . . . .</b>	<b>14</b>

# 1 Définition et forme algébrique d'un nombre complexe

## 1.1 Introduction

Les nombres complexes apparurent au 16<sup>e</sup> siècle à l'occasion de la résolution des équations du troisième degré, mais il faut attendre Gauss et Cauchy au milieu du 19<sup>e</sup> siècle pour que cette théorie prenne sa forme actuelle.

Nous allons définir un ensemble de nombres, noté  $\mathbb{C}$ , muni d'une addition et d'une multiplication possédant les propriétés suivantes :

- ❶ L'ensemble  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des nombres réels.
- ❷ L'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}$  prolongent l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .
- ❸ Il existe un élément  $i$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $i^2 = -1$ .

Il découle de la propriété 3 que l'équation  $x^2 + 1 = 0$ , qui n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ , possède au moins une solution dans  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 Définition des nombres complexes

Considérons l'ensemble de tous les couples de nombres réels, noté  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ou encore  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathbb{R}^2 = \{(a; b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}.$$

Munissons cet ensemble d'une addition notée  $+$  et d'une multiplication notée  $\cdot$  définies comme suit :

$$\begin{aligned}(a; b) + (c; d) &= (a + c; b + d) \\ (a; b) \cdot (c; d) &= (ac - bd; ad + bc)\end{aligned}$$

### Remarque

Dans le membre de droite des deux précédentes égalités,  $+$  et  $-$  sont respectivement l'addition et la soustraction dans  $\mathbb{R}$ . Et par exemple,  $ac$  désigne le produit des deux nombres réels  $a$  et  $c$ .

Même si la multiplication paraît compliquée, nous allons voir dès la fin de ce paragraphe sa pertinence !

### Définitions

L'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de ces deux opérations s'appelle **l'ensemble des nombres complexes** et se note  $\mathbb{C}$ . Tout élément de  $\mathbb{C}$  est appelé **nombre complexe** (ou **nombre imaginaire**).

D'abord, on peut facilement montrer que ces deux opérations ont les propriétés suivantes (propriétés de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$ ) :

1. L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.
2. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

La plupart des propriétés suivantes font l'objet de l'exercice 1.

Le couple  $(0; 0)$  est l'élément neutre pour l'addition dans  $\mathbb{C}$ . (On a aussi  $x + 0 = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .)

Aussi, tout élément  $(a; b)$  admet pour opposé le couple  $(-a; -b)$  :  $(a; b) + (-a; -b) = (0; 0)$ . (On a aussi  $x + (-x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .)

On rappelle aussi que dans  $\mathbb{R}$  la soustraction est définie ainsi :  $x - y \stackrel{\text{déf}}{=} x + (-y)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ . Il en va de même dans  $\mathbb{C}$  :

$$(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d).$$

Et le couple  $(1; 0)$  est l'élément neutre pour la multiplication dans  $\mathbb{C}$ . (On a aussi  $x \cdot 1 = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .)

Dans  $\mathbb{R}$ , tout nombre  $x$  non nul est inversible : pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , il existe un unique nombre réel  $y$ , noté  $x^{-1}$  et appelé l'inverse de  $x$ , tel que  $xy = 1$ .

Dans  $\mathbb{C}$ , on a aussi la propriété suivante : si  $(a; b) \neq (0; 0)$ , alors

$$(a; b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}; \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1; 0).$$

### 1.3 Forme algébrique d'un nombre complexe

L'écriture d'un nombre complexe à l'aide d'un couple de nombres réels est peu usuelle et peu commode, surtout lorsqu'il s'agit de multiplier deux nombres complexes. Comment se souvenir de cette opération ? La notation que l'on va donner maintenant répond à cette question.

Soit  $z = (a; b)$  un nombre complexe.

Écrivons  $a$  au lieu de  $(a; 0)$  et  $i$  ( $i$  comme imaginaire) au lieu de  $(0; 1)$ .

Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} z &= (a; 0) + (0; b) \\ &= (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1) \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

#### Définition

L'écriture  $a + bi$  s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe  $z$ .

Avec cette notation, on a en particulier  $i^2 = -1$  (voir l'exercice 1.4). C'est pourquoi le nombre imaginaire  $i$  se note aussi parfois  $\sqrt{-1}$ .

L'identification du nombre réel  $a$  au nombre complexe  $a + 0i$  permet de voir  $\mathbb{R}$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ .

Grâce à cette notation, il est facile de se souvenir de la multiplication (et aussi de l'addition) de deux nombres complexes : pour multiplier  $a + bi$  et  $c + di$ , on calcule comme si l'on multipliait deux polynômes en  $x$  ; ici  $i$  joue le rôle de  $x$  et on utilise le fait que  $i^2 = -1$ . En effet, en procédant ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ab + bc)i.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la définition du produit de deux nombres complexes donnée au paragraphe 1.2.

### Exemples

Effectuer et donner les réponses sous la forme  $a + bi$  (forme algébrique) :

a)  $(2 - i) - (5 - 2i) =$

b)  $(3 + 2i)(1 - 4i) =$

Qu'en est-il de la division de deux nombres complexes ? Abordons ce problème à l'aide d'exemples. La généralisation est laissée en exercice. (Voir l'exercice 3.)

### Exemples

Effectuer et donner les réponses sous la forme  $a + bi$  :

a)  $\frac{3 + i}{2 - 5i} =$

b)  $\frac{4 + 2i}{3i(5 - 2i)} =$

## 1.4 Conjugué et module d'un nombre complexe

Soit  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . (Bien sûr, on suppose  $a$  et  $b$  réels.)

### Définitions

1. Le nombre réel  $a$  est la **partie réelle** de  $z$  et le nombre réel  $b$  est la **partie imaginaire** de  $z$ . On note  $\operatorname{Re}(z)$  la partie réelle de  $z$  et  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire.
2. Si  $a = 0$ , on dit que  $z$  est un **imaginaire pur**.

### Définition

On appelle **conjugué** de  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  et égal à  $a - bi$ .

### Définition

On appelle **module** de  $z$  le nombre réel noté  $|z|$  et égal à  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Remarques

1. Si  $z$  est réel, le module de  $z$  est la valeur absolue de  $z$ . C'est pourquoi on dit parfois aussi valeur absolue d'un nombre complexe au lieu de module.
2. Le module de  $z = a + bi$  est la norme du vecteur  $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  relativement à une base orthonormée  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  du plan. Nous reviendrons sur cette propriété au paragraphe 2.

Voici encore quelques propriétés dont les preuves sont laissées en exercice. (Voir l'exercice 9.)

Soit encore  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes. On a :

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$
4.  $\overline{\bar{z}} = z$
5.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$
6.  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$
7.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
8.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (inégalité triangulaire)

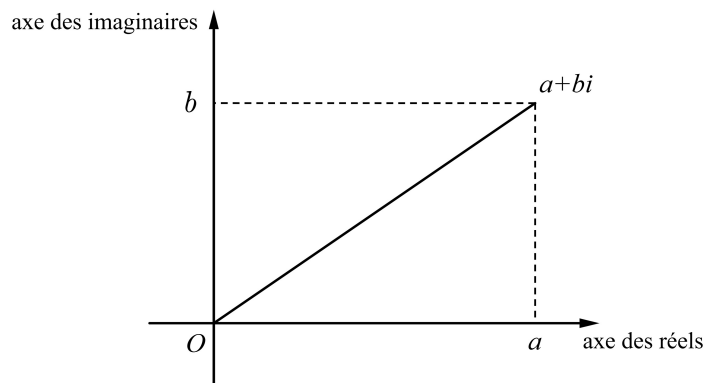
## 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### 2.1 Plan complexe

Considérons un repère orthonormé du plan. À tout nombre complexe  $z = a + bi$ , associons le point  $P(a; b)$  relativement à ce repère.

On dit que  $P$  est le **point représentatif** de  $z$  et que  $z$  est l'**affiche** du point  $P$ .

Les points situés sur l'axe des abscisses correspondent aux nombres réels et les points situés sur l'axe des ordonnées correspondent aux imaginaires purs. Pour cette raison, on dit souvent que l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont respectivement l'**axe des réels** et l'**axe des imaginaires**.



Le plan utilisé pour représenter les nombres complexes est appelé **plan complexe** (ou **plan de Gauss**).

#### Interprétation géométrique de l'addition de deux nombres complexes

Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes dont les points représentatifs sont respectivement  $P_1$  et  $P_2$ .

Vu la définition de la somme de deux vecteurs et celle de deux nombres complexes, il est immédiat que le point représentatif de la somme  $z_1 + z_2$  est le point  $S$  du plan vérifiant  $\vec{OS} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ .

Il est immédiat aussi que le point représentatif de la différence  $z_1 - z_2$  est le point  $D$  du plan vérifiant  $\vec{OD} = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$ .

Aussi, il est facile de se convaincre que pour tout nombre réel  $k$ , le point représentatif du nombre  $kz_1$  est le point  $P$  du plan vérifiant  $\vec{OP} = k \vec{OP}_1$ .

L'interprétation géométrique de la multiplication (et de la division) de deux nombres complexes est plus intéressante. Nous l'étudierons dans le paragraphe 2.2.

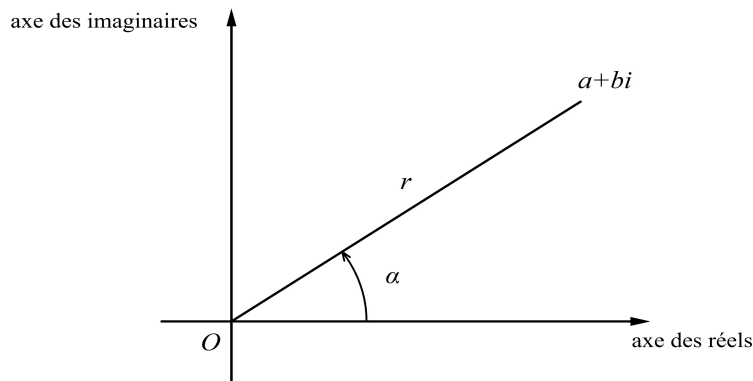
Signalons encore que le conjugué de  $z$ , le nombre complexe noté  $\bar{z}$ , a pour point représentatif le symétrique, par rapport à l'axe des réels, du point représentatif de  $z$ .

## 2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans un repère orthonormé du plan, au lieu de spécifier un point  $P$  distinct de l'origine  $O$  par ses coordonnées cartésiennes, on peut tout aussi bien le définir en donnant la distance  $r = \|\overrightarrow{OP}\|$  et l'angle orienté  $\alpha$  (axe des  $x$ ,  $\overrightarrow{OP}$ ). On dit que  $r$  et  $\alpha$  sont les **coordonnées polaires** de  $P$ .

### Remarque

L'angle  $\alpha$  (mesuré en radians) est défini à un multiple entier de  $2\pi$  près.



Ainsi, si  $z = a + bi$  est l'affixe du point  $P(a; b)$ , on a  $a = r \cos(\alpha)$ ,  $b = r \sin(\alpha)$  et par conséquent on peut écrire :

$$z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)).$$

Remarquons que le nombre réel  $r$  n'est rien d'autre que  $|z|$ , le module de  $z$ . Autrement dit,  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Définitions

1. L'écriture  $r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ , avec  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe non nul  $z = a + bi$ .
2. Le nombre réel  $\alpha$  (mesure d'un angle en radians qui est défini à  $2k\pi$  près, avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) s'appelle l'**argument** de  $z$  et se note  $\arg(z)$ .

### Exemple

Calculer le module et l'argument du nombre  $-1 - i$ , puis écrire ce nombre sous forme trigonométrique.

Le théorème suivant montre qu'il est aisé de multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique. La preuve est laissée en exercice. (Voir l'exercice 18.)

### **Théorème**

Soit  $z_1 = r_1(\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1))$  et  $z_2 = r_2(\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2))$  deux nombres complexes non nuls. On a :

- a)  $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$
- b)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$

### **Interprétation géométrique de la multiplication et de la division de deux nombres complexes**

Vu le théorème précédent, l'interprétation géométrique de ces deux opérations est immédiate :

Le module du produit de deux nombres complexes est le produit des modules et l'argument du produit est la somme des arguments.

Le module du quotient de deux nombres complexes est le quotient des modules et l'argument du quotient est la différence des arguments.

## **2.3 Formule de Moivre**

La deuxième égalité du théorème suivant s'appelle la formule de Moivre.

### **Théorème**

Soit  $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$  un nombre complexe non nul. On a

$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

### **Preuve**

Pour  $n \in \{0; 1\}$ , le théorème est immédiat. Pour  $n \geq 2$ , c'est une application répétée de la partie a) du théorème précédent. (En fait, c'est un raisonnement par récurrence qui permet de montrer de manière rigoureuse la formule de Moivre pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .)

Si  $n \in \mathbb{Z}_-$ , on a

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^{-n}} \\ &= \frac{1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0))}{r^{-n} (\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha))} \\ &= r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la partie b) du théorème précédent. □

## 2.4 Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe

Nous savons ce que sont les racines carrées d'un nombre complexe. (Voir l'exercice 12.)

Plus généralement :

### Théorème

Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et si  $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$  est un nombre complexe non nul, l'équation

$$w^n = z$$

admet  $n$  solutions distinctes. Les solutions de cette dernière équation sont appelées les racines  $n$ -ièmes de  $z$ . Ces solutions, notées  $w_0, \dots, w_{n-1}$ , peuvent être calculées grâce à la formule :

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad \text{pour } k = 0, \dots, n-1.$$

### Preuve

Elle fait l'objet de l'exercice 23.

### Exemple

Calculer les racines cubiques de 1. Représenter ces nombres dans le plan complexe. Que peut-on dire du polygone dont les sommets sont les points représentatifs de ces racines cubiques ?

### 3 Exercices

#### Exercice 1

Prouver les affirmations suivantes :

1. Le nombre complexe  $(0; 0)$  est l'élément neutre pour l'addition dans  $\mathbb{C}$ .
2. Le nombre complexe  $(-a; -b)$  est l'opposé de  $(a; b)$ .
3. Le nombre complexe  $(1; 0)$  est l'élément neutre pour la multiplication dans  $\mathbb{C}$ .
4. Vérifier que  $(0; 1) \cdot (0; 1)$  est l'opposé de  $(1; 0)$ .
5. Le nombre complexe  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}; \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$  est l'inverse de  $(a; b)$ .

Est-il indispensable que le couple  $(a; b)$  soit différent de  $(0; 0)$  ?

#### Exercice 2

Effectuer et écrire les réponses sous la forme  $a + bi$ .

1.  $(3 + 4i) + (3 - 7i)$
2.  $(1 - 2i) - (14 - 10i)$
3.  $(2 + 7i)(1 - 3i)$
4.  $(4 + 5i)^2$
5.  $(1 - i)(2 + i)(3 + 2i)$
6.  $(2 + 3i)^3$
7.  $(9 + 4i)(9 - 4i)$

#### Exercice 3

Soit  $a, b, c, d$  quatre nombres réels.

1. Calculer  $(c + di)(c - di)$ .
2. Amplifier la fraction  $\frac{a + bi}{c + di}$  afin d'écrire cette dernière sous forme algébrique. (On suppose que  $c$  et  $d$  sont non tous deux nuls.)

#### Exercice 4

Que peut-on dire de l'égalité  $a + bi = c + di$  ? ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ )

#### Exercice 5

Effectuer et écrire les réponses sous la forme  $a + bi$ .

1.  $\frac{1 + 3i}{1 - 2i}$
2.  $\frac{4 + i}{3 - i}$
3.  $\frac{1}{i}$

### Exercice 6

Effectuer et écrire les réponses sous la forme  $a + bi$ .

1.  $(2 - 3i)^2 + i^{23}$
2.  $\frac{2 + 6i}{4 - 3i} - \frac{1 - i}{(1 - 2i)(3 + 2i)}$

### Exercice 7

Calculer le conjugué et le module des nombres complexes suivants :

1.  $1 - 2i$
2.  $(3 - 4i)(5 + 12i)$
3.  $\frac{1 + 2i}{2i - 1}$

### Exercice 8

Expliquer la phrase « L'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}$  prolongent l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{R}$ . » (Voir la deuxième propriété de l'introduction.)

### Exercice 9

Démontrer les huit propriétés de la page 5.

### Exercice 10

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Démontrer les égalités suivantes :

1.  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
2.  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
3.  $|z| = |\bar{z}|$

### Exercice 11

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels non tous deux nuls. Résoudre par rapport à  $x$  et  $y$  l'équation  $(a + bi)(x + yi) = 1$ . Quel résultat retrouve-t-on ?

### Exercice 12

Soit  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . On appelle **racine carrée** de  $z$  tout nombre complexe  $w$  tel que  $w^2 = z$ .

1. En écrivant  $w = x + yi$ , calculer les racines carrées de  $w$  dans les cas suivants :
  - (a)  $3 - 4i$
  - (b)  $-21 + 20i$
  - (c)  $-1$
2. Peut-on parler comme en première année de la fonction « racine carrée » ?
3. Prouver que tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.

**Exercice 13**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $x^2 + 2x + 5 = 0$
2.  $iz^2 + 6z = 25i$
3.  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

**Exercice 14**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 + iz^2 + 4z - 2i = 0$ , sachant que  $i$  est une solution.

**Exercice 15**

Trouver les zéros complexes du polynôme  $p(z) = z^4 + 1$ . En déduire la factorisation dans  $\mathbb{C}$ , puis dans  $\mathbb{R}$ , de ce polynôme.

**Exercice 16**

Représenter dans le plan complexe les nombres  $3 + 4i$ ,  $-2 - 5i$ ,  $7i$  et  $-5$ .

**Exercice 17**

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants. Écrire ces nombres ainsi que leur conjugué sous forme trigonométrique.

1.  $1 + \sqrt{3}i$
2.  $14 - 14i$
3.  $-\sqrt{3} - i$
4.  $-3$

**Exercice 18**

Prouver le premier théorème de la page 8.

**Exercice 19**

À l'aide de la formule de Moivre, écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

1.  $(1 + \sqrt{3}i)^7$
2.  $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + \sqrt{3}i}\right)^9$
3.  $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$

**Exercice 20**

Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

1. 64
2.  $i$
3.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

### Exercice 21

Effectuer et simplifier. Donner les réponses sous forme algébrique.

1.  $(2 - i)^3$
2.  $(1 + i)^{23}$
3.  $(1 + i)^{21} + (1 - i)^{21}$

### Exercice 22

Exprimer les racines cinquièmes de  $-1$  sous forme trigonométrique et les représenter dans le plan de Gauss.

### Exercice 23

Démontrer le théorème de la page 9.

### Exercice 24

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

1. Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous forme algébrique et trigonométrique de  $z_1 \cdot z_2$ .
3. En déduire la valeur exacte des deux nombres suivants :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

### Exercice 25

Relativement à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  du plan, on considère la rotation de centre  $O$  et d'angle  $60^\circ$ . Calculer les coordonnées de l'image du point  $P(2; 3)$  par cette rotation.

### Exercice 26

Soit  $m, n \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $m$  et  $n$  sont la somme de deux carrés :

$$\text{Il existe } x, y, z, t \in \mathbb{Z} \text{ tels que } m = x^2 + y^2 \text{ et } n = z^2 + t^2.$$

Démontrer que le produit  $mn$  est aussi la somme de deux carrés.

*Indication :* Utiliser l'égalité  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , si  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ .

## 4 Réponses

1. 5. oui
2. 1.  $6 - 3i$   
2.  $-13 + 8i$   
3.  $23 + i$   
4.  $-9 + 40i$   
5.  $11 + 3i$   
6.  $-46 + 9i$   
7. 97
3. 1.  $c^2 + d^2$   
2.  $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$  (On a amplifié la fraction par  $c - di$ .)
4.  $a = c$  et  $b = d$
5. 1.  $-1 + i$   
2.  $\frac{10}{13} + \frac{11}{13}i$   
3.  $-i$
6. 1.  $-5 - 13i$   
2.  $-\frac{37}{65} + \frac{81}{65}i$
7. 1.  $1 + 2i$  et  $\sqrt{5}$   
2.  $63 - 16i$  et 65  
3.  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  et 1
11. On a  $x = \frac{a}{a^2+b^2}$  et  $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ . On retrouve l'inverse de  $a + bi$ .
12. 1. (a)  $2 - i$  et  $-2 + i$   
(b)  $2 + 5i$  et  $-2 - 5i$   
(c)  $i$  et  $-i$   
2. non
13. 1.  $S = \{-1 + 2i; -1 - 2i\}$   
2.  $S = \{4 + 3i; -4 + 3i\}$   
3.  $S = \{2 + 3i; 2 - 3i; -2 + 3i; -2 - 3i\}$
14.  $S = \{i; (\sqrt{3} - 1)i; (-\sqrt{3} - 1)i\}$
15. Les zéros sont  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .  
Dans  $\mathbb{R}$ ,  $p(z) = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$ .
17. 1.  $|1 + \sqrt{3}i| = 2$ ,  $\arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  
 $1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right)$   
et  $\overline{1 + \sqrt{3}i} = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right)$   
2.  $|14 - 14i| = 14\sqrt{2}$ ,  $\arg(14 - 14i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  
 $14 - 14i = 14\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)$   
et  $\overline{14 - 14i} = 14\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)$   
3.  $|-\sqrt{3} - i| = 2$ ,  $\arg(-\sqrt{3} - i) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  
 $-\sqrt{3} - i = 2 \left( \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \right)$   
et  $\overline{-\sqrt{3} - i} = 2 \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \right)$

4.  $|-3| = 3$ ,  $\arg(-3) = \pi + 2k\pi$ ,  $-3 = 3(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi))$   
 et  $\overline{-3} = -3 = 3(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi))$
19. 1.  $64 + 64\sqrt{3}i$   
 2.  $-i$   
 3.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
20. 1.  $4$ ,  $-2 + 2\sqrt{3}i$  et  $-2 - 2\sqrt{3}i$   
 2.  $-i$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  et  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$   
 3.  $\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9})$ ,  $\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9})$  et  $\cos(\frac{13\pi}{9}) + i \sin(\frac{13\pi}{9})$
21. 1.  $2 - 11i$   
 2.  $-1024 - 1024i$   
 3.  $-2048$
22.  $\cos(\frac{\pi}{5}) + i \sin(\frac{\pi}{5})$ ,  $\cos(\frac{3\pi}{5}) + i \sin(\frac{3\pi}{5})$ ,  $\cos(\pi) + i \sin(\pi)$ ,  
 $\cos(\frac{7\pi}{5}) + i \sin(\frac{7\pi}{5})$  et  $\cos(\frac{9\pi}{5}) + i \sin(\frac{9\pi}{5})$
24. 1.  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  et  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$   
 2.  $z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + (\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4})i = \cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12})$   
 3.  $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  et  $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
25.  $(\frac{2-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+2\sqrt{3}}{2})$