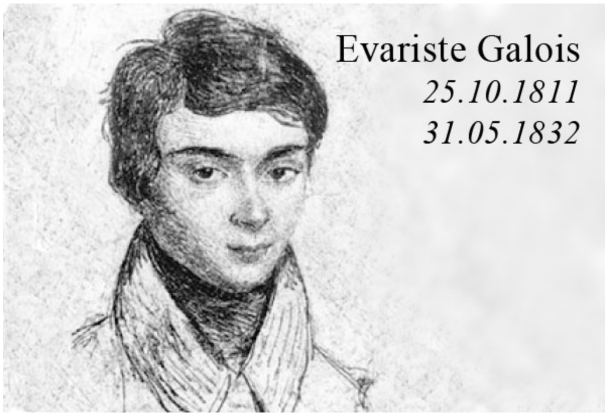
Questions d'oraux de mathématiques de concours d'entrée à de grandes écoles françaises

2820 exercices



Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 13 février 2026

Table des matières

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

- ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)
- X (École Polytechnique (Paris))
- Centrale
- Centrale-Supélec
- Mines
- Mines-Ponts
- Mines-Télécom
- ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)
- EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)
- ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)
- ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)
- ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)
- CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions sont organisées en 12 paragraphes, chacun structurant les exercices autour d'un thème ou d'un domaine mathématique particulier.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté !

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$[\![a\,;b]\!]$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leqslant k \leqslant b$ (a, b entiers)
$\operatorname{ppcm}(a_1, \ldots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \ldots, a_n$
$\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \ldots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\operatorname{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$\lvert E\rvert$	cardinal de l'ensemble E
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\operatorname{sgn}(x)$	signe de x
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\deg(P)$	degré du polynôme P
$\mathbb{K}[X, Y]$	ensemble des polynômes en X et Y, à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$a \equiv b \mod n$	a et b congrus modulo n
$\overline{x}$	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo p (p premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\mathrm{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $[\![1\,;n]\!]$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\mathrm{Ker}(u)$	noyau de u
$\mathrm{Im}(u)$	image de u
$\mathrm{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$\lvert A\rvert$	déterminant de la matrice A
$\mathrm{com}(A)$	comatrice de A
$C(A)$	commutant de A
$\mathrm{Tr}(u)$	trace de u
$\mathrm{Sp}(u)$	spectre de u
$\mathrm{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$-vectoriel E
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E,F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m\times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$
$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^*$
$f^\star$	adjoint de f
Id	application identité

I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\lvert\lvert\lvert A \rvert\rvert\rvert$	norme subordonnée (à la norme $\lVert\cdot\rVert$) de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de x et y

$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \to \{-1; 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E

ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\lVert\cdot\rVert_p$
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norme infinie
$\lVert\cdot\rVert_p$	p-norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R

$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p-adique de n ($p \in \mathcal{P}$)
$\lvert\cdot\rvert_p$	valeur absolue p-adique
$\lvert x - y \rvert_p$	distance p-adique entre x et y
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance p-adique

F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f\vert_A$	restriction de la fonction f à A ($A \subset E$)
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E, à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F

cosh	cosinus hyperbolique
sinh	sinus hyperbolique
tanh	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique

$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\mathring{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\mathrm{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\mathrm{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A

$\mathrm{dist}(A; B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\mathrm{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\mathrm{cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ

1 Suites et séries

1 **Centrale**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Trouver un développement asymptotique à trois termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire des nombres réels α,β,γ tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2 **X-ENS MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers vérifiant $a_1 \geqslant 1$.
Étudier la nature de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(a_1,\ldots,a_n)}.$$

3 **X-ENS**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

4 **Mines**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $0 < u_0 < 1$.
Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : on pourra considérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{u_n}$.

5 **Mines-Ponts**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

6 **ENS**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7 **X-ENS**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n)$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

8 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$. Montrer que si la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée, elle converge.

9 **X ESPCI 2013**

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n^2}$ converge.
2. Soit $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n^2}$. Montrer que le nombre S est irrationnel.

10 **X ESPCI 2022**

Pour tout nombre réel x, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Trouver un équivalent de $\{n!\,\mathrm{e}\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

11 **Mines-Télécom**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

12 **Mines-Ponts PC 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n w_n$ converge et calculer sa limite.

13 **CCINP PC 2002**

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$ est-elle convergente ? Le cas échéant, calculer sa limite.

14 **Mines**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\sqrt{k(n-k)}\right)$.

15 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de termes positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ converge.
Trouver la nature de la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

16 **X PSI**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{3^n}$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa limite.

17 **Mines-Ponts MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

18 **X-ENS MP**

Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

19 **CCINP/Mines-Télécom MP**

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

20 **X-ENS**

Soit $u_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
Donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

21 **Mines-Ponts MP**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la série $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{\sqrt{n^2+1}}$.
Donner un équivalent simple de $F(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.

22 **Mines-Ponts PC 2018**

1. Montrer que si $a, b > 0$, alors
$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$
2. Calculer :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

23 **Mines-Télécom MP 2024**

Donner la nature des séries de terme général u_n avec :

1. $u_n = n^a\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. $u_n = \sqrt[n^2]{n} - 1$.

24 **Mines-Ponts PC 2015**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ grâce à la règle suivante :

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}},\dots$$

$$u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que u_n est négligeable devant n.
5. Donner un équivalent simple de u_n.

25 **Mines-Télécom PSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

26 **X-ENS MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right).$$

1. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, trouver un équivalent de $a_n - \ell$.

27 **Centrale 2010**

Soit $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent.

28 **ENS Ulm Lyon PC 2022**

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Montrer que la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.

29 **Mines-Ponts PSI**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln\left(x^2 - 2\cosh(\alpha)x + 1\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.
2. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de zéro.

30 **X PC 2008**

Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = n + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}.$$

31 **Mines-Ponts PSI 2019**

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$$

selon les valeurs de a et b.

32 **CCINP**

Montrer que la série de terme général

$$a_n = \frac{n^3 + 2n^2 + n + 1}{n!}$$

est convergente et calculer sa somme.

33 **Centrale**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0\,;1[$ tel que $P_n'(\alpha_n) = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; \dots; n\}$, exprimer $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$ sous forme de somme.
3. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Trouver un équivalent de α_n.

34 **Centrale PC 2015**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de n. Étudier la convergence, puis la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

35 **Centrale PC 2023**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Soit encore $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence de J et calculer cette intégrale.

   On pourra utiliser l'égalité : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} \ell + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α et β sont deux nombres réels.

36 **Mines-Ponts PC 2013**

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \ ?$$

37 **X MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left\{(1+\sqrt{2})^{2n}\right\}$.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

38 **Centrale PC 2004**

Soit $a > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(a^{2^k}+1\right)}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ selon les valeurs de a et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

39 **CCINP PSI 2013**

On considère la série de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$
3. Calculer la somme de la série.

40 **Mines-Ponts PSI 2019**

On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Trouver D_f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. La fonction f est-elle intégrable sur $[1\,;+\infty[$?
4. Trouver un équivalent de f en zéro.
5. La fonction f est-elle intégrable sur $]0\,;1]$?

41 **CCP MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0\,;1]$ tel que :
$$\int_{u_n}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n.$$
On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n - \ln(u_n)$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite à partir d'une intégrale.
4. Trouver un équivalent simple de u_n.

42 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit f une fonction continue, croissante et positive de $]0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(\mathrm{e}^{-n})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Montrer que les séries de terme général u_n et v_n ont même nature.

43 **Mines-Ponts**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme.

44 **Mines**

Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

45 **Mines-Ponts**

Pour a et b réels, trouver la nature de la série de terme général
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + a\tan\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

46 **CCINP**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, l'équation
$$\mathrm{e}^x + x = n,$$
d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$, admet une unique solution notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est équivalente à $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général x_n^α.

47 **X PC 2013**

Soit $x > 0$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$?

48 **CCINP PC**

Quelle est la nature de la série de terme général défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right) ?$$

49 **Centrale PC 2019**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que $u_n > \frac{1}{n}$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?
2. On suppose que $u_n > \frac{1}{n}$ pour un nombre infini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?

50 **Centrale**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

51 **X-ENS**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1.$$

Trouver un équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

52 **Mines-Ponts/Centrale PC 2010**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\,.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
2. Soit $\alpha > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} ?$$

53 **CCINP**

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

54 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

55 **X**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de naturels telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant a_n\leqslant n-1$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a_n}{n!}$ converge.
2. On suppose que $a_n=n-1$ à partir d'un certain rang.
   Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a_n}{n!}$ est rationnel.
3. Soit $t\in[-1\,;1]$.
   Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(2\pi n!\alpha)=t$.

56 **X-ENS**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\dfrac{1}{n^n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^n$.

57 **X-ENS**

Trouver un équivalent de $u_n=\sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\left\lfloor\dfrac{n}{k}\right\rfloor$.

58 **X-ENS**

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Soit $f:[a\,;b]\to[a\,;b]$ une fonction continue, $u_0\in[a\,;b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

59 **X**

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{2n+1}\right)$.

60 **X-ENS**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$. On pose $B_0=1$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

En déduire la formule :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ B_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j^n}{j!}.$$

61 **Mines/CCP**

Calculer $\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

62 **Centrale**

Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{\sin(n!\pi\alpha)}.$$

1. Démontrer que $R_\alpha \leqslant 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^n}.$$

   En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

   Dans la suite, on pose $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ et on admet que α est irrationnel.
3. Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n - 1}}.$$

4. Démontrer que $R_\alpha = 0$.
5. Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.

63 **ENS**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0\,;1[$. Montrer que la suite

$$(x_n(1 - x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$$

   admet une valeur d'adhérence inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.
2. On suppose que $(x_n(1-x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence inférieure à $\frac{1}{4}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

64 **ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver un équivalent de u_n.

65 **CCP MP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} - \ln(n)$.

1. Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Proposer un équivalent simple de $u_n - \ell$.
3. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n (u_n - \ell)$.

66 **Centrale**

Considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$
   Montrer que ces deux suites convergent.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.
3. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β
   tels que $\ln(I_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1)$.
4. Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n$.

67 **Mines-Télécom MP**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
   Montrer que :
   (a) $\ell < 1 \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ;
   (b) $\ell > 1 \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

68 **X MP**

Soit $\lambda \in]0\,;1]$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} x_0 \in]0\,;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \end{cases}$$

69 **Mines-Ponts**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)$.
2. Donner un équivalent de $\displaystyle R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ en $+\infty$.

70 **Centrale MP**

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \mapsto tq(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |tq(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$.

   On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y_{n+1} = 1 - \displaystyle\int_0^{+\infty} (t-x)q(t)y_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

2. Justifier la définition de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[a\,;+\infty[$.
3. Montrer la convergence uniforme de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a\,;+\infty[$.

71 **Mines-Télécom MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_n = (-1)^n \dfrac{\cos(u_{n-1})}{n} \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

72 **ENS ESPCI 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\displaystyle c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.
3. On pose $\displaystyle f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$.

   Montrer que $\displaystyle f(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus \{0\}$.

73 **CCP MP**

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
2. On note $N = \lim\limits_{n\to+\infty} M^n$. Que représente N ?
3. Déterminer N.
4. Soit u_0, v_0 et w_0 trois nombres réels et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

   Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

   La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Le cas échéant, quelle est sa limite ?

74 **CCP MP**

Soit $\delta \in]0\,;\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(\delta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\delta)$.

1. Donner une expression simplifiée de $S_n(\delta)$. Exhiber $M(\delta) \in \mathbb{R}$, indépendant de n, tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n(\delta)| \leqslant M(\delta).$$
2. Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose $u_n(\delta) = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\delta)$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(\delta)$ converge simplement sur $[2\,;+\infty[$.
   On pourra écrire $\cos(n\delta) = S_n(\delta) - S_{n-1}(\delta)$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(\delta)$ sur tout segment inclus dans $]0\,;\pi]$.

75 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'équation
$$x^n - nx + 1 = 0$$
   admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$. On la note x_n.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Donner un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

76 **X ESPCI**

Étudier le comportement en l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

77 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f et esquisser le graphe de cette fonction.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite en fonction de u_0.

78 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'équation

   $$\sin(x) = \frac{x}{n}$$

   admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\pi[$. On la note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Calculer sa limite.
3. Donner un développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ avec la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

79 **X-ENS**

Soit p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge.

80 **CCP MP 2007**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \exp(-x\sqrt{n})$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$.

   Lorsque $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge, on note S sa somme.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x)$ est équivalent à e^{-x} en l'infini.

81 **X-ENS**

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n!\pi \mathrm{e})$?

82 **Mines-Ponts MP 2023**

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose :

$$\|A\| = \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Étudier la convergence de $\sum A^k$ si $\|A\| < 1$. Cette condition est-elle nécessaire pour la convergence de la série ?
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$U_p = \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.$$
Étudier la convergence de la suite $(U_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

83 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n^n$.

84 **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} u_p u_{n-p} \end{cases}$$

On souhaite obtenir une expression de u_n en fonction de n. On suppose qu'il existe un nombre réel R strictement positif tel que la série entière $\sum u_n x^n$ converge sur $]-R\,;R[$. Pour tout $x \in]-R\,;R[$, on pose $S(x) = \sum u_n x^n$.

1. Pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus\{0\}$, calculer $S^2(x)$.
En déduire que pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus\{0\}$:
$$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0.$$
2. Montrer que $S(0) = 1$, et qu'au voisinage de 0, $S(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
3. Montrer qu'au voisinage de 0, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$.
4. Conclure.

85 **X MP**

Pour $|t| < 1$, on pose $f(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-t^k}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer, pour $|t| < 1$, que $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p(n)t^n$, où $p(n)$ est le nombre de suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels telles que $\sum_{k=1}^{+\infty} k y_k = n$.

86 **X-ENS**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que,
$$\forall t \in \left]0\,;\tfrac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\cot^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$
2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.
3. En observant que
$$\cot^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \cot^2(t)$$
pour tout $t \in \left]0\,;\tfrac{\pi}{2}\right[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

87 **Mines-Ponts**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $p > 1$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.
2. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ, appelé la *constante d'Euler*. Déduire que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis de t_n. Déduire que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Avec un raisonnement similaire, montrer que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

88 **X-ENS**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Étudier la convergence et calculer explicitement la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\frac{x^n}{n!}.$$

89 **Centrale PC 2023**

1. Soit n et p deux naturels. Calculer :

$$I_{n,p} = \int_0^1 (\ln(x))^p x^n \,\mathrm{d}x.$$

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que I converge et que

$$I = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}.$$

3. En majorant les restes de la série précédente, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

90 **Mines-Ponts MP 2024**

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2+\sin(n+k)+(n+k)^2}.$$

91 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sous réserve de sens, étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. Quelle est la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?
4. Bonus : trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

92 **X PC 2021**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $x_0 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_0 + x_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{n+1} + x_n.$$

Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

93 **CCP**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. On suppose encore que $u_n \sim v_n$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}.$$

94 **CCP**

1. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de

$$u_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

95 **CCINP**

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;+\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a\,;+\infty[$?
4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0\,;+\infty[$?

96 **X-ENS**

Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

97 **X-ENS**

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère la fonction réelle f_n définie par :

$$f_n(x) = x^{3n} - \sqrt{n} \cdot x + 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1\,;2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de $\varepsilon_n = x_n - 1$ et en déduire un équivalent de x_n.
3. Donner un équivalent asymptotique à trois termes de x_n.

98 **Centrale PC 2015**

On pose, pour tout x réel,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$u_n = f(n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Étudier la nature de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}.$$

99 **Mines-Ponts**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
Donner un équivalent de x_n.

100 **ENSAE 2013**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

101 **X MP**

Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $(x;y) \in [0\,;1]^2$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_0 \in [0\,;1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe a.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

102 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

103 **X PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par :

$$P_n(X) = X^{2n} + X^2 - 1.$$

1. Montrer que P_n possède deux racines réelles de signes opposés.
2. On note r_n la racine positive de P_n. Démontrer que la suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée et convergente. Déterminer sa limite.

104 **Mines**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \arctan(x_n)$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

105 **CCP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3 + x} \,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver l'existence de J_n.
2. Étudier les limites des suites $(J_n)_{n \geqslant 1}$ et $(nJ_n)_{n \geqslant 1}$.

106 **Mines 2015**

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$.

107 **CCP 2015**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln(n)$.

1. Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer α pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et calculer alors sa limite.

108 **CCP 2105**

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n} \cdot x = 1$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On note a_n cette solution. Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et la convergence de la série $\sum a_n$.

109 **Centrale 2015**

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0\,;1[$ tel que $P_n'(u_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k - u_n} = 0$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$ et déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

110 **CCP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et en calculer un équivalent.

111 **Mines 2015**

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{arcosh}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$?

112 **CCP 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $P_n(X) = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que P_n admet deux racines positives, a_n et b_n.
2. Étudier les suites $(a_n)_{n\geqslant 3}$ et $(b_n)_{n\geqslant 3}$ et leur rapidité de convergence.

113 **CCP 2015**

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Pour quels n, u_n est-il défini ?
2. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{u_n}{n!}x^n$.
5. Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$.
6. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

114 **Centrale 2015**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On note $J = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum u_n^x \text{ converge}\}$.

1. Montrer que J est vide ou alors un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. (Illustrer par des exemples concrets.)
2. On suppose que $J \neq \emptyset$, et on note :

$$f : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^x \end{array}$$

   Étudier la continuité de f et ses limites au bornes.

115 **Centrale 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $2^{(2^n)}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

116 **CCP MP**

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) On suppose $\alpha \leqslant 0$.
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) On suppose $\alpha > 0$.
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

117 **X PC 2019**

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}.$$

On pourra commencer par regarder le comportement de $u_n + u_{n+1}$.

118 **CCP MP**

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0\,;1],\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0\,;1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

119 **CCP 2015**

Donner un développement en série entière de la fonction $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

120 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

121 **Mines-Ponts**

1. Montrer que l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer les réels a et b tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n - n\pi - a + \frac{b}{n}$ converge.

122 **CCP MP**

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

123 **CCP MP**

Soit E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2. On pose :
$$\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

   (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

   (b) Prouver que pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

   (c) On pose, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

   Prouver que f est continue sur E.

124 **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

125 **CCP MP**

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

126 **CCP MP**

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r\,;r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R\,;R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

127 **CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe z.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

   (c) $\sum \cos(n) z^n$

128 **Mines 2016**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2015}\right) x^n$ et calculer sa somme.

129 **CCP MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

130 **CCP MP**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ avec $a_{2n} = 4^n$ et $a_{2n+1} = 5^{n+1}$.

131 **CCP MP**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

132 **X-ENS 2015**

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée des réels $x_0 > 0$ et $a > 0$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}.$$

Étudier la limite de cette suite, et donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

133 **CCP MP**

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que : $\forall (u;v) \in A^2,\ \|uv\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
2. (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $e-u$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
3. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

134 **CCP 2016**

On considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et la série entière $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} \dbinom{n}{m} x^n$, de somme $S(x)$.

Déterminer son rayon de convergence, et calculer sa somme sur son disque de convergence.

135 **Mines 2016**

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{4n^2 - n + 1}$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série $S(x)$.
2. Calculer $S(x)$ lorsque $x > 0$.

136 **CCP MP**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.

137 **CCP MP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0.$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

138 **CCP 2016**

On rappelle que la série harmonique alternée converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c tels que $\dfrac{1}{4X^3 - X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{2X-1} + \dfrac{c}{2X+1}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ convergent, calculer leur somme.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$ converge, calculer sa somme.
4. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^3 - x}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer.

139 **CCP 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

140 **Mines 2016**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \sqrt{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

Indication : on pourra utiliser une équation différentielle.

141 **X-ENS 2016**

1. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

142 **ENSAM 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^n}\,\mathrm{d}t$ et la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$.
3. Montrer que $R = 1$.

143 **ENAC 2016**

On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction ζ.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x$ est définie et est égale à la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

144 **Mines PSI 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

145 **Mines 2016**

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Déterminer les rayons de convergence des séries entières
$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n}{n!} x^n.$$
2. Trouver une relation entre S, S' et U'.
3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} U(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} U(x)\mathrm{e}^{-x}$.
5. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)\mathrm{e}^{-x}$ en fonction de $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

146 **Mines 2016**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers une limite ℓ. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

147 **Mines 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :
$$\text{la somme harmonique } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et la fonction } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$
1. Déterminer le rayon de convergence de la somme $f(x)$.
2. Déterminer le comportement de $f(x)$ aux bornes du domaine de convergence.

148 **CCP 2016**

On considère, pour $n \geqslant 2$ entier, l'équation $(E_n) : x^n = x + n$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution u_n de (E_n) dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$ on a $1 < u_n < 2$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et sa limite ℓ.
4. Calculer un équivalent de $u_n - \ell$.

149 **Mines 2016**

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \end{cases}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière f n'est pas nul.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
   En déduire la fonction f et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

150 **Mines 2016**

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs, convergente.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+2}}$ converge aussi.

151 **CCP PSI 2019**

1. Quel est le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$
   avec $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$?
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur D.
3. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
   Montrer que, pour tout $x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que la somme S associée à cette série est continue sur D.
5. Montrer que S est intégrable sur D.

152 **ENSEA/ENSIIE 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

1. Démontrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Démontrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
3. Déterminer, par majoration ou minoration, la nature de $\sum u_n$ avec :
   (a) $u_n = n^4 \mathrm{e}^{\sin(n)}$
   (b) $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n^4}\right)}{2^n}$

153 **ENSIIE 2015**

À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b, c, la série de terme général

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

converge-t-elle ?

154 **Mines-Ponts 2015**

Soit $M(x_0; y_0)$ un point de la parabole $\mathfrak{P}$ d'équation $y^2 = 2px$. $(p > 0)$
On note M_n la deuxième intersection entre la normale à la parabole en M_{n-1} et la parabole.

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $\dfrac{1}{y_n}$.

155 **TPE/EIVP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Pour quels nombres réels α la série $\sum u_n^\alpha$ est-elle convergente ?

156 **Centrale 2017**

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1 + \sqrt{0}}}}}$.

1. Établir une relation simple entre u_n et u_{n-1}.
2. Donner un équivalent puis un développement à deux, puis à trois termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.

157 **ENSEA/ENSIIE PSI 2017**

1. Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k - 1$ admet une unique racine $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

158 **Mines 2012**

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x}$ est prolongeable en une fonction développable en série entière.
2. Montrer que f est strictement croissante, et réalise une bijection entre deux intervalles que l'on précisera.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction réciproque $g = f^{-1}$ en 0.

159 **Mines 2012**

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels positifs.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors la série $\sum \dfrac{1}{n^{b_n}}$ converge.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, la série $\sum \dfrac{1}{a_n^{b_n}}$ converge-t-elle ?

160 **CCP 2012**

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}^2}{u_n}.$$

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

161 **X PSI**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

162 **X PC**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ converge et déterminer sa limite.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

163 **X PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

164 **ENSEA/ENSIIE 2012**

On considère une série réelle convergente $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs ou nuls, de limite nulle.

1. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n u_n$ converge.
2. Trouver un contre-exemple si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas absolument.

165 **CCP 2012**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Étudier les variations et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}u_n$, et que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
4. Montrer que la suite $((n+1)(n+2)(n+3)a_na_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire un équivalent de u_n et la nature de la série $\sum u_n$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$ et calculer cette somme.

166 **CCP 2012**

Étudier le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

167 **Centrale 2012**

On considère la série entière $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Calculer $(1-4x)f'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire $f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

168 **ENS Rennes 2017**

Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

   Indication : on pourra développer en série entière $\frac{1}{1+t^b}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

169 **CCP 2017**

Déterminer le rayon de convergence de la série $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$ et calculer sa somme.

170 **CCP**

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

171 **CCP PC**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Étudier la limite de $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$.

   En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.
3. En étudiant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

172 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une relation de récurrence sur I_n.
2. Trouver un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
3. (a) Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (b) Exprimer I_{2n+1} à l'aide d'une série.

173 **Mines-Ponts PSI**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

1. Étudier la limite de cette suite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.
4. Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

174 **Mines-Ponts PC 2023**

1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.
2. Montrer que la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$$
   converge uniformément sur $[0\,;1]$ et calculer sa somme.
3. La série de fonctions précédentes converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

175 **Mines-Ponts MP**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $P_n(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0\,;1[$, notée λ_n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.
3. Trouver un équivalent de λ_n pour $n \to +\infty$.

176 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha}+(-1)^n}}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

177 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

178 **CCP PC**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

179 **CCP PSI**

Soit, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le sens de variation de la fonction f, préciser le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la nature de la série $\sum u_n$.

180 **ENSAM PSI**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes positifs, avec $a_1 \geqslant 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0\,;1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.
2. Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geqslant 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ.

181 **X ESPCI**

Soit $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ vaut 1.
2. Pour tout $x \in]-1\,;1[$, soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-1\,;1[$.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.

182 **CCP PSI**

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n^a)x^n$.

183 **Centrale PSI**

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n).$$

1. Calculer d_2 et d_3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!}x^n$.
2. Pour tout $x \in]-R\,;R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$.

   Montrer que pour tout $x \in]-R\,;R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
3. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n.

184 **Mines-Ponts PC 2011**

On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right).$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

185 **CCP MP 2018**

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0\,;+\infty[,\ f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}.$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

186 **CCP MP 2018**

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a\,;b]$? sur $[a\,;+\infty[$?

   (c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0\,;+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

187 **X**

Soit $\theta \in [0\,;2\pi]$ et $t \in [0\,;1[$. On pose :

$$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(p\theta).$$

1. Calculer $S(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.

188 **X MP 2019**

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1, telle que $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$.
   Montrer que
   $$\sum_{n\geqslant 0} f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   sont de même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos(\ln(n))}{\ln(n)}$?

189 **Centrale**

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(nx+1)}$.

1. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis un équivalent de S en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de S en 0^+.

190 **TPE/EIVP PC 2018**

Posons, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général u_n.
Indication : utiliser l'identité $n^2+3n+3 = 1+(n+1)(n+2)$.

191 **ENSAE MPI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+o(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

192 **CCINP MP 2024**

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

2. Montrer que

$$\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}\Big(\ln^2(n) - \ln^2(n-1)\Big)$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

193 **Mines-Télécom MP 2024**

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

194 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n).$$

195 **CCINP PSI 2024**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

196 **CCINP PSI 2014**

Résoudre l'équation

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 5$.

197 **Mines-Ponts PC 2018**

On note $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Préciser la dimension de F.
2. Pour tout entier $p \geqslant 3$, on note v_p le nombre de parties de $\{0; 1; \dots; p\}$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques d'une de ces parties soit supérieur ou égal à 3. Montrer que la suite $(v_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F.

198 **TPE/EIVP PC 2019**

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et discuter la convergence de celle-ci en fonction de la valeur de u_0.

199 **CCINP PSI 2024**

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de cette série.
2. Calculer $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer la somme $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{N-1}$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.

200 **ENSAE MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation :

$$(E_n) : \sum_{k=1}^{n} x^k = 1.$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une unique solution x_n de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

201 **CCINP TSI 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi+t)^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad a_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $\sin(t) \leqslant t$.
2. Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que $a_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

202 **Centrale-Supélec PC 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = -4 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0\,;+\infty[$. Cette racine est notée x_n.
2. Calculer x_1 et x_2. Montrer que $x_5 < 1$.
3. Quel est le signe de $P_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone puis qu'elle converge. Sa limite est notée ℓ.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
5. Montrer que x_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de ℓ.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n = x_n - \ell$.
   Vérifier l'égalité $\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $n\delta_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
7. Trouver une constante K telle que δ_n soit équivalent à $K \cdot \ell^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

203 **TPE/EIVP MP 2017**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \exp\left(-\frac{k}{n}\right)$.

204 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.
2. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ d|k}} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{d}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

205 **Mines-Télécom PSI 2021**

Développer en série entière la fonction f définie par :

$$f(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

206 **Mines-Ponts MP 2019**

Montrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

207 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

208 **Centrale-Supélec PSI 2018**

Dans tout l'exercice, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$. On dira que $\prod a_k$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie non nulle. On pose pour tout n, $u_n = a_n - 1$.

1. Prouver que, si $\prod a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. On suppose dans toute la suite que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Montrer que la suite $(\ln(1+u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
3. On suppose maintenant que $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
4. En étudiant directement la convergence de

$$\prod \left(1 + \frac{1}{1+n}\right),$$

démontrer la divergence de la série harmonique.

209 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $k \geqslant 2$ un entier. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

210 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. Montrer par récurrence que la suite est majorée par 2.
3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

211 **Mines-Télécom MP 2025**

Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 + 2n + 1.$$

Indication : il pourra être utile d'introduire l'endomorphisme $S - 2\mathrm{Id}$, où S est l'application suivante :

$$S \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

212 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation

$$1 + \ln(x+n) = x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On note u_n cette solution.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln(n) < u_n < n$$

et en déduire un équivalent de u_n.

213 **CCINP TSI 2022**

On considère $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. (a) Vérifier que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
   (b) En déduire la valeur de I_1.
   (c) Interpréter géométriquement ce calcul.
2. Proposer une méthode numérique permettant un calcul approché de I_n.
3. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (b) En déduire que $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.

214 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Montrer que $|u_n|$ et v_n tendent forcément vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

215 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x_0; y_0) = (0; 0)$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Calculer les premiers termes de chaque suite et conjecturer leur comportement.
3. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).
4. Montrer que $(x_{2n} - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1} - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$, où ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent vers 0. (On pourra pour cela majorer $x_{n+1} - \ell$.)
5. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$, l'écart entre y_n et sa limite et celui entre x_n et sa limite est inférieur à ε. Déterminer ce rang pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

216 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

On considère, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

217 **CCINP MP 2025**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot S_n = 1$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge (raisonner par l'absurde), puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 \,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ quand $n \to +\infty$.

218 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs tels que $\sum u_n$ converge. Démontrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

219 **ENSEA/ENSIIE MPI 2025**

Soit la série de terme général $(n^2+n+1)x^n$.
Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

220 **CCINP PC 2021**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right).$$

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

221 **CCINP PC 2019**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, soit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(1+a_n)$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} (1+a_k)$.

222 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = k\,?$$

2. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}\,?$$

223 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période d. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n^\alpha}$.

224 **Mines-Ponts PC 2017**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{n}{n+\alpha}\right)^{n\ln(n)}$.

225 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^k)x^k$.

226 **ENSAE MP 2024**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{n+1}{2} z^{2n}$.

227 **CCINP MP 2017**

On définit la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier la définition de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2} J_{n-1}.$$
3. En utilisant le résultat de la question 2, trouver la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

228 **Mines-Ponts MP 2025**

Montrer la convergence de la somme suivante et en calculer la valeur :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right).$$

229 **Mines-Télécom MP 2019**

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer l'existence de $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{n}$ quand $n \to +\infty$.
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$?
4. Étudier la convergence en R et en $-R$.

230 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$, où $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$.

1. Étudier la nature de cette suite.
2. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n - 1}{n}$.

231 **Mines-Ponts PSI 2013**

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{arcosh}(n) - \operatorname{arsinh}(n).$$

232 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leur premier terme x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{4} \\ z_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

233 **Mines-Télécom MP 2018**

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

234 **CCINP PSI 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{Tr}(A^n)$.

1. Trouver une relation vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

235 **CCINP MP 2022**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

   Montrer que la série $\sum w_n$ converge.

4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \dfrac{C}{n^a}$.

236 **Mines-Ponts MP 2014**

On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2n-3}{2n+1} u_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
2. Étudier la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

237 **CCINP PC 2024**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum u_n$.

238 **CCINP MP 2022**

1. Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0\,;1]$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et qu'elle est de limite nulle.
3. Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties.
4. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n.

   (b) Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n \sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

239 **Mines-Télécom MP 2025**

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}$.

240 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$ et calculer sa somme.

241 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit u la suite réelle définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt[n]{n!}.$$

Trouver une suite v d'éléments de la forme $n^\alpha (\ln(n))^\beta$, avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $u - v$ soit convergente.

242 **CCINP PSI 2019**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie par $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \mathrm{e}^t$. Montrer que :

$$\forall t \in [0\,;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{n} \quad \text{et} \quad \left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t - 1\right| \leqslant \frac{t}{n}\mathrm{e}^t.$$

2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où :

$$I_n : x \in [0\,;1] \longmapsto \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right) \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

243 **Centrale-Supélec PC 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n \exp(-t) t^n \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
2. Montrer que $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

244 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}.$$

1. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

245 **CCINP TSI 2024**

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}.$$

Donner une condition sur a et b afin que le premier terme du développement limité de f en 0 soit de degré maximal.

246 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Déterminer l'intervalle de définition de f.
2. Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

247 **Mines-Télécom MP 2022**

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!\, x \in \mathbb{R}_+,\ \cos(x) = nx.$$
2. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

248 **CCINP PC 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = a_{n+1} - a_n.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} D_n$ converge.

249 **Mines-Télécom MP 2022**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right).$$

250 **CCINP MP 2023**

On considère :

- $\sum a_n x^n$ série entière de rayon R, de somme $f(x)$,
- $\sum b_n x^n$ série entière de rayon R', de somme $g(x)$,
- $\sum c_n x^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

1. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$?
Que dire de la somme de la série ? (Aucune démonstration n'est exigée.)
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série suivante :
$$\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

251 **Mines-Ponts MP 2022**

Pour $n \geqslant 1$ entier et $x > 0$, on pose :

$$u_n(x) = x^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$, puis étudier la continuité de sa somme.

252 **Mines 2022**

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine entière.

Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$.

253 **Mines 2023**

Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$.

254 **Mines 2023**

Soit f une fonction continue sur $[0\,;\pi]$. Pour $n \geqslant 1$ entier, on pose

$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Indication : on pourra étudier $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

255 **Mines 2022**

On fixe $\alpha \geqslant 0$ et on pose, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer la limite et un équivalent de u_n lorsque $\alpha = 0$.
2. Faire de même lorsque $\alpha > 1$.
3. À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$, faire de même lorsque $\alpha = 1$.
4. En déduire la limite de u_n lorsque $\alpha \in]0\,;1[$.

256 **Mines 2023**

Soit $b \geqslant 2$. On note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base b de n. On pose $u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_n = nu_{c(n)}$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

257 **Mines 2024**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Donner un équivalent de :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

258 **Mines 2024**

On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi^4}{48} - a_n b_n\right).$$

259 **X 2022**

Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, et on note R le rayon de convergence de f.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) $\exists C > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant (C+\varepsilon)^n$;

ii) $R = +\infty$ et $\exists C > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists r_0 > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant r_0 \implies |f(z)| \leqslant \mathrm{e}^{(C+\varepsilon)|z|}$.

260 **CCP 2023**

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = 0$.
3. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. À l'aide de la continuité uniforme de f, montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

261 **CCP 2024**

Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + \lambda^n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ en fonction de λ.
2. Même question pour la convergence uniforme.
3. On définit à présent :
$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + 2^n x^2) \qquad \text{et} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$
   (a) Donner le domaine de définition de G.
   (b) Donner le domaine de continuité de G.
   (c) Donner le domaine de dérivabilité de G.

262 **Mines 2024**

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + (n+1)u_n}{n+2}.$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

263 **Mines 2024**

Étudier la série entière :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^2+1}\, \mathrm{d}t.$$

264 **Centrale 2023**

Pour tout $n \geqslant 1$ entier, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit encore :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que $H_n = \ln(n) + O(1)$. En déduire les rayons de convergence de f et g.
2. Donner une expression de g et en déduire un équivalent de f en 1^-.
3. En calculant $(1-x)f(x)$, montrer que f admet une limite finie en -1 et la calculer.

265 **Mines 2022**

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de continuité de f.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0^+.

266 **Mines 2024**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On définit la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 et α pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$.
   Trouver la constante optimale $C > 0$ telle que $\|e_{n+1}\| \leqslant C\|e_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

267 **Centrale 2023**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

1. Montrer qu'une série (réelle ou complexe) absolument convergente est convergente.
2. (a) On note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et on suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k) + S_n b_n.$$
   (b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.
3. (a) On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que si $\sum b_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer la réciproque.

268 **Centrale 2023**

On fixe $a > 0$ et on pose :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx)\exp(-n^a).$$

1. (a) Rappeler le théorème de dérivation des séries de fonctions.
   (b) Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe C^∞.
2. On suppose $a > 0$. Montrer que $\tau_x : t \mapsto f(x+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Qu'en est-il lorsque $a \leqslant 1$?

269 **Mines 2022**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Discuter de la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en fonction de α.

270 **Mines 2023**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto f(nx)$.
   (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
   (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur tout compact ?
2. Mêmes questions avec $f_n : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

271 **Mines 2023**

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $f(z) = \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son rayon de convergence.
2. Exprimer les coefficients a_n de cette série entière sous forme d'une somme.
3. Donner une relation de récurrence entre les a_n.
4. Effectuer un développement asymptotique de $\ln(a_n)$ à la précision $O(\ln(n))$.

272 **Mines-Ponts MPI 2025**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $[0\,;1]$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Dans cette partie, on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   (a) Démontrer que $b_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En utilisant $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, démontrer que $b_n \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\sigma_n}}{\sigma_n}$.
   (c) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.
2. Dans cette partie, on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Soit $\alpha \in]-1\,;0[$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\alpha]$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $$x - Cx^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
   (b) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.

273 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : t \longmapsto \frac{2t}{t^2 + n^2}.$$

1. Étudier les modes de convergence de $\sum u_n$.
2. On note g la fonction somme. Montrer sa continuité.
3. La fonction g est-elle de classe C^1 ?
4. Étudier la limite de g en $+\infty$.

274 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$?

275 **Mines-Télécom MP 2025**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

276 **CCINP MP 2021**

On pose, pour tout réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = r^n(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx})$$

avec r un nombre réel fixé tel que $|r| < 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $P_r(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

277 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Donner une condition nécessaire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série numérique $\sum u_n$ converge.
2. Cette condition est-elle suffisante ? Justifier.
3. Déterminer la nature de la série de terme général

   $$v_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

   en fonction des réels a et b.

278 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\alpha \in]0\,;\pi[$ et

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{x^2+2\cot(\alpha)x-1} \end{array}$$

Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.

279 **Mines-Ponts MP 2021**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor}{k(k+1)}$.

280 **Mines-Télécom 2021**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \cos^n(x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$. Exprimer f'.
4. En déduire une expression de f.

281 **CCINP MP 2021**

À l'aide de séries entières, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser 1.)

282 **Mines-Télécom MP 2018**

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on pose $u_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$.

Étudier les convergences simple, absolue, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0\,;+\infty[$.

283 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général

$$u_n = \sqrt{P(n)} - n^2 - n + 1$$

converge.

284 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Montrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. On pose :

$$u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

   (a) Étudier la convergence simple, puis la convergence normale de S.
   (b) Montrer que S est de classe C^1 et calculer S'.

285 **Mines-Télécom 2025**

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

1. Montrer que f existe.
2. Trouver $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

286 **CCINP PSI 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

287 **CCINP TSI 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

288 **CCINP MP 2024**

Soit $p \geqslant 2$ entier et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod p \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \mod p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de la série $f(x)$, et l'écrire sous une forme simplifiée.
3. La série converge-t-elle uniformément sur $]-R\,;R[$?
4. Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$, écrire les coefficients sous forme trigonométrique.

289 **Mines-Ponts MP 2022**

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers avec $p_n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_1\cdots p_n}$ converge et que sa somme appartient à $]0\,;1]$.
2. Soit $x \in]0\,;1]$. Montrer qu'il existe une unique suite croissante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_1\cdots p_n}$.
3. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

290 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{\rho; z; \overline{z}\}$ avec $\rho > 1$ et $|z| < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \rho^n + z^n + \overline{z}^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \sin(\alpha u_n)$ et $\sum \sin(\alpha \rho^n)$ sont de même nature.

291 **TPE/EIVP MP 2015**

1. Montrer que la série double de terme général $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q)^2}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, diverge.
2. Étudier la convergence de la série double de terme général $v_{p,q} = \dfrac{1}{p^2+q^2}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

292 **Mines-Télécom PSI 2022**

On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n}$.

1. Soit $f \in C^1([a\,;b], \mathbb{R})$. Montrer que :
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0\,; \frac{1}{2}\right]$. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(2kt) = \frac{(-1)^n \cos((2n+1)t) - \cos(t)}{2\cos(t)}.$$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t$, puis en déduire que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.

293 **ENSEA/ENSIIE MP 2023**

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\mathrm{e}^{\cos(x)}$.

294 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Proposer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que S est irrationnel.

295 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit f définie par $f(t) = \cos\left(\dfrac{\arcsin(t)}{2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.
2. En déduire un développement en série entière de f.

296 **Mines-Ponts MP 2018**

Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$?

297 **CCINP PC 2022**

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose :

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité

$$v_{n+p-1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right)$$

   et en déduire l'encadrement

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \exp(2^n \ell)$ et $s_n = t_n - u_n$.
4. Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
6. En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

298 **CCINP MP 2024**

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction arcsin.
2. Jusitifier que la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ f(x) = (\arcsin(x))^2$$

   admet un développement en série entière.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.
4. En déduire le développement en série entière de f.

299 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1,\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie, puis que la série $\sum a_n^{-2}$ converge.

300 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

2. Soit $a > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0\,;a] \to [0\,;a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0\,;\varepsilon]$.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (c) Trouver un équivalent en 0 de $(f(x))^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand $x \to 0$.

   (d) En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

   (e) Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

301 **Mines-Télécom MP 2018**

Déterminer si la série de terme général

$$\frac{1}{\ln(n)\ln(\cosh(n))}$$

converge.

302 **Mines-Ponts MP 2023**

On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x+2y+3z=n$.

On pose $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que G est définie pour $|t|<1$ et qu'on a :
$$\forall t \in]-1\,;1[,\ G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$
2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

303 **Mines-Ponts PC 2023**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+10^{-2^k}\right)$.

304 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation :
$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}.$$

1. Montrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que u_n et v_n vérifient (E_n), et pour n assez grand, $0 < u_n < \mathrm{e} < v_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? On note ℓ sa limite.
3. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

305 **CCINP PC 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$a_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = a_{n+1} - a_n.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} D_n$ converge.

306 **CCINP PC 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_0 > 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Montrer que la suite est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

307 **Mines-Télécom MP 2021**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série suivante :
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+4n-1}{(n+2)n!} x^n.$$

308 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Montrer qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Soit $f \in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

309 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \tan\left(\frac{n\pi}{5}\right) z^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.
2. Soit $a = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Exprimer $\tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ en fonction de a, pour $n \in \{2;3;4\}$.
3. Simplifier $S_{5N}(z)$ pour $|z| < R$.
4. Calculer S sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

310 **Mines-Ponts MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.
2. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

311 **X MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ et $u_{n+1} = \tanh(u_n)$.

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Trouver un équivalent de u_n.

312 **Mines-Ponts MP 2017**

Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ et $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n^2}{1+u_n^2}$.

313 **CCINP PSI 2019**

1. Soit $t \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. Montrer que :
$$\Big|\ln(1+t)-t\Big| \leqslant 2t^2.$$
2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :
$$f_n(x)=\ln\left(1+\frac{(-1)^n x}{n^2(1+x^2)}\right) \quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

314 **CCINP PSI 2019**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose :
$$I_n(x)=\int_0^x \frac{1}{\cosh^n(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?
3. (a) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   (b) Utiliser cette relation pour calculer :
$$I=\int_0^{\ln(2)} \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^3(t)}\,\mathrm{d}t.$$

315 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2-u_n)=0$.
Que peut-on dire des affirmations suivantes ?

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^3-u_n)=0$

316 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0=a$, $x_1=b$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+2}=\min(3-x_{n+1};2x_n-2).$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins un terme négatif.
3. En déduire le caractère non borné de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

317 **Mines-Ponts MP 2019**

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+m)!}$.

318 **Mines-Ponts MP 2012**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{e}^{n\sin(n)} z^n$.

319 **Mines-Ponts MP 2014**

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}\right)\ ?$$

320 **Mines-Ponts MP 2014**

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) - \ln(n)}{k - n}.$$

321 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_{1,1}; \dots; a_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} z^k.$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$.

322 **Mines-Ponts MP 2016**

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = U_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = U_{n+1} + (n+1)U_n.$$

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \frac{x^n}{n!}.$$

1. Expliciter f et en déduire U_n pour tout n.
2. Comparer U_n et $V_n = \mathrm{Card}(\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = \mathrm{Id}\})$, où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1; \dots; n\}$.

323 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante telles que $u = v + w$.

324 **Mines-Ponts MP 2016**

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

325 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

326 **Mines-Ponts MP**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive, strictement croissante et non bornée. Montrer que si la suite $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, alors (*théorème de Stolz*) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

2. Déduire, à partir du théorème de Stolz, le lemme de Cesàro.
3. En utilisant le théorème de Stolz, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

4. (a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) Soit $\lambda \in]-1\,;1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - \lambda a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{a}{1-\lambda}$.

327 **Mines-Ponts MP 2022**

Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions :

$$(u_1; v_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) v_n \\ v_{n+1} = v_n - \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

328 **X MP 2018**

Soit $x \in [-\pi\,;\pi]$. Montrer que

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

vaut x^2.

329 **Mines-Ponts MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On pose $\omega(n) = \min\left(\{p \in \mathbb{N}^* \mid H_p \geqslant n\}\right)$.
Donner une équivalent de $\omega(n)$.

330 **X ESPCI 2017**

1. Trouver la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, avec $x_0 \in]0\,;1[$.
2. Donner un équivalent de $x_n - 1$ quand $n \to +\infty$.

331 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Soit $\theta \in]0\,;\pi[$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta)x^k$.
   Montrer par l'absurde que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.

332 **X PC 2019**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs réelles, et convergeant uniformément sur I. On pose :

$$g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

333 **CCP MP**

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ un série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

334 **ENSEA/ENSIIE MPI 2024**

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$, puis calculer sa somme pour $x \geqslant 0$.

335 **CCP MP**

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a\,;+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0\,;+\infty[$.

336 **CCP MP**

1. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est bornée et que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers g. Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

337 **CCP MP**

1. Soit a et b deux nombres réels donnés avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a\,;b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

338 **CCINP MP 2025**

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)$, où x est un nombre réel.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f avec la condition $f(0) = 0$.
3. Déterminer le développement en série entière de f.

339 **CCP MP**

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A$$

$$\Downarrow$$

$$\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   (a) Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;+\infty[$? Justifier.

340 **CCINP MP 2025**

On pose $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geqslant 2$ entier :

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$(n+1)d_n = nd_{n-1} - d_{n-2}.$$

3. En déduire une information sur le rayon de convergence de $\sum d_n x^n$.
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. On admet que f vérifie l'équation :

$$(E) : (1-x)f'(x) - xf(x) = 1.$$

   Montrer que $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. En déduire une expression de d_n en fonction de n.

341 **Mines-Ponts MP 2025**

1. Décomposer X^4+1 en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que $X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^4+1}$.
3. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

342 **CCINP MP 2025**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1} n!$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
   Montrer que f est solution de l'équation $f' = f^2$ sur un intervalle à préciser.
3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
4. Exprimer u_n en fonction de n.

343 **CCINP MP 2025**

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.
   On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et on suppose que $\sum a_n$ converge.
   Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$:
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k).$$
3. En déduire que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

344 **Mines-Télécom MP 2025**

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n^2 \cos(x) \sin^n(x).$$

345 **CCINP MP 2025**

On pose $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ entier, $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k}$.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et on note $R > 0$ son rayon de convergence.

1. Montrer que pour tout $x \in]-R\,;R[$, $f^2(x) = f(x) - x$. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. Préciser R.
3. Développer $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. En déduire que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

346 **CCINP PSI 2017**

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
4. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

347 **Centrale-Supélec MP 2017**

1. Rappeler le théorème d'interversion de lim et $\sum$ pour les séries de fonctions (ou théorème de la double limite).
2. On admet que :
$$\frac{\pi x}{\tan(\pi x)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, où $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

348 **X MPI 2023**

Soit $f : [0\,;+\infty[\to [0\,;+\infty[$ continue strictement croissante. Montrer que :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \text{ converge} \iff \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \text{ converge.}$$

349 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^n}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)$.

350 **CCINP PSI 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2x^2} \end{array}$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. Étudier la convergence uniforme de f sur $[\alpha\,;1]$, où $\alpha \in]0\,;1[$, puis sur $[0\,;1]$.

351 **X MP 2017**

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Que dire de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

352 **Mines-Ponts PSI 2022**

On pose :

$$\forall x > 0,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis déterminer un équivalent.
3. Déterminer la limite de S en 0.

353 **CCINP PSI 2022**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

354 **TPE/EIVP PC 2018**

Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

355 **CCINP PC 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) : x\sqrt{1 + \frac{x}{n}} = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution strictement positive, notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

356 **Mines-Télécom MP 2024**

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
2. Donner une valeur approchée de π à 10^{-10} près.

357 **Mines-Ponts MP 2022**

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

358 **CCINP MP 2022**

1. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe C^{n+1}.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite notée ℓ.
3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

359 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

360 **ENS MP 2021**

Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

361 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! \theta_n \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right],\ u_{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta_n)},$$

   puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}.$$

2. Déterminer θ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis trouver un équivalent de u_n.

362 **Mines-Télécom MP 2022**

Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

363 **CCINP PC 2024**

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_k(x) = \frac{k^2}{k^2+1} x \exp(-kx).$$

1. Montrer que la série de $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

364 **CCINP MP 2017**

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers 0.

1. Déterminer la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $U_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On admet que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\right).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0.$$

3. La série $\sum_{n\geqslant 2} \ln(U_n)$ est-elle alternée ? Satisfait-elle les conditions permettant de dire que la série converge ?
4. Donner le développement en série entière de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln(U_n)$.

365 **Centrale-Supélec TSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Étudier la nature de la série $\sum v_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer la valeur de c, en utilisant $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

366 **X**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

367 **X MP MPI 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle majorée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

368 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$. On pose :

$$\forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

2. Montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}$.

369 **Mines-Télécom MP 2017**

On note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$, et on s'intéresse à $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$.

Montrer l'existence de cette somme puis la calculer.

Indication : on pourra introduire une série entière.

370 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\exp(\sqrt{k})$.

Donner un développement asymptotique à 2 termes de S_n.

371 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle bornée. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} = 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

372 **Centrale**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k u_k \underset{+\infty}{=} o(n)$.

373 **CCINP PC 2014**

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose $\theta(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ qu'on prolonge par $\theta(0) = 0$.

1. Montrer que θ est continue sur $]-\infty\,;1]$.
2. Soit $x \in [-1\,;1]$.
   (a) Montrer que $\theta(t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$.
   (b) On note $L(x) = \displaystyle\int_0^x \theta(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
3. (a) Montrer que $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
4. (a) Montrer que :
$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x).$$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

374 **Mines-Télécom MP 2017**

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$, pour θ réel fixé.

1. Démontrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer f', en déduire f.

375 **ENS MP 2017**

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$X_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}.$$

1. Si f est convexe, admet un unique zéro et f' ne s'annule jamais, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $f(x) = x^2 - a^2$ où $a \in \mathbb{R}$, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon X_0.
3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $X_0 = 0$, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Toujours pour la fonction f de la question 3, montrer l'existence de deux intervalles tels que si X_0 appartient à l'un de ces deux intervalles, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

376 **ENS**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

On suppose que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge.

377 **ENSEA/ENSIIE MP 2017**

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur tout segment inclus dans $[0\,;+\infty[$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?
3. Utiliser une autre méthode pour montrer la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

378 **CCINP MP 2018**

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2+n}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_S de S.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur D_S.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$\ln(1+x^2) - \ln(x^2) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x^2) - \ln(x^2) + \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0^+.

379 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\sin(\sqrt{n}\pi)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{t}\pi)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\sum v_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

380 **CCINP PC 2019**

Soit E_λ l'ensemble des suites de réels strictement positifs, vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Notons :

- si $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $v_0 = 1$,
- si $n \geqslant 2$, $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ et $w_0 = w_1 = 1$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E_\beta$.
2. (a) Montrer que :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).$$

   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\geqslant 2} \in E_\lambda$ pour un certain λ à préciser.
3. (a) Donner la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Donner la nature de $\sum w_n$.
4. Soit $\lambda > -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$. On pose $\beta = \dfrac{1-\lambda}{2}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

   En déduire la nature de $\sum u_n$.
5. Soit $\lambda < -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$. Déterminer la nature de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
6. Que se passe-t-il pour $\lambda = -1$?

381 **Mines-Ponts MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\langle n\rangle$ l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\langle n\rangle} + 2^{-\langle n\rangle}}{2^n}.$$

382 **Mines-Ponts MP 2018**

On note $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

383 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier la nature de la série $\sum u_n$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(\mathrm{e}^{u_n} - u_n).$$

384 **CCINP PC 2018**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n > 0$. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge.

385 **CCINP PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer par une intégration par parties que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. (a) Montrer que :

$$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

   (b) Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.
4. On définit la fonction f par :

$$f : x \in \left]0; \tfrac{1}{2}\right[\longmapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}.$$

   Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left[0\,; \tfrac{1}{2}\right]$.
5. Donner un équivalent de u_n.

386 **Mines-Télécom PC 2018**

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n.$$

387 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan(x)\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

388 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt[4]{n}}.$$

389 **Mines**

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t) \cos^n(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Étudier la nature de $\sum u_n(\alpha)$ en fonction de α.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

390 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{1}{1+n^2t^2}$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\phi_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment.

391 **Mines-Ponts MP 2014**

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) - \ln(n)}{k-n}.$$

392 **CCINP PC 2016**

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$$

   et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que

   $$\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$$

   converge. Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.
3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $\dfrac{u_0(b-1)}{b-1-a}$.

393 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit f_0 une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g = \sum_{n \geqslant 0} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la calculer en fonction de f_0.

394 **CCINP MP 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}.$$

1. Montrer que :
$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\ell} + \sqrt{2\ell - 1}}.$$
2. En déduire que $u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$.
Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.
5. Trouver la nature de $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$.

395 **Centrale-Supélec MP 2023**

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir la continuité par morceaux de f sur I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
Dessiner le graphe de f_n pour un n choisi. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers une certaine fonction g, mais que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \neq \int_{\mathbb{R}_+} g.$$
3. Énoncer le théorème de la convergence dominée et le prouver avec l'hypothèse supplémentaire de convergence uniforme sur tout segment de I.

396 **Mines-Télécom MP 2017**

Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) x^n$$

et la limite de sa somme aux bornes de l'ensemble de définition.

397 **Mines-Ponts PC 2022**

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$, à valeurs réelles en prenant $f_0 : x \mapsto 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;1],\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$, prouver l'encadrement :

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction f.

398 **CCINP MP 2023**

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;1]$, puis démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

399 **Mines-Ponts PSI 2015**

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

400 **ENS MP 2019**

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supérieure à toute série entière réelle en $+\infty$?

401 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)^{n\ln(n)}}.$$

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

402 **Mines-PSI 2016**

On pose $f_n(x) = x|\ln(x)|^n$ pour $x \in]1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme.

403 **Mines-Ponts PC 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive de limite nulle. On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)^a_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s\,;+\infty[$ ou $]s\,;+\infty[$.
2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s\,;+\infty[$.

404 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$ ait un rayon de convergence supérieur à un. On pose $a_1 = 1$ et on suppose que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $B(0,1)$.

1. Soit $z \in B(0,1)$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in B(0,1)$. On suppose que $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f(z)) \geqslant 0$.

405 **Mines-Ponts MP 2015**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que constate-t-on ?

406 **Centrale-Supélec MP 2016**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k}\right).$$

1. Rappeler le théorème de sommation des relations de comparaison.
2. Montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

407 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \cos(n^\alpha t^2)\,\mathrm{d}t$.

408 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(n^a u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ et en déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}.$$

Conclure sur la nature de la série de terme général u_n.

409 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[, \mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{n}{x}\left(f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) \end{array}$$

1. Montrer la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On se place dans des cas particuliers.
   (a) *Cas* $f = \ln$: montrer la convergence uniforme.
   (b) *Cas* $f = \sin$: montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que f est de classe C^2 et que $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$.

410 **X-ENS**

Soit a et x deux nombres réels. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(an)}{n} x^n.$$

411 **CCINP PSI 2017**

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n \to +\infty$.

412 **Mines-Télécom MP 2017**

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

413 **X 2023**

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et pour $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}.$$

Trouver un équivalent de a_n et majorer la constante qui y apparaît.

414 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit a, b, c trois nombres complexes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = a^n + b^n + c^n$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Montrer que $\ell \in \{0; 1; 2; 3\}$.

415 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On considère les deux propositions suivantes :

- (P_1) : $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- (P_2) : $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge

Trouver les implications entre (P_1) et (P_2).

416 **Mines-Ponts MP 2018**

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

Étudier cette suite de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment).

417 **Mines-Ponts PC 2022**

Développer la fonction arccos en série entière sur $]-1\,;1[$.
Ce développement est-il valable sur $[-1\,;1]$?

418 **CCINP PSI 2022**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions sur $[0\,;1]$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1\,;1],\ f_n(x) = \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction F que l'on exprimera.
2. Montrer que, pour tout $a \in]0\,;1[$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a\,;1]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1\,;1]$?
4. Comparer éventuellement la limite de $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ en $+\infty$ et $F(0)$.

419 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière dont f est la somme ?
2. Si existence, donner la valeur de $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

420 **Mines-Télécom PSI 2019**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{\sqrt{2n+n^2}} x^{2n}.$$

421 **Mines-Télécom PSI 2019**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. Calculer I_0, I_1, $I_n + I_{n+1}$.
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme.

422 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^n \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. On note f la somme de la série.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^1.
3. Donner un équivalent de f en 1^-.

423 **CCINP PSI 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à définir.
2. On considère la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées. Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[-1\,;1]$.

424 **CCINP PSI 2015**

Soit $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

1. Quel est le domaine de convergence de la série des $u_n(x)$?
2. On note $S(x)$ la somme. Montrer que la fonction S est de classe C^1.

425 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive de limite nulle, telle qu'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$a_{n+1} - a_n \sim -\lambda a_n^\alpha.$$

Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.
Indication : on pourra considérer $a_{n+1}^\beta - a_n^\beta$ pour β bien choisi.

426 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux *familles sommables* complexes, i.e. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ (et de même pour b).

1. On note
$$\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$$
et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$(a\star b)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}.$$
Montrer que $a\star b$ est bien définie, sommable et que :
$$\|a\star b\|_1 \leqslant \|a\|_1\|b\|_1.$$
Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ sommable. On pose, pour $z \in \mathbb{U}$,
$$F_a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$
Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.
3. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ telle que pour toute famille $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$, $a\star e = e\star a = a$.
4. Soit $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ sommable et inversible pour $\star$. Montrer que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$.
5. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille à support fini et à valeurs complexes telle que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$. Montrer que a est inversible pour $\star$.

427 **Mines-Ponts MP 2015**

Développer en série entière en 0 la fonction $t \mapsto \arctan(1+t)$.
Indication : considérer la dérivée, et passer dans $\mathbb{C}$.

428 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

   Soit N un entier naturel et x un réel tel que $|x| < 1$.

2. Simplifier $\prod_{n=0}^{N} \left(1 + x^{2^n}\right)$.
3. Expliciter f.

429 **CCINP PC 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On pose $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, dite *dérivée* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, divergente vers $+\infty$, telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

On pose $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$.

1. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. (a) Trouver un équivalent de $\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1$ puis déterminer la limite de $\Delta \exp(\alpha_n)$.
   (b) Montrer que $\exp(\alpha_n) \sim n$.
3. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

430 **ENSEA/ENSIIE**

On considère, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

431 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{[n;n+1]} |f'|.$$

2. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$?

432 **Centrale MP**

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}{n^{\frac{2}{3}}} \; ?$$

433 **X MP/PC 2024**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[,\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ont même nature.

434 **Mines-Télécom PC 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x^n)}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La convergence est-elle uniforme ?

435 **TPE/EIVP MP 2015**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$\sin\left(\frac{\exp(2x)}{n+\exp(x)}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite sur un segment $[a\,;b]$.
4. Étudier la suite $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

436 **Mines-Ponts MP 2015**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \mathrm{e}^{nx_n} = 1$.
2. Étudier l'existence et la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est-elle convergente ?
4. Donner un équivalent de x_n.

437 **ENS**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

438 **Mines-Ponts MP 2015**

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{an+b}\right)^{n\ln(n)}$$

selon la valeur des réels strictement positifs a et b.

439 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-x^3t^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

440 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λ.

441 **TPE/EIVP MP 2018**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

1. Montrer que S est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$ et en 0.

442 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(n-k)!} = 1.$$

1. En considérant la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, calculer u_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

443 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. On suppose que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de A_n.
2. On suppose que $A_n \sim 2\sqrt{n}$. A-t-on $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$?
3. On suppose en outre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. Montrer que :

$$\frac{A_{\lfloor \beta n\rfloor} - A_n}{\lfloor \beta n\rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{A_{\lfloor \alpha n\rfloor} - A_n}{\lfloor \alpha n\rfloor - n}.$$

Conclure que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

444 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers a et b. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

445 **Centrale-Supélec MP 2014**

On considère une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Pour x réel convenable, on introduit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière, puis donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est croissante sur $[0\,;1[$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
3. On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{n} = +\infty$. Soit A un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $x \in [0\,;1[$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \frac{x^{An_0}}{1-x^A}.$$

4. Avec la même hypothèse, prouver que :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = 0.$$

5. On suppose maintenant que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)f(x) = 0$. En étudiant $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{p_n}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{n} = +\infty$.

446 **x**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^2-k}.$$

Montrer que :

$$a_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

447 **Mines-Ponts MP 2016**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.$$

2. En déduire un équivalent v_n de u_n, puis un équivalent de $u_n - v_n$.

448 **x**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : &]n\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} \end{array}$$

Soit $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel, noté x_n, tel que $f_n(x_n) = a$.
2. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

449 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}$ converge et que la limite vaut :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \int_0^1 \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge et déterminer sa valeur.
3. Même question pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ lorsque $\theta \in]0\,;\pi[$.

450 **CCINP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x^2 \exp\left(-\frac{\sin(x)}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

451 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout réel x, on pose $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, la partie décimale de x.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \ln(k)}.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?

452 **CCINP MP 2017**

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(\sin(x))^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

453 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? Si oui, trouver sa limite.

454 **CCINP PC 2014**

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)=0.$$

455 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs positives telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Montrer que :

$$x>\frac{1}{2}\implies \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^x}\text{ converge.}$$

Donner un contre-exemple pour $x=\frac{1}{2}$.

456 **Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0\,;1],\ g_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x g_n(1-t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|g_{n+1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty.$$

2. On pose :

$$G : x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x).$$

Montrer que G est bien définie sur $[0\,;1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G.

3. En déduire l'expression de G.

457 **CCINP MP 2017**

Soit $f : [1\,;\mathrm{e}[\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1\,;\mathrm{e}[$.
On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$f_n(t)=\begin{cases} t^{\frac{1}{n}}f(t) & \text{si } t\in\left[1\,;\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right[\\ 0 & \text{si } t\in\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,;\mathrm{e}\right[\end{cases}$$

1. Montrer, en justifiant très précisément, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[1\,;\mathrm{e}[$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

458 **CCINP PSI 2017**

On pose :

$$u_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \exp(-nx^2).$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) sur $[0\,;+\infty[$;
   (b) sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

459 **CCINP PC 2017**

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. Notons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi b_n x).$$

1. Montrer que la série définissant f converge normalement sur $[0\,;1]$.
2. Montrer que f est définie et continue sur $[-1\,;1]$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que
$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
converge et déterminer sa limite.
5. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\mathrm{i}b_n\frac{k}{N}\right)$$
vaut N si N divise b_n et 0 sinon.
Notons $I_n = \{n \in \mathbb{N}^* \mid N \text{ divise } b_n\}$.
Montrer que $S_N = \displaystyle\sum_{n\in I_N} a_n$.
6. On choisit $b_n = n!$ et $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geqslant N\} \subset I_N$, puis que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} NS_N = +\infty$.

460 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout entier n, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right)\,?$$

461 **X**

Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

462 **CCINP MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(1+\mathrm{e}^{-nx}) \end{array}$$

1. Vers quelle fonction la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
3. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x.$$

463 **Mines-Ponts MP 2018**

Donner un développement asymptotique à l'ordre 3 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

464 **CCINP PC 2021**

On considère une application $f_0 \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.
2. (a) Montrer que f_1 est de classe C^1 et déterminer f_1'.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n.
   On admet provisoirement la propriété suivante :
$$\forall a>0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in [-a\,;a],\ |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$
3. (a) Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $F' - F = f_0$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
5. Prouver la propriété admise.

465 **Mines-Ponts MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$.

466 **CCINP MP 2018**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-\beta}$ et $b_n = \dfrac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = -R$ et $x = R$.

467 **X 2014**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{x_{n+1}}{2} = 1.$$

Montrer la la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

468 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Trouver a, b et c tels que $I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

469 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $]-1\,;+\infty[$. Démontrer l'équivalence entre les propriétés :

i) $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0$

ii) $\mathrm{e}^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$

470 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R, telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout p ?

471 **CCINP PC 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. (a) Rappeler le théorème de Cesàro.
   (b) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :
   $$\lim_{n\to+\infty}(w_{n+1}-w_n) = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$
   Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n$.
3. On pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent simple de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

472 **Centrale-Supélec 2012**

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de limite nulle, alors les séries $\sum a_n$ et $\sum(a_n + a_{n+1})$ sont de même nature. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose pas que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$?

473 **X 2011**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}.$$

Calculer la limite de cette suite.

474 **Mines-Télécom PSI 2025**

Étudier la nature de la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

475 **ENS PC 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est convergente.

On suppose que la suite $\displaystyle\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note sa limite s.

On pose $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\displaystyle B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que la suite $\displaystyle\left(\frac{A_n}{B_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

476 **CCINP MP 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive qui converge vers 0. Pour $x \in [0\,;1]$, on note $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série.
   Indication : on pourra majorer les restes en calculant la somme de $k = n+1$ à $+\infty$ de x^k.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
5. Étudier la convergence normale de la série.
   Indication : on pourra calculer la norme infinie de u_n.

477 **Mines-Télécom MP 2023**

Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

478 **Mines-Ponts PSI 2025**

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que :

$$\forall n \neq m,\ |z_n - z_m| \geqslant \sqrt{2}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On note $M(z_n) = (x_n; y_n)$ pour $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ et

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid M(z_n) \in [-A; A]^2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est fini.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.

479 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $\varepsilon = (\varepsilon_0; \dots; \varepsilon_{n-1})$ de $\{0,1\}^n$, on pose :

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k.$$

1. Montrer que Φ est injective et déterminer son image.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n : x \longmapsto \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right).$$

   Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]-1\,;1[$ et préciser sa limite simple.

480 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R.
On pose $f_n(x) = a_n x^n$.

1. Montrer la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[-r\,;r]$ pour $0 < r < R$.
2. En déduire la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Rappeler le développement de la fonction arctan en 0.
   Montrer qu'il reste valable en 1.

481 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité :
$$\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right).$$
3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.
4. Démontrer la relation $v_n = n\ln(n) - n + o(n)$.
5. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

482 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n x_n$ converge.

1. On suppose, uniquement dans cette question, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$
2. Expliquer l'analogie entre transformation d'Abel et intégration par parties.
3. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$
   (Dans le cas général cette fois.)
4. La décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle nécessaire au résultat précédent ?

483 **CCINP PC 2019**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{nt}).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que, pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1 + x) \leqslant x$.
3. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = \ln(2)$.

484 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

Soit $h \in C\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et $f_n : h(x)\sin^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

485 **Centrale**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n^2+n}$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leqslant b$.

   Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{b^2n^2+2an}$.
3. Montrer que tout élément de $[0\,;1]$ est la limite d'une certaine sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

486 **X-ENS**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes toutes définies sur un même intervalle ouvert I, et à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f.

487 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + u^n}\,\mathrm{d}u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\phi)}{1 + \phi}\,\mathrm{d}\phi$.

1. Calculer $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
2. Calculer J après avoir montré son existence.
3. Trouver $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

488 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
2. Quel est le lien entre f et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\sqrt{x}\sin(t)}\,\mathrm{d}t$?

489 **CCINP PC 2018**

On considère la série entière $\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$.
Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

490 **ENS MP Cachan/Rennes 2017**

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[0\,;\pi]$:
$$\sin(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{x}{\pi}.$$
On admet que pour q appartenant à $\mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \leqslant \frac{1}{(q+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
2. Montrer qu'il existe C appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in [0\,;\pi],\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{x} \leqslant C.$$
On pose pour tout x appartenant à $[0\,;2\pi]$:
$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{et si } k \in \mathbb{N}^*,\ n_k = 2^{k^3} \text{ et finalement :}$$
$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sin(n_k x)q_{n_k}(x)}{k^2}.$$
3. Montrer que S_m converge vers une fonction f continue sur $[0\,;\pi]$.
4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos(px)S_m(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite quand m tend vers $+\infty$, notée $A(p)$.
5. Calculer $A(p)$.

491 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

492 **CCINP PC 2022**

Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction suivante :

$$u_n \ : \ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+n)-f(n) \end{array}$$

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque $\sum u_n(x)$ converge.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = f(N+1) - f(1).$$
En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Dans cette question, on prend pour f la fonction
$$x \longmapsto \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$
Montrer que $F(1)$ existe.
3. Dans cette question, on prend pour f la fonction
$$x \longmapsto \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\right).$$
Montrer que $F(1)$ n'existe pas.
Indication : on pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

493 **CCINP PSI 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Montrer que la somme S est de classe C^1.
3. Calculer $S(1)$.

494 **X 2013**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique x_n réel qui est solution de l'équation $xe^x = n$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent de x_n.

495 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant s} \binom{n}{s} x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Calculer sa somme $S(x)$.

496 **CCINP**

Soit $(p; q) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer, pour $(p; q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{p,q}$.
2. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n}$ est-elle convergente ou divergente ?
3. Donner le domaine de définition réel de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n} x^n$.

497 **ENS PC 2023**

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sin(2n!\mathrm{e}\pi))^\alpha.$$

498 **Mines-Ponts**

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{z^k}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|P_n(z)| \leqslant P_n(-|z|)$. En introduisant un logarithme, en déduire que la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. En étudiant la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{n+1}(z) - P_n(z)$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit :

$$f : z \longmapsto \lim_{n \to +\infty} P_n(z).$$

3. Montrer que f est continue en 0.
4. Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (1-z) f\left(\frac{z}{2}\right) \text{ et } f(0) = 1.$$

5. Montrer que f est développable en série entière.

499 **Mines-Ponts PC 2013**

Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-n^3) \int_0^n \exp(t^3)\,\mathrm{d}t.$$

500 **X MP 2019**

Pour tout $x \in]-1\,;1[$, on pose :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

1. Montrer que P est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(n) x^n,$$

où $p(n)$ représente le nombre de façons d'écrire n comme une somme d'entiers naturels.

3. Montrer que pour x tendant vers 1 par valeurs négatives,

$$P(x) = \exp\left(\frac{\zeta(2)}{1-x}(1+o(1))\right),$$

où $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

501 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^4)^n}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad h_n(x) = a_n x^{2-4n}.$$

3. En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$.

502 **Mines-Télécom PSI 2025**

Trouver la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

503 **Mines-Ponts MP 2025**

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0, la suite définie par

$$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$

est-elle croissante ?

504 **Mines-Ponts PC 2025**

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$u_n \;:\; \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^n(x)\cos^\alpha(x) \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I.
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

505 **Mines-Ponts MP 2025**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in \left]0\,;1\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

506 **Mines-Télécom MP 2022**

Trouver la nature de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos\left(n^2\pi\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

507 **CCINP PSI 2022**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.
2. Définir par récurrence deux suites de nombres naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p_n}{q_n}$$
et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.
3. Trouver une expression de u_n en fonction de n.

508 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}.$$

1. Montrer que, si $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $\alpha = 1$?

509 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

510 **Mines-Télécom MP 2017**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$

1. à l'aide d'un développement limité ;
2. en étudiant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$;
3. en montrant que le critère des séries alternées s'applique.

511 **X MP 2017**

On admet l'énoncé suivant :

Pour tout réel α, s'il existe une suite de rationnels $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\varepsilon_n}{q_n}$ avec $\varepsilon_n = o(1)$, alors α est irrationnel.

Soit la suite de terme général $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$ est irrationnel.

512 **CCINP PSI 2016**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer l'existence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$.

513 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

514 **Mines-Télécom 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que f est continue, puis qu'elle est C^∞.
3. Étudier la croissance de f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Trouver un équivalent simple de f en 0.

515 **Mines-Télécom MP 2019**

1. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On pourra regrouper les termes deux à deux dans la somme partielle.
2. Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

516 **ENS MP 2014**

On note $\mathcal{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$ et f ne s'annule en aucun autre point. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients complexes qui converge uniformément vers f. Montrer que pour tout réel r strictement compris entre 0 et 1, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N, le polynôme P_n admet une racine dans $B(0,r)$.

517 **ENS MP 2023**

On admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que :

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor.$$

518 **CCINP PC 2013**

Soit $I =]0\,;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I. On note S la somme associée.
2. (a) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Montrer que la série converge normalement sur $[a\,;b]$.
   (b) En déduire la continuité de S.
3. Montrer que S est dérivable sur I, et que l'on a :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}$$

4. (a) Montrer que :

$$\frac{p-1}{(n+1)(n+p)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p}.$$

   (b) En déduire que $S(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

519 **X-ENS Cachan PSI 2019**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, de limite nulle, et $\alpha > 1$.
On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}^*.$$

L'objectif est de montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha < 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang N.
2. Soit $\alpha < 2$.
   À l'aide de l'inégalité suivante (que l'on justifiera) :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t,$$

   montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha}$ converge. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
3. Soit $\alpha \geqslant 2$.
   Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ diverge et en déduire que la série de terme général u_n diverge également.

520 **Mines-Ponts MP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme :

$$Q_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

1. Déterminer les racines de Q_n.
2. Démontrer alors que celui-ci s'écrit :

$$Q_n = X\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

3. En déduire que, pour tout x réel,

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

521 **Mines-Télécom MP 2024**

Pour $n \geqslant 3$ entier, on considère l'équation suivante :

$$(E_n) : \mathrm{e}^x = x^n.$$

1. Montrer que (E_n) admet deux solutions $\alpha_n < \beta_n$.
2. Trouver la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Donner un équivalent de β_n.
4. Donne un développement à deux termes de β_n.

522 **Centrale**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

523 **X ESPCI PC 2017**

On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante positive. Montrer que :

$$\sum A_n \text{ converge } \iff A_n = o\left(\tfrac{1}{n}\right) \text{ et } \sum n(A_n - A_{n+1}) \text{ converge.}$$

524 **X MP 2022**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)}{\sqrt{1-x}}.$$

On sait que f est développable en série entière et on peut écrire $f(x) = \sum c_n x^n$.
Montrer que $c_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi n}}$.

525 **Centrale-Supélec PC 2019**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k).$$

1. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{k^\beta} = \frac{S_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) - 1.$$

   (b) Montrer que la série de terme général $U_n = \dfrac{\cos(n)}{n^\beta}$ converge.

2. Soit $\alpha > 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général

$$V_n = \sqrt{n^\alpha + \cos(n)} - n^{\frac{\alpha}{2}}$$

   converge.

526 **CCINP MP 2023**

Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ entier :

$$\int_1^n (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

3. Pour $x \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.
4. Déterminer un équivalent de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant 2}$ et en déduire la nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

2 Continuité et dérivabilité

527 **Mines-Ponts**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P' + \alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

528 **ENS Ulm**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P > 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$ avec $n = \deg(P)$. Montrer que $Q > 0$ sur $\mathbb{R}$.

529 **Mines-Ponts**

Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.

530 **X PC 2020**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose $f' \geqslant 0$ et $0 \leqslant f'' \leqslant f$.
Montrer que $f' \leqslant f$.

531 **Mines-Ponts MP**

Soit $a < b$ deux nombres réels et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a\,;b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f. Montrer que $(\min(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\min(f)$ et que $(\max(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\max(f)$.

532 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}\arctan(x)$.

1. La fonction f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Le cas échéant, donner une équation de cette droite.
2. Étudier les variations de f.

533 **Mines-Ponts**

Soit $a \in]0\,;1]$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est égale à sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(ax)$.

534 **Mines-Télécom MP**

1. Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$.
2. Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ croissante. Montrer que la fonction f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0\,;1]$ tel que $f(x) = x$.
   Indication : on pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) < x\}$.

535 **Mines-Télécom MP**

Soit f et g deux fonctions de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$, continues et vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0\,;1]$ tel que $g(a) = a$.
2. Supposons que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) > g(x)$.
   Montrer que la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

536 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit f et g deux fonctions appartenant à $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ g$ est strictement décroissante.

1. Montrer que $f \circ g$ admet un unique point fixe.
2. Montrer que $g \circ f$ admet un unique point fixe.

537 **X-ENS**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout segment $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, $f([a\,;b])$ est un segment, et $f^{-1}(\{x\})$ est un fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

538 **CCP**

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une application f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a\,;b]$. Montrer que f est continue en x_0.
2. On pose, pour tout $x \in [0\,;1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

539 **CCP**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a\,;b]$ et que f est dérivable sur $]a\,;x_0[$ et sur $]x_0\,;b[$. Démontrer que si la fonction f' admet une limite en x_0, alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication
   $$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$
   est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

540 **X PC 2009**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f est infini.

541 **CCP**

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée dans la question précédente.

542 **X PC 2019**

Soit f une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t un nombre réel. Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x+t) = f(x)$.

543 **X-ENS 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle $C^1, C^2, \ldots$?

544 **Petites Mines 2015**

Soit $f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0\,;1[$ tel que $f'(c) = 0$.

545 **X-ENS 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f, C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que les coefficients de la série de Taylor de f sont des nombres rationnels.

546 **CCP 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est prolongeable en une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

547 **Centrale 2015**

Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]0\,;1[$.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe sur $]0\,;1[$.

548 **CCP MP**

On désigne par $C([0\,;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0\,;1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est nulle sur l'intervalle $[0\,;1]$.

549 **CCP 2016**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f.
3. Préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $f(D)$.

550 **ENS Ulm**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g. Montrer que g est continue.

551 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = M(x)^T M(x)$$

   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $A : \mathbb{R} \to A_n(\mathbb{R})$ une application continue et $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1, solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

552 **X-ENS**

1. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $T = \{(x;y) \in I^2 \mid x < y\}$. On considère deux couples $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ appartenant à T. Pour $t \in [0\,;1]$, on pose $u(t) = (1-t)x_1 + tx_2$ et $v(t) = (1-t)y_1 + ty_2$.
   Montrer que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $(u(t);v(t)) \in T$, et en déduire que f est strictement monotone.
2. Soit f dérivable sur I telle qu'il existe $(a;b) \in I^2$ vérifiant $f'(a)f'(b) < 0$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   Quel théorème peut-on ainsi montrer ?
3. Déterminer les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas, telles que $|f''| = f$.

553 **CCP 2017**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et celui de f'.
2. Calculer $f'(x)$. Conclure.

554 **Mines-Ponts PSI**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $e \in E$ et $T_e : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 e(t)f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.
Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.
Indication : considérer $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

555 **ENS MP MPI**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux.
Quels sont les points de continuité de f ?

556 **CCP**

On considère la série de fonctions $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Étudier le domaine de définition de la fonction S et sa continuité.
2. Montrer que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

557 **TPE/EIVP**

Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-a)^n(X-b)^n$. Donner une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de P et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ en fonction de n.

558 **Mines-Ponts PSI**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

559 **Centrale PC**

Soit $E = C^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]}|f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0\,;1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0\,;1] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+(n(x-\alpha))^2}}$.

   Montrer que la suite $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.
2. L'application $\Phi : f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_2$?
3. Existe-t-il un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

560 **X**

Existe-t-il une injection continue de $[0\,;1]^2$ dans $[0\,;1]$?

561 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

562 **Mines-Télécom PC 2022**

En appliquant le théorème des accroissements finis, prouver l'encadrement :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

563 **ENS MP 2017**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = 0$. Pourquoi a-t-on f constante sur $\mathbb{R}$?

564 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $k : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.

1. Montrer que k est prolongeable par continuité en 0.
2. La fonction k est-elle dérivable en 0 ? de classe C^1 en 0 ?
3. A-t-on d'autres informations sur k ?

565 **Mines-Ponts MP 2019**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{1+x^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable une infinité de fois en 0, et donner les expressions de ses dérivées successives en 0.

566 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction dérivable de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0\,;1], |f'(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

Montrer que f ne s'annule pas sur $[0\,;1]$.

567 **Centrale-Supélec**

Existe-t-il une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que f soit non monotone sur tout segment de $[0\,;1]$?

568 **CCINP PC 2018**

Soit

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x\sqrt{\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant |x|$.
   La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on désigne par g son prolongement.
3. Posons $T_f(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$. La fonction T_f a-t-elle une limite quand x tend vers 0 ?
   Indication : utiliser les suites définies par $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$.
4. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
5. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. La fonction f est-elle continue en $\frac{1}{k}$?
   Indication : prendre $I = \left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right[$ et $J = \left]\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right[$.
6. Étudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

569 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Montrer que la fonction h est prolongeable en une fonction de classe C^1 en 0.

570 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sinh(x)} - \dfrac{x}{\sin(x)} & \text{si } x \in]0\,;\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0\,;\pi[$. Calculer $f'(0)$.
2. La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $[0\,;\pi[$? Calculer $f''(0)$.

571 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant ax + b$.

572 **Mines 2023**

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est de classe C^∞.
2. On suppose que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$, et que $f''(0) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h^2 = f$.

573 **Mines 2023**

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et on considère $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-\alpha\,;\alpha]$:

$$f'(x)^2 \leqslant 2f(x)M(\alpha) \quad \text{avec} \quad M(\alpha) = \sup_{|t| \leqslant 2\alpha} |f''(t)|.$$

3. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\sqrt{f}$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

574 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{(k)} = \frac{f^{k+1}(0)}{k+1}.$$

575 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble de ses points de discontinuité. Montrer que l'on a $\mathfrak{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_n$, avec $\mathfrak{D}_n$ fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

576 **X MP 2017**

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell.$$

1. Montrer que $z \mapsto z^2$ et $z \mapsto \mathrm{e}^z$ sont $\mathbb{C}$-dérivables.
2. Montrer que $z \mapsto \overline{z}$ ne l'est pas.
3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On pose $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\tilde{f}(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = \Big(\mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y)); \mathrm{Im}(f(x + \mathrm{i}y))\Big).$$

   Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ si et seulement si :

$$\tilde{f} \text{ est dérivable en } z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0; y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0; y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0; y_0).$$

577 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

578 **ENS Lyon MP 2016**

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to +\infty} \Big(f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)\Big) = 0.$$

579 **Centrale-Supélec TSI 2023**

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de f.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_N tel que pour tout $x > 0$:

$$f^{(N)}(x) = P_N\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que f n'est pas développable en série entière autour de 0.

580 **ENS MP 2022**

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = -\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x).$$
3. Montrer que $f_{a,b}$ est α-*höldérienne*, c'est-à-dire :
$$\exists C > 0,\ \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et N, m deux entiers naturels non nuls. On pose $h = \dfrac{N}{b^n}$.
Calculer :
$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t)\,\mathrm{d}t.$$
5. Montrer que :
$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t)\,\mathrm{d}t \leqslant Ca^m.$$
6. Montrer qu'il existe un réel x_m tel que l'on ait :
$$|f_{a,b}(x_m) - f_{a,b}(x)| \leqslant \frac{Ca^m}{2}.$$
7. Que peut-on dire d'une fonction α-höldérienne avec $\alpha > 1$?
8. Montrer que $f_{a,b}$ est nulle part dérivable.

581 **Centrale-Supélec MP 2023**

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha \geqslant 2$ et $\beta \in]1\,;+\infty[$, on pose :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}.$$

1. Donner les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries de fonctions.
2. On suppose que $\alpha < \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\alpha \geqslant \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas dérivable en 0.
En déduire une condition pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit de classe C^k, mais non de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

582 **ENSEA/ENSIIE MP 2025**

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0 telle que $f'(0) = f(0) = 0$. On définit la fonction g telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.

583 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}.$$

1. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f sur l'intérieur de D_f.
5. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

584 **Mines-Ponts**

On dit qu'une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ admet une *corde horizontale de longueur* $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\exists x \in [0\,;1] \text{ tel que tel que } x+\ell \in [0\,;1] \text{ et } f(x+\ell) = f(x),$$

c'est-à-dire si la corde reliant les points $(x; f(x))$ et $(x+\ell; f(x+\ell))$ de la courbe représentative de f est horizontale.

1. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que f admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$ (*théorème de la corde universelle*).
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \neq \frac{1}{n}$, montrer qu'il existe une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et n'admettant pas de corde horizontale de longueur ℓ.
3. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet au moins n cordes horizontales de longueur multiple de $\frac{1}{n}$.
4. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et $g : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. On pose $L = g(1) - g(0)$. Montrer qu'il existe n paires $\{T_i; T_i'\} \subset [0\,;1]$ telles que :
$$f(T_i) = f(T_i') \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ |g(T_i) - g(T_i')| = k\left|\frac{L}{N}\right|.$$
5. Montrer qu'une courbe fermée du plan, continue, et tournant de façon monotone n fois autour d'un point, se recoupe au moins $n-1$ fois.

585 **TPE/EIVP MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

586 **Mines-Ponts PC 2015**

Un marcheur parcourt (continûment) 6 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe une demi-heure durant laquelle il parcourt exactement 3 kilomètres.

587 **Mines-Ponts**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue sur* I si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x;y) \in I^2,\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

1. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. Montrer qu'alors f est uniformément continue. (*théorème de Heine*)
2. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement uniformément continue ?
3. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ à valeurs réelles.
   (a) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

588 **Mines-Ponts PC 2024**

Déterminer une fonction f de classe C^∞ sur $]-\infty\,;1[$ telle que :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

589 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable différente de la fonction nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0\,;1],\ |f'(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

Montrer que la fonction f ne s'annule en aucun point de $[0\,;1]$.

590 **Mines-Télécom PC 2019**

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.
Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

591 **X MP 2022**

Soit f une fonction continue de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)=f(b)$.

1. Pour n entier supérieur à 2, montrer qu'il existe $(a';b')\in[a\,;b]^2$ tel que :
$$f(a')=f(b')\quad\text{et}\quad b'-a'=\frac{b-a}{n}.$$
2. En supposant de plus f dérivable sur $]a\,;b[$, en déduire le théorème de Rolle.
3. *Application :* soit $f : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer le nombre de points d'annulation de $f^{(n)}$.

592 **Centrale-Supéléc MP 2017**

Soit
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

593 **Centrale-Supélec PSI 2015**

On définit g sur $]0\,;1[$ telle que $g(x)=x^x$.

1. Trouver α réel tel que, en posant $g(0)=\alpha$, g soit continue sur $[0\,;1]$.
2. Donner la représentation graphique de g.
3. Expliciter l'allure de g en 0 et donner son minimum.
4. Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

594 **ENSAM PSI 2017**

On note $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$. Soit f définie sur D par :
$$\forall z\in D,\ f(z)=|\cos(z)|^2.$$

1. Montrer que f est bornée sur D.
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et de $\mathrm{Im}(z)$.

   On rappelle que $\cos(z)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D.

595 **CCINP PC 2016**

Soit $\phi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$. On admet le développement suivant :

$$\phi(x) = 1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

1. Calculer $\phi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.
2. On définit, par récurrence la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par :
$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$$
Calculer P_1, P_2 et P_3.
3. Montrer que $P_n \leqslant n!$.
4. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est différent de 0.
5. Prouver que $f'(x) = \exp(x) f(x)$.
6. En déduire le développement en série entière de ϕ.

596 **CCINP PSI 2017**

Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1 + nx^2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

597 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propositions suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

iii) La fonction f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$.

598 **X PC 2008**

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x + 3\sqrt{x}))}{\sinh(\tanh(2x + \sin(x)))}.$$

599 **Mines-Télécom PC 2019**

Montrer que $\arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \to 0^+$.

600 **CCINP PSI 2015**

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. On définit la fonction g qui à x associe $\dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
2. Montrer que f admet une tangente passant par l'origine.

601 **CCINP PC 2015**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;1]$ par

$$f(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

1. Calculer f'. En déduire que f réalise une bijection de $]0\,;1]$ vers $[0\,;+\infty[$.
2. On pose u la bijection réciproque de f. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:
$$(u(x))^3 + xu(x) - 1 = 0.$$
3. Montrer que u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:
$$u'(x) = \frac{-u(x)}{3(u(x))^2 + x}.$$
4. Montrer que $u(1) \geqslant \dfrac{1}{2}$ à l'aide de 2, puis que $|u'| \leqslant \dfrac{1}{3u}$.
5. Montrer que $u(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x}$.
6. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)}\,\mathrm{d}x$.

602 **Mines PC 2022**

Existe-t-il une fonction continue et surjective de E vers F si

1. $E = [0\,;1]$ et $F =]0\,;1[$?
2. $E =]0\,;1[$ et $F = [0\,;1]$?

603 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $f \in C^1([0\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = a > 0$ et

$$\forall x \in [0\,;b],\ f'(x) \geqslant f^3(x).$$

Montrer que $b \leqslant \dfrac{1}{2a^2}$.

604 **ENS MP 2017**

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) = \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Montrer que :
$$\forall \lambda > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}\right) = \lambda^\beta.$$
2. On suppose désormais que φ' est croissante. Montrer la réciproque.

605 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une limite en $+\infty$, une limite en $-\infty$ et qu'elles sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

606 **Mines-Ponts MP 2018**

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ telles que $f < g$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que $f < P < g$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose f et g de classe n et pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $f^{(k)} < g^{(k)}$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$:
$$f^{(k)} < P^{(k)} < g^{(k)}.$$

607 **Mines-Télécom PSI 2018**

Lorsque cela est possible, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? Est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition ?

608 **X MP 2021**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty\,;\alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si f est continue, alors f est s.c.i.
2. Donner un exemple de fonction f s.c.i. mais non continue.
3. Montrer que f est s.c.i. si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y \in V$, $f(y) > f(x) - \varepsilon$.

609 **X MP 2021**

Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ et $x \mapsto -f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ soient convexes.

1. Montrer que f est dérivable.
2. Montrer que f n'est pas nécessairement deux fois dérivable.
3. Montrer que f est de classe C^1.

610 **CCINP PC 2021**

Pour $x \in]-1\,;+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]-1\,;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

611 **X PC 2025**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P - P' = Q$. On suppose que Q est positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que P est positif sur $\mathbb{R}$.

612 **CCINP PSI 2018**

Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n(1+n^2x^2)}}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

613 **X MP 2017**

Soit f une fonction de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a;b) \in [0\,;1]^2,\ \exists (c;d) \in \mathbb{R}^2,\ f([a\,;b]) = [c\,;d].$$

   (a) La fonction f est-elle continue ?

   (b) On suppose de plus que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé. Montrer que f est continue.

2. On suppose que f est une dérivée. Montrer qu'elle vérifie la première propriété.

614 **ENS Ulm MP 2019**

Soit $f : \left[\frac{1}{4}\,;1\right] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $x^{f(x)} = f(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\,;1\right]$.
Montrer que f est uniformément continue.

615 **Mines-ponts MP 2025**

Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$. Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t.$$

616 **ENS MP 2015**

Soit F une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) = F(x) + 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \ell,$$

où F^n désigne l'itéré $n^{\text{ème}}$ de F, et $\ell \in \overline{R}$.

Question subsidiaire : montrer que ℓ est réel et indépendant de x.

617 **Mines-Ponts PC 2025**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.
Montrer que f est strictement monotone.

618 **CCINP MP 2018**

1. Soit $f_n : [a;b] \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f telle que pour tout n, la fonction f_n est continue en $x_0 \in [a\,;b]$. Montrer que f est continue en x_0.
2. Soit g_n définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = x^n$.
   La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

619 **X MP 2017**

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ une série à termes positifs convergente, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0\,;1]^{\mathbb{N}}$ une suite injective dense dans $[0\,;1]$. On pose :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N},\, \alpha_n < x} \alpha_n.$$

Déterminer les points de continuité et les points de discontinuité de f.

620 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n > 0,\, a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\tanh(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit la série entière f associée à cette suite, i.e. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. La fonction f est-elle continue à gauche en 1 ?

621 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que toute racine multiple de P' est aussi racine de P.
2. Déterminer le signe de $PP'' - (P')^2$ sur $\mathbb{R}$.

622 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et H un demi-plan de $\mathbb{C}$ contenant une racine de P'.

1. Montrer que $Z_{P'} \subset \mathrm{conv}(Z_P)$.
2. Montrer que H contient une racine de de P.
3. En déduire que $P(H) = \mathbb{C}$.

623 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $P(X)$ scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P) \geqslant 2$.

1. Montrer que P' est aussi scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et de P'.

624 **CCINP PSI 2021**

Soit $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

3 Calcul intégral

625 **X-ENS**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

En déduire que le nombre d'Euler est irrationnel.

626 **ENS Lyon**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale suivante :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(\pi - x)^n \sin(x) \, dx.$$

1. Montrer que I_n est un polynôme à coefficients entiers en π, de degré inférieur ou égal à n.
2. En déduire que π est irrationnel.

627 **Mines PC**

Calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \, dx,$$

où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a.

628 **X**

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n \, dt.$$

629 **X PC 2019**

On suppose que le graphe d'un polynôme de degré 6 est tangent à une droite en trois points A, B, C avec B le milieu de AC. Montrer que les aires délimitées par les segments AB, BC et la courbe sont égales.

630 **ENSEA/ENSIIE MP 2023**

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt.$$

631 **ENS PC 2024**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout nombre réel x, on pose :

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Q est polynomiale si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P^{(k)}(0) = 0$.

632 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Calculer, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment grand,

$$\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \det(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_n - A) \cdot (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_n - A)^{-1} \,\mathrm{d}\theta,$$

de deux manières différentes. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

633 **CCP MP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

634 **X PC 2021**

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

635 **Mines-Ponts**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

636 **Mines-Télécom**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)}\,\mathrm{d}x.$$

637 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-x^2}{2}.$$

Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1}{3}$.

638 **Mines-Ponts MP**

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$.

1. Montrer que $a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$.
2. En déduire la valeur de $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)\,\mathrm{d}t$.

639 **Mines-Télécom**

Calculer :

$$I(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)\cos(\theta)}\,\mathrm{d}t, \quad \theta \in [0\,;\pi[.$$

640 **Mines-Ponts MP 2023**

Étudier la convergence de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

641 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

642 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

643 **X MP**

L'objectif est de montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

À tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$, on associe $F = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k f^{(2k)}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $F(0)$ et $F(\pi)$.

   On suppose que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $(a;b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\forall x \in [0\,;\pi],\ f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

2. Tracer le graphe de f_n sur $[0\,;\pi]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

644 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
3. Montrer que f est développable en série entière.
4. Calculer I.

645 **X-ENS**

Soit $F = \{f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R}) \mid f(0)=0, f(1)=1\}$.
Déterminer :

$$\inf_{f\in F}\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

646 **X**

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

647 **Mines-Ponts PSI 2023**

On définit

$$f : t\in\mathbb{R} \longmapsto \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$$

et

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de F.
2. Calculer, si existence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

648 **X**

Soit $(u;v)\in\mathbb{R}^2$ et $r\in\mathbb{R}\setminus\{|u|;|v|\}$. Calculer :

$$I_r(u;v) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(u-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(v-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta.$$

649 **Mines**

Pour tout $x\in[2\,;+\infty[$, on pose :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \quad (\textit{logarithme intégral})$$

Trouver un développement asymptotique à n termes lorsque $x\to+\infty$.

650 **X-ENS**

1. Soit P, Q appartenant $\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$. On suppose de plus que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \,\mathrm{d}t = \sum_{\alpha \in \Omega} \varepsilon(\alpha)\mu(\alpha)$$

où Ω est l'ensemble des pôles de $\dfrac{P}{Q}$, $\varepsilon(\alpha)$ le signe de la partie imaginaire de α et $\mu(\alpha)$ le coefficient de $\dfrac{1}{X - \alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F.

2. *Application :* calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} \,\mathrm{d}t$.

651 **X-ENS**

1. Démontrer l'existence ou la non-existence d'une fonction f continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1 + f(t)^2} \,\mathrm{d}t.$$

2. Étudier la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ et pour tout $(n; x)$ appartenant à $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ par :

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1 + f_n(t)^2} \,\mathrm{d}t.$$

652 **Mines-Ponts PC 2024**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \,\mathrm{d}x$.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n J_n$ et calculer sa somme de plusieurs manières différentes.

653 **Mines-Télécom PSI 2019**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

654 **ENS PSI 2023**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \,\mathrm{d}x$.
Montrer que l'intégrale $I(a)$ converge et calculer sa valeur.

655 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx} - 1}{t} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.
Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

656 **CCP MP**

Soit α et β deux nombres réels. Posons

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln((1+x)^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale I_1 est-elle convergente ?
2. Même question pour l'intégrale I_2.

657 **Mines**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} t^n\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de I_n et exprimer I_n en fonction de n.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{\frac{1}{4}}} \sin\left(t^{\frac{1}{4}}\right) t^n\,\mathrm{d}t$.

658 **Mines-Ponts**

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$$

converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Démontrer que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que pour tout $s > s_0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

659 **Centrale**

Soit $f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(1) = 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$.

660 **X MP**

Soit $E = \{f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que

$$I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x)\cot(\pi t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2(\pi t)}\,\mathrm{d}t$$

   existent. Comparer I_1 et I_2.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   (*Inégalité de Wirtinger*)
3. Caractériser le cas d'égalité de l'inégalité de Wirtinger.

661 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note

$$u_n(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2x}}}},$$

où l'on a n racines carrées. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{u_n(x)}\,\mathrm{d}x.$$

662 **X**

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

663 **Centrale**

Soit $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. Donner un algorithme permettant de calculer l'intégrale suivante :

$$I_{p,q} = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(1+t^2)^q}\,\mathrm{d}t.$$

664 **CCP**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f \in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Reprendre la question précédente en supposant que $f \in C([a\,;b],\mathbb{R})$.

665 **X MP**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On considère :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. En considérant l'application $\psi : t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que $I(f)$ est un entier. (On appelle $I(f)$ l'*indice* de f.)

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $f_P(t) = P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

   On admet le théorème de d'Alembert-Gauss en deuxième question, mais pas en troisième question.
2. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
3. En utilisant $P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ pour r variable, donner une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.

666 **X-ENS**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré m. Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$I(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} P(u)\,\mathrm{d}u.$$
Montrer que :
$$I(t) = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(t).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q_0, \ldots, q_n$ des entiers naturels avec $q_0 \neq 0$.
Soit encore $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$.
On suppose que $Q(\mathrm{e}) = 0$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(X) = X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p \cdots (X-n)^p.$$
Soit encore
$$J = \sum_{k=0}^{n} q_k I(k).$$
Montrer que $J \in \mathbb{N}$. De plus, montrer que $(p-1)!$ divise J, et que pour tout p suffisamment grand, $J \neq 0$.
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|J| \leqslant C^p$.
Trouver une minoration de $|J|$. Conclure que e est un *nombre transcendant*, c'est-à-dire que e ne peut pas être racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

667 **Mines-Ponts MP 2024**

Montrer l'existence de
$$I = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
et calculer la valeur de I.

668 **Mines-Ponts PC 2023**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\cdots(t+n)}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer l'existence de I_n, puis calculer I_n.

669 **ENS**

1. Calculer $F(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

670 **Centrale PC 2005**

1. Justifier l'existence de
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \quad I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer deux réels α et β tels que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$I(x) = \alpha \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \beta \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{3\sin(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$
4. Montrer que
$$\lim_{x \to 0^+} \left(\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right) = 0$$
et en déduire la valeur de J.
5. Montrer que I peut se prolonger en une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et préciser la dérivée en 0.

671 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle
   (a) continue ?
   (b) de classe C^1 ?
3. Étudier la croissance de f. Calculer les limites au bord du domaine de définition.
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de f en 0.

672 **ENS Lyon MP 2024**

Trouver un équivalent de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_{x_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

673 **CCP**

Étudier l'intégrabilité de
$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}$$
sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

674 **CCP**

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$$
est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
2. On pose :
$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

675 **Mines-Ponts**

Pour tout $t \geqslant 0$, calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

676 **X PC 2019**

Déterminer la limite de
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$$
quand n tend vers $+\infty$.

677 **CCP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction
$$f : t \longmapsto \frac{1}{\cosh(t)+\cosh(a)}.$$
Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Indication : on pourra faire le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

678 **Mines 2015**

Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
En écrivant I comme somme d'une série alternée, déterminer le signe de I.

679 **Centrale 2015**

Soit $f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Donner une condition simple pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

680 **CCP 2015**

Soit $x \in [0\,;1]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{pk} = \frac{1+(-1)^n x^{p(n+1)}}{1+x^p}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

681 **CCP 2015**

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\ln(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t.$$

682 **Petites Mines**

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$.

1. La fonction f est-elle intégrable sur $]-1\,;1[$?
2. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \ln(1-t) - \ln(1+t)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

683 **CCP MP**

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nn!}.$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

684 **CCP MP**

On pose, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $f(x;t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x;t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   On pose alors, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

685 **CCP MP**

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

686 **CCP 2016**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\sinh(t))^n\,\mathrm{d}t$ où $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$.
   Montrer que J_n est bien définie, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
3. Trouver une relation liant J_{n+2}, J_n et $\sqrt{2}$.
   En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

687 **CCP MP**

On considère la fonction H définie sur $]1\,;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de H.

688 **ENS 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition (réel) de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Trouver un équivalent de f en 0.
4. Montrer que le graphe de f admet pour axe de symétrie la droite Δ d'équation $x = \frac{1}{2}$.
5. Déterminer la borne inférieure de f.

689 **Petites Mines 2016**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

690 **Mines 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Peut-on réduire son domaine d'étude ?
2. Montrer que f est de classe C^1. Étudier ses variations.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Calculer un équivalent de f en $+\infty$.
4. Étudier la limite de f en 0^+.
   Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?
   L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle définie ? Si oui, la calculer.

691 **CCP 2016**

1. Montrer l'existence de $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{4-3\sin^2(u)}}\,\mathrm{d}u$.
2. Calculer I.

692 **Mines 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier ses limites au bornes.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

693 **CCP 2016**

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie.
2. Montrer que :

$$\sin^5(t) = \frac{1}{16}\left(\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)\right).$$

3. Montrer que pour tout $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{16}\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{10}{16}\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

   En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

694 **ENSAM 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{1} \frac{t^x-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Étudier la dérivabilité de f. En déduire $f'(x)$ puis $f(x)$.

695 **Mines 2016**

Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - a}\,\mathrm{d}t$.

696 **CCP 2016**

Soit $f \in C([0\,;+\infty[,\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $|f(t)| \leqslant c\mathrm{e}^{at}$.
On considère l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x > a$.
2. On suppose dans toute cette question que $a \leqslant 0$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ et en déduire un équivalent de F en $+\infty$.
   On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = L$ et en déduire un équivalent de F en 0^+.

697 **X-ENS PSI 2017**

1. Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout n entier naturel.
2. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que
$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$
   et donner la valeur de J.
   On admettra que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

698 **Centrale PSI 2017**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}\,\mathrm{d}t$

1. Démontrer que l'intégrale $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier la parité de f.
3. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?
4. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la calculer.
5. Développer f en série entière en précisant le domaine de validité de ce développement.

699 **CCINP 2024**

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2\,;+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$?

700 **TPE/EIVP 2012**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$.

701 **Mines-Ponts 2012**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} P(t)\,\mathrm{d}t = n^2+1.$$

702 **Mines-Ponts 2012**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x+\cdots+x^p)}{x}\,\mathrm{d}x$.

703 **X PC**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

704 **CCP 2017**

Déterminer la nature des intégrales :

$$A = \int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{+\infty}\sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

705 **CCP PSI 2021**

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

   $$J_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\sin\left(\frac{t}{\sqrt[3]{n}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

   est convergente.
2. Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur du réel K.

706 **CCP PSI**

Calculer, si existence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x$.

707 **Centrale PSI**

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cdot\frac{\sinh(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

708 **CCP PSI**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{n}$.

709 **CCP**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le domaine de définition D_f de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f. Expliciter $f'(x)$.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

710 **ENSAM PSI**

Soit deux fonctions $f\in C([0\,;1],\mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

711 **TPE/EIVP PSI**

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

712 **X FUF 2024**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $|I_n - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.
3. Calculer J_n.
4. En déduire un équivalent simple de I_n.

713 **X FUF 2024**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$
Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{3}$.

714 **Mines-Télécom 2022**

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de F.
2. Montrer que F est classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est solution de $y'' + y = \dfrac{1}{x} \quad (E)$.
4. Montrer que F est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

715 **CCINP MP 2025**

On considère l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Estimer I à 10^{-2} près. (On pourra développer I sous forme d'une série entière.)

716 **CCINP PSI 2024**

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) = xf(x-1)$.
2. Soit $V_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$ et $\phi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.
   (a) Montrer que ϕ est dérivable et calculer ϕ'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $\phi'(x) = \ln(x)$.
   (c) En déduire la limite de ϕ en $+\infty$.
   (d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{V_n}$.

717 **Mines-Ponts PC 2024**

Montrer la convergence des deux intégrales suivantes et les calculer :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x.$$

718 **Mines-Télécom MP 2024**

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x$.

719 **Mines-Ponts MP 2024**

Étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}-\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

720 **CCINP PC 2024**

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1\,;+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit $a \geqslant 1$. À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, calculer $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que :

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right| \leqslant \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.
   Étudier la nature de la série $\sum |v_n|$.
   En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
4. (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.
5. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + \ell + o(1).$$

721 **CCINP MP 2022**

Pour tout $t > 0$, on définit $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0\,;1]$, puis sur $[1\,;+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

722 **CCINP MP 2022**

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan(u)| \leqslant |u|$.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Quel est le domaine de définition de F ?
   (b) Quel est le domaine de continuité de F ?
   (c) Quel est le domaine de dérivabilité de F ?
   (d) Déterminer F'.
   (e) En déduire F.

723 **CCINP PC 2023**

Trouver une primitive de

$$f : \begin{array}{ccc}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2) \end{array}$$

724 **CCINP MP 2021**

On pose, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de f en 0^+.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f.

725 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant a$. Montrer que

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+|f(x)|} \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

726 **X MP 2018**

Montrer que, pour tout $a > 2$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax)\,(\cos(x))^{a-2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

727 **TPE/EIVP MP 2016**

Étudier l'existence de

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,\mathrm{d}x.$$

728 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) \, \mathrm{d}t < +\infty$$

et que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) \, \mathrm{d}t}\,. \quad (\textit{Inégalité de Heisenberg})$$

729 **CCINP MP 2024**

On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ de fonctions en posant :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \,]0\,;1],\ u_n(t) = \frac{t^{n-1} \ln(t)}{n}.$$

1. Calculer $\|u_n\|_\infty$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0\,;1[$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

730 **CCINP PC 2022**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

Montrer la convergence de I et calculer I.

731 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $r \in \,]-1\,;1[$. Montrer l'existence de $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r^n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t.$$

732 **Mines-Ponts MPI 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $(f')^2$ soit intégrable.

Montrer que $t \mapsto \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

733 **Mines-Ponts MP 2017**

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

734 **CCINP PSI 2023**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sinh(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Soit $t \in \left]0\,;+\infty\right[$. Vérifier que :
$$\frac{\sin(t)}{\sinh(t)} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nt}.$$
3. Montrer que :
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}.$$
4. En déduire que :
$$\frac{\pi}{4} < I < 1 + \frac{\pi}{4}.$$

735 **CCINP MP 2024**

1. Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{au^2+b}\,\mathrm{d}u$.
2. Soit t tel que $\cos(\frac{t}{2})$ ne s'annule pas. On pose $u = \tan(\frac{t}{2})$. Déterminer $\cos(t)$ en fonction de u.
3. On définit :
$$f : \begin{array}{ccc} \left]1\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x+\cos(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$$
Montrer que f est de classe C^1 sur $\left]1\,;+\infty\right[$, puis montrer que :
$$\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[,\ f'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

736 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $\lambda > 0$. On pose $I_\lambda = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\lambda^2+\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

1. Calculer cette intégrale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\lambda^2+\cos^2(n\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.
Prouver que la suite $(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

737 **Mines-Télécom PC 2022**

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.
2. Montrer l'égalité :
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n+1}}.$$

738 **Mines-Télécom MP 2023**

Montrer que

$$\int_a^b \frac{1}{x^n + (1-x)^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{2^n}{n}.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{n}\right)$.

739 **Centrale-Supélec PC 2017**

Montrer que

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer cette intégrale.

740 **Mines-Télécom MP 2022**

Étudier l'existence et la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

741 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos(t)-\sin(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(\cos(t)-\sin(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Donner le domaine de définition de F.
   (b) Étudier la continuité de cette fonction.

742 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

743 **CCINP PC 2022**

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I et J existent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer I et J.

744 **ENS MP 2019**

Soit $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x.$$

745 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

1. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $I = J$.
2. Calculer I.
   Indication : on remarquera que $I = \frac{I+J}{2}$, et on utilisera le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$.

746 **Mines-Ponts PSI 2017**

Justifier la convergence et calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t.$$

747 **CCINP PSI 2022**

Soit $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que :
$$\forall x \in [-1\,;\,1],\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$
3. Montrer la relation :
$$\forall x \in]0\,;1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).$$

748 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit P un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(x))\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer la nature de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big|\cos(P(x))\Big|\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer le signe de I pour $P = X^2$.

749 **Mines-Télécom MP 2023**

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t,$$

puis calculer sa valeur.

750 **CCINP PSI 2024**

Soit $b > 0$. Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-bt} \,\mathrm{d}t.$$

1. La fonction I est-elle bien définie ? continue ?
2. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$:

$$I(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2} \,\mathrm{d}u, \qquad I'(x) = \int_0^{+\infty} -2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2} \,\mathrm{d}u.$$

4. Montrer, à l'aide d'un changement de variable judicieux, que :

$$\forall x > 0,\ I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}} I(x).$$

5. En déduire l'expression de I.

751 **CCINP MP 2024**

Soit $k > 0$ et

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^1 t^k \sin(xt) \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que f vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x).$$

3. Déterminer le développement en série entière de $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xy'(x) + (k+1)y(x) = \sin(x)$. Donner ensuite le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction y.

752 **Mines-Ponts MP 2024**

Donner les deux premiers termes du développement asymptotique de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \ln(n+x) \,\mathrm{d}x.$$

753 **CCINP PC 2022**

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe.

754 **CCINP MP 2023**

On pose :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(u) = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$.
2. Montrer que $G^2(x) = -\dfrac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

755 **Mines 2024**

Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin(2x)}\,\mathrm{d}x < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

756 **CCP 2024**

Soit $a \in]0\,;1[$.

1. Montrer que l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x-\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que $I(a) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

757 **Mines 2022**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x+t)}{1+(xt)^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f possède une limite en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

758 **Mines 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [c\,;+\infty[$, $f(x) = (x-c)^2$.

759 **Mines 2022**

Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Développer s en série de fractions rationnelles.
2. En déduire un équivalent de $s(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

760 **CCP 2023**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t|\sin(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que :
$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u.$$
3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

761 **Centrale 2023**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les intégrales suivantes convergent :
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$
2. (a) Donner le domaine de définition (réel) $\mathcal{D}$ de la *fonction gamma* Γ définie par :
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x) > 0$.
   (b) Montrer que Γ est l'unique fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
   - $f(1) = 1$;
   - $f(x+1) = xf(x)$;
   - $\ln \circ f$ est convexe.

762 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Calculer I_n.

763 **Mines-Ponts MP 2021**

Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

764 **Mines-Télécom MP 2023**

soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x) - \tanh(2x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

et

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(x) - \tanh(tx)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $[2\,;3]$.

765 **CCINP MP 2022**

Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et donner Γ'.
3. Montrer que :

$$\forall x > 1,\ \forall \lambda \in]-1\,;1[,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1 - \lambda \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

766 **Centrale-Supélec PC 2017**

Montrer que

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) \, \mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer cette intégrale.

767 **Mines-Télécom MP 2018**

Justifier l'existence de :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \, \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale.

768 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

769 **ENS MP 2019**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

770 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt} \, \mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer le développement en série entière de f en 0.

771 **Mines-Télécom MP 2023**

On considère : $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Donner D_f.
2. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
3. Trouver une relation entre $f(t)$ et $f(t-2)$, en supposant que t et $t-2$ sont tous deux dans D_f.

772 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est de classe C^1.

773 **Mines-Ponts MP 2022**

On note $f(x;y) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t^x+t^y)\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f admet-elle des extrema ?

774 **Mines-Télécom MP 2025**

On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}.$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

775 **Mines-Télécom PSI 2018**

Montrer que pour tout $a>0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ka+1}.$$

776 **CCINP MP 2013**

Calculer :

$$I(a;b) = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a-\cos(x)}{b-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x,$$

où $a,b \in\,]1\,;+\infty[$.

777 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et
$$J_n : x \longmapsto \int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner la parité de J_n en fonction de n.
2. Montrer que J_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \pi}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}.$$
4. Déterminer $p_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que J_n vérifie l'équation différentielle suivante :
$$x^2 y'' + xy' + p_n(x) y = 0.$$

778 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
   En déduite que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$
2. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$.
4. Déterminer une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
5. En déduire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ et en déduire la valeur de I.

779 **Mines-Ponts MP 2016**

Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^{-\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

780 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

781 **CCINP MP 2021**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
3. Calculer f à l'aide de fonctions usuelles.

   On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

782 **CCINP PSI 2021**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ à l'aide d'une série. Obtient-on la même série ?

783 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on considère l'intégrale :

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que J_n peut s'écrire :

   $$J_n(x) = A_n(x)\mathrm{e}^x + B_n(x)\mathrm{e}^{-x},$$

   où A_n et B_n sont des polynômes de degré au plus n.
2. Montrer que $\mathrm{e}^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$.

784 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\cos^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.
3. Déterminer $f(x)$.

785 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Pour t réel, linéariser $\sin^5(t)$.
2. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

786 **Mines-Télécom 2019**

On considère l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Justifier son existence et la calculer.
Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

787 **Mines-Ponts MP 2018**

On considère l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier l'existence de cette intégrale.
2. Si existence il y a, calculer cette intégrale.

788 **X MP 2018**

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{n} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{n!}{2}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{n+1} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x > \frac{n!}{2}$.

789 **Mines-Télécom MP 2023**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

790 **Mines-Télécom PC 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer I_n comme somme d'une série.
2. Trouver un équivalent de I_n.

791 **CCINP PSI 2021**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}.$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n)).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

792 **ENS PC 2025**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(2xt) x^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$

Donner un équivalent de $A_n(t)$ quand $t \to +\infty$.

793 **CCINP PC 2022**

1. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.
   (a) Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner la dérivée de f.
   (b) En posant $u = x\tan(\theta)$, montrer que :

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x}\,\mathrm{d}u.$$

4. Montrer que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

   et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

794 **CCINP PSI 2017**

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \end{array}$$

1. Montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot k!}$.

795 **CCINP PC 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f y est de classe C^1 et préciser un équivalent en 0.

796 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sinh(x\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner un développement en série entière de f.
3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

797 **Mines-Ponts**

1. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est intégrable, et $h : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée intégrable. On pose, pour $x \in [a\,;b]$, $H(x) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)h'(t)\,\mathrm{d}t - [f(t)h(t)]_a^b = \int_a^b f''(t)H(t)\,\mathrm{d}t - [f'(t)H(t)]_a^b.$$

2. On suppose que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $|f''(x)| \leqslant M$. Montrer l'*approximation par la méthode des trapèzes* :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{12}.$$

3. Que devient l'égalité de la question 1 s'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to c^-} h(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to c^+} h(x)$ existent, mais sont différentes ?
4. On suppose de nouveau que, pour tout $x \in]a\,;b[$, $|f''(x)| \leqslant M$. Montrer l'*approximation par la méthode du point milieu* :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{24}.$$

798 **Mines-Ponts**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose qu'il existe $a < 0$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$.

Montrer que les fonctions f et f' sont intégrables.

799 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. Calculer :

$$I(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos(x)\cos(\theta)}\,\mathrm{d}x.$$

800 **Mines**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ que l'on suppose intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors celle-ci est nécessairement nulle.
2. Montrer que si la fonction f est uniformément continue sur $[a\,;+\infty[$, alors f admet nécessairement une limite nulle en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente est-il vrai si l'on suppose que f est simplement continue ?

801 **CCINP MP 2025**

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$. Calculer u_0.
3. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis exprimer u_n à l'aide de factorielles.
4. Sur $[0\,;+\infty[$, on pose $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ et 0 sinon. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}u_n$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

802 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que le graphe de f admet un point de symétrie.
2. Justifier l'existence et calculer :
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

803 **Mines-Télécom MP 2018**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer la somme de la série de terme général :

$$a_n = \frac{2^{2^n}(n-1)!n!}{(2n+1)!}.$$

804 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une relation entre f et f'.
3. Sachant que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, déterminer f et donner sa limite en $+\infty$.

805 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable sur son intervalle de définition.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

806 **X ESPCI 2017**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. Étudier la dérivabilité de I.

807 **Mines-Télécom MP 2024**

Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\,\mathrm{d}x$$

quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

808 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f \in C([0\,;\pi], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\pi} \cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Que dire de f ?

809 **ENS MP 2024**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(0) \neq 0$. Montrer que :

$$\forall r > 0,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \ln|P(0)| + \sum_{\alpha\in I_r} \mathrm{mult}_P(\alpha)\cdot \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$$

où $I_r = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0 \text{ et } |\alpha| < r\}$ et $\mathrm{mult}_P(\alpha)$ est la multiplicité de α en tant que racine de P.

810 **Mines-Ponts MP 2019**

Montrer que $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto F(x)\exp(x^2)$, où F est une fraction rationnelle.

811 **CCINP MP 2018**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I(u) = \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\int_{a+u}^{b+u} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On prend ici f :
$$x \longmapsto \begin{cases} \ell & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2\ell}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
Calculer $\lim\limits_{u\to-\infty} I(u)$.
3. On revient au cas général. Calculer $\lim\limits_{u\to-\infty} I(u)$ si l'on suppose que $\ell = 0$.
4. Déduire $\lim\limits_{u\to-\infty} I(u)$ dans le cas où ℓ est quelconque.
5. Soit a' et b' deux nombres réels tels que $0 < a' < b'$. Trouver α et β tels que :
$$\frac{X}{(1+a'X)(1+b'X)} = \frac{\alpha}{1+a'X} + \frac{\beta}{1+b'X},$$
puis simplifier l'expression
$$\frac{\mathrm{e}^x}{(1+a'\mathrm{e}^x)(1+b'\mathrm{e}^x)}.$$
6. Déduire des questions précédentes :
$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+a'\mathrm{e}^x)(1+b'\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x.$$

812 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin^m(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

813 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et ℓ un nombre réel strictement positif. On suppose que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = \ell.$$

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition de l'énoncé.
3. Calculer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

814 **Centrale PC 2024**

Soit

$$E = \left\{u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^{+\infty} u^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\right\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient dans E. Montrer que f' est aussi dans E.
3. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty} (f''(x))^2\,\mathrm{d}x}$$

   et préciser le cas d'égalité en supposant $f(0) = 0$.

815 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Décomposer $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$ en éléments simples.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)}\,\mathrm{d}t$.

816 **CCINP PSI 2023**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Montrer que $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

817 **Mines-Ponts MPI 2023**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-xt+xt^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer un développement en série entière de f avec les coefficients explicités.

818 **CCINP MP 2023**

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $[0\,;+\infty[$, de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer $F(0)$.
3. (a) Soit $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

   Montrer que F vérifie l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{\gamma}{\sqrt{x}}$.

   (b) Montrer que $F(x) = \pi\mathrm{e}^x - \gamma\mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

   (c) En déduire la valeur de γ.

819 **CCINP PSI 2025**

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $]-1\,;1[\, \subset D_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0\,;1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

820 **Mines-Télécom PSI 2019**

Pour tout x réel, on pose :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que C et S sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Sont-elles continues ?
2. Montrer que S est dérivable. Exprimer $S'(x)$ au moyen de $C(x)$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$
4. En déduire $S(x)$ et $C(x)$, exprimées au moyen d'une intégrale.

821 **Centrale-Supélec MP**

Soit

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Quelles sont les propriétés de f et g ?
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

822 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour x dans $\mathbb{R}$:

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_p et J_p sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que I_p est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p(x)$.
4. Exprimer $J_p(x)$ en fonction de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} J_p(a^p)$ converge-t-elle ?

823 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Énoncer soigneusement le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. Démontrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

824 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)\mathrm{e}^{-x^2t}\,\mathrm{d}t,$$

où g une fonction bornée, impaire et continue.

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction du réel α.
2. (a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est la parité de F ?
3. (a) Énoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
   (b) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. On pose $g = \sin$.
   (a) Calculer F.
   (b) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

825 **ENSEA/ENSIIE MP 2013**

Montrer l'existence et calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x.$$

826 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $x \in]0\,;\pi[$, soit

$$F(x) = \int_0^x \ln(\sin(x-t))\,\mathrm{d}t.$$

La fonction F est-elle intégrable sur $[0\,;\pi]$? Si oui, calculer l'intégrale.

827 **Mines-Ponts MP 2016**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

828 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ en fonction de I.
3. Déterminer $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t$ en fonction de I, J, K. En déduire les valeurs de I, J, K, L.

829 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout entier naturel n et tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = \dfrac{1+t^n}{\sqrt{1-t^2}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ de deux manières :

1. Par convergence uniforme.
2. Avec le théorème de convergence dominée.

830 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \exp(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

831 **Mines-Ponts MP 2017**

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une somme.

832 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$, à valeurs strictement positives. Pour tout a réel positif, on pose :

$$I(a) = \int_0^1 f(t)^a\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction I est dérivable et préciser la valeur de $I'(0)$.
2. Trouver la limite de $I(a)^{\frac{1}{a}}$ quand a tend vers 0.

833 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit f une fonction continue sur $[1\,;+\infty[$, à valeurs réelles, de carré intégrable. Montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

834 **Centrale PC 2017**

Montrer que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ quand $x \to +\infty$.

835 **Mines-Ponts PC 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner la limite de f en $+\infty$.

836 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, si $f \in E$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que, si $f \in E$ et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors il existe c tel que :
$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{(x-c)^2}{4}.$$
3. Décrire E totalement.

837 **X-ENS**

Soit $f \in C^2[a\,;b], \mathbb{R})$. Montrer que :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{12}\|f''\|_\infty.$$

838 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)-\cos(ny)}{\cos(x)-\cos(y)}\,\mathrm{d}x \quad \text{avec } y \in\,]0\,;\pi[.$$

Donner la valeur de I_n.
Indication : on pourra chercher une relation de récurrence entre $I_n + I_{n+2}$ et I_{n+1}.

839 **Centrale-Supélec MP 2021**

On donne $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer que $c < 0$.
3. (a) Montrer que $c = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

840 **Mines-ponts MP 2021**

On pose :

$$F : (x;y) \longmapsto \int_0^x \ln(x + y\cos(t))\, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F.
2. Calculer quand cela est possible la valeur de $F(x;x)$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intérieur de D_F.
4. Déterminer une expression de F sans intégrales.

841 **CCINP MP 2023**

Soit, pour n un entier naturel non nul :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite à déterminer.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire une deuxième façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

842 **CCINP MP 2023**

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{d}t.$$

   Indication : poser $u = \sqrt{t}$.

2. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$.
3. Montrer les inégalités suivantes :

$$2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leqslant R_n \leqslant 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

843 **CCINP MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On définit la fonction :

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) = \frac{2\sinh(x)}{\mathrm{e}^{nx} - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ telle que :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   est définie pour $n \geqslant 2$.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ I_n = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \sinh(x)\mathrm{e}^{-knx}\,\mathrm{d}x.$$

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

844 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t\cos(x) + t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

845 **Mines-Ponts MP 2013**

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

846 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite ℓ en $-\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$$

existe et déterminer sa valeur.

847 **Mines-Ponts MP 2017**

On définit f par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t\cosh(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est C^∞.
2. Montrer que $f(x) \sim -\ln(1-x)$ quand $x \to 1^-$.

848 **Centrale-Supélec PSI 2013**

On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie. Étudier sa monotonie.
2. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Trouver $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0. (On pourra faire le changement de variable $u = \tan(t)$.)

849 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(x) = f(x+2\pi)\}$. On pose sur E :

$$\|f\| = \sup\{|f(u)| \mid u \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G(f) : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est un endomorphisme.
2. (a) Montrer que G est C^1.
   (b) Donner une équation différentielle vérifiée par G.
3. La fonction G est-elle :
   (a) injective ?
   (b) surjective ?
4. Résoudre $G(f) = \lambda f$, d'inconnues $(f;\lambda) \in E \times \mathbb{C}$.

850 **ENS**

Soit

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n, Q_n \in \mathbb{Z}_{2n}[X],\ I_n(x) = \frac{n!}{x^{2n+1}}(P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)).$$

2. En déduire que $\dfrac{\pi}{2}$ est irrationnel.

851 **X MP 2017**

On note $P_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}((X^2-1)^n)$.

Montrer que pour $n \neq m$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

852 **CCINP PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

853 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit f la fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t(1+\mathrm{i}x)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle et déterminer f.

854 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $a > 0$. On note :

$$\begin{array}{rccc} f_a & : &]-a\,;a[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{array}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_{-a}^{a} f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

855 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit

$$\begin{array}{rccc} F & : &]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   Montrer que F est injective.

856 **CCINP PSI 2021**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. La fonction f est-elle continue sur D_f ?
3. Montrer que si $x \in D_f$, alors $1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

857 **Mines-Télécom MP 2018**

On note $I = \displaystyle\int_0^1 t^3\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Étudier l'existence et la valeur de I.

858 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit b une fonction continue par morceaux de période 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{[0;\alpha]}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = \alpha \int_0^1 b(y)\,\mathrm{d}y.$$

859 **CCINP MP 2023**

1. Soit $M > 0$ et $u : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $|u(x)| \leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ convergent.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ converge.

860 **CCINP 2023**

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier l'existence et la valeur de I.
2. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Trouver des réels α et β tels que :
$$\frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2} + \frac{\beta}{a^2+t^2}.$$
3. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)(a^2+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
4. Rappeler le théorème de la convergence dominée.
L'utiliser pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

861 **Mines-Ponts MP 2022**

1. Montrer la convergence de l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t.$$
2. À l'aide d'une intégrale à paramètres, calculer I.

862 **X-ENS**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$.

863 **Centrale-Supélec MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(x)^{2n+2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$
Calculer I_0.
3. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}}$.

864 **CCINP MP 2018**

Pour $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit :

$$f : \begin{array}{ccc}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{|\ln(x)|^\beta}{(1-x)^\alpha} \end{array}$$

1. (a) Trouver un équivalent en 0 et en 1 de f.
   (b) Déterminer les valeurs de α et β telles que f se prolonge par continuité à l'intervalle $[0\,;1]$.
   (c) Déterminer les valeurs de α et β telles que f soit intégrable sur $]0\,;1[$.
2. Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que I existe puis calculer I.

865 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x - f(0)^2 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \|f'\| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\|f'\|$ désigne la norme infinie de f' sur $[0\,;1]$.

866 **Mines-Ponts MP 2016**

Étudier l'existence et la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x,$$

où $\alpha > 0$ est donné.

867 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $f \in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in [a\,;b],\ f'(t) \in [0\,;1] \text{ et } f(a) = 0.$$

Montrer que $f^2(x) \leqslant 2\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [a\,;b]$.

868 **Centrale-Supélec PC 2016**

On considère l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.

869 **Centrale-Supélec MP 2016**

Donner un résultat du cours relatif aux sommes de Riemann. Donner une démonstration de ce résultat dans le cas où f est de classe C^1.

870 **ENSEA/ENSIIE PSI 2015**

Soit n un entier naturel. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que f possède au moins $n+1$ racines entre a et b.

871 **Mines-Ponts MP 2015**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x))\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

872 **CCINP MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{1+x^2}$ sur $]0\,;1]$.
2. On pose $u_n(x) = x^{2n}(\ln(x))^2$ pour n entier et $x \in]0\,;1]$.
   Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0\,;1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer une expression de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

873 **CCINP MP 2015**

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x.

874 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $b > a > 0$ et $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(u)}{u^3}\,\mathrm{d}u$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

875 **X MP 2017**

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ une fonction intégrable. On suppose que $\ln \circ f$ est concave.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f croît sur $]-\infty\,; x_0[$ et décroît sur $]x_0\,; +\infty[$.
2. Montrer que :
$$\exists c, k > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant k\mathrm{e}^{-c|x|}.$$
3. On considère $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ intégrable telle qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que g croît sur $]-\infty\,; x_1[$ et décroît sur $]x_1\,; +\infty[$.

   On définit :
$$f * g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$
   produit de convolution de f et g.

   Montrer qu'il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que h croît sur $]-\infty\,; x_2[$ et décroît sur $]x_2\,; +\infty[$.

876 **ENSEA/ENSIIE PSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et que :
$$0 \leqslant I_n \leqslant (\ln(2))^n.$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)I_n.$$
3. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{I_n}{n!}$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{I_n}{n!}x^n$.

877 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y}\,\mathrm{d}y.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$.
3. La fonction f est-elle dérivable ?

878 **Mines-Télécom PSI 2018**

1. Justifier que la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan(t))^2}$$
est intégrable sur $[0\,;1[$.
2. En déduire un équivalent simple de
$$\Phi(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{1}{(\arctan(t))^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0^+.$$

879 **Mines-Télécom PSI 2017**

Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$
2. Montrer que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

880 **Centrale-Supélec PSI 2015**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) + F(x).$$

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer quand est-ce que F admet une limite finie en $+\infty$?
2. On suppose que F admet une limite finie en $+\infty$. La fonction f admet-elle forcément une limite finie en $+\infty$?
3. On suppose que g admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet alors forcément une limite finie en $+\infty$. Déterminer cette limite.

881 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \geqslant 0$ tel que $f(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

882 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

883 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit $a > 0$, f continue sur $[1\,;+\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On s'intéresse à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ on a :
$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire la convergence de l'intégrale recherchée et expliciter sa limite en fonction de $\displaystyle\int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

884 **Centrale-Supélec PC 2015**

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k+1.$$

885 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$.

886 **Mines-Ponts MP 2019**

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par :
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.$$

887 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la fonction
$$(x;y) \longmapsto \int_0^{\pi} \ln(x+y\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est différentiable.
3. Comment expliciter l'intégrale
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x+y\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\,?$$

888 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit P la fonction de $]-1\,;1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(r;t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

1. Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé. Montrer que la fonction qui à r associe $P(r;t)$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$. Calculer ce développement.
2. Soit r appartenant $]0\,;1[$ fixé.
   (a) Justifier que la fonction qui à t associe $P(r;t)$ est continue, positive, paire et 2π-périodique.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(r;t)\,\mathrm{d}t = 1$.
3. Soit $a\in[0\,;\pi]$. Montrer que :

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-a}^{a} P(r;t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

4. Soit $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodique. Montrer que :

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P(r;t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

889 **Mines-Ponts MP 2014**

Calculer :

$$\lim_{x\to0}\int_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln(\cos(t))}\,\mathrm{d}t.$$

890 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^t}\,\mathrm{d}x$.

1. Donner le domaine de définition de φ et montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0$.
2. Donner un équivalent de φ en $+\infty$.

891 **Centrale-Supélec MP 2014**

1. Montrer que

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t$$

   converge pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est monotone.
3. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

892 **X-ENS Cachan PSI 2017**

Soit $a = (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que f est définie, de classe C^1, positive.
2. Montrer que $f(a) \to +\infty$ quand $\|a\| \to +\infty$.
3. Montrer que f admet un minimum.
   On note $a^* = (a_1^*; \dots; a_n^*)$ un point où ce minimum est atteint.
4. Montrer que :
   $$\forall i \in [\![1\,; n]\!],\ i! + (i+1)!a_1^* + \cdots + (i+n)!a_n^* = 0.$$
5. Soit $P(X) = 1 + a_1^*(X+1) + a_2^*(X+1)(X+2) + \cdots + a_n^*(X+1)\cdots(X+n)$.
   Montrer que $P(X) = a_n^*(X-1)\cdots(X-n)$.
   Calculer $P(-1)$, puis en déduire que $a_n^* = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.
6. Montrer que :
   $$f(a_1^*; \dots; a_n^*) = 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n) \,\mathrm{d}x.$$
   En déduire que $f(a^*) = \dfrac{1}{n+1}$.

893 **X MP 2017**

1. Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$. On suppose que :
   $$\forall k \in [\![0\,; n-1]\!],\ \int_0^1 f(t)t^k \,\mathrm{d}t = 0.$$
   Montrer que f s'annule au moins n fois sur $[0\,;1]$.
2. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On suppose que :
   $$\forall k \in [\![0\,; n-1]\!],\ \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt) \,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt) \,\mathrm{d}t.$$
   Montrer que f s'annule au moins $2n$ fois.

894 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

895 **CCINP MP 2018**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \end{array}$$

1. On suppose $1 < \alpha < 3$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose $\alpha \leqslant 1$. En utilisant les nombres

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

896 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, bornée et intégrable.

1. Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Discuter la convergence de $\sum u_n$ en fonction de $\|f\|_\infty$.

897 **CCINP PC 2021**

Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?
2. (a) Calculer $J_n(1)$.
   (b) Soit x tel que $-1 < x \leqslant 1$. Montrer que $J_n(x) \geqslant J_n(1)$. En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$ quand $-1 < x \leqslant 1$.
   (c) i. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction

   $$f : t \longmapsto \ln(\sin(t)) \sin^b(t) \cos^n(t)$$

   est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
   ii. Montrer que J_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Soit $g_x(t) = \dfrac{\sin^x(t)}{1-\cos(t)}$ où $x > 1$.

   Montrer que g_x est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(t)\,\mathrm{d}t$.
   (e) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$.

898 **Mines-Ponts 2012**

Montrer que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1)}\,\mathrm{d}t$$

est définie sur $\mathbb{R}_+$. Y est-elle continue ? intégrable ?

899 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que :
$$xf'(x) - f(x) + 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

900 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que dans ces conditions :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

901 **Mines-Ponts PSI 2018**

Soit
$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \cdot \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de F, F' et F'' en $+\infty$.
3. Calculer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

902 **Centrale-Supélec PSI 2018**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $a_k = \dfrac{k\pi}{n}$.
   (a) Montrer que :
   $$(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2x\cos(a_k) + x^2) = (x-1)(x^{2n}-1).$$
   (b) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.
3. Calculer $f(1)$.

903 **Centrale-Supélec 2012**

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies par :
$$f_n(x) = \frac{1}{1+|x-n|}.$$
2. Étudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, de carré intégrable.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
On prendra soin de justifier l'existence des intégrales mises en jeu.

904 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$ des nombres réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :
$$\forall i \in \{1;\ldots;n\},\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies P = 0.$$
2. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall i \in \{1;\ldots;n\},\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

905 **CCINP MP 2022**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

906 **Centrale-Supélec PC 2023**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose :
$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-x-3}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1\,;+\infty[$ et donner ses variations.
4. Déterminer la limite de f en -1.
5. Exprimer la fonction f.

907 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit
$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x;t)\,\mathrm{d}t$$
avec $u, v \in C([a\,;b], \mathbb{R})$ et $f \in C([a\,;b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
La fonction F est-elle continue sur $[a\,;b]$?

908 **CCINP PC 2024**

On pose $g(t) = \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer après prolongement par continuité en 0 que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, où $p \in \mathbb{N}$.
   Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_p converge-t-elle ?
3. (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = \tfrac{3}{4}\sin(t) - \tfrac{1}{4}\sin(3t).$$
   (b) Montrer que :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   On suppose désormais que $p = 3$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit U et V des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $U(a) = V(a)$. Montrer que :
   $$\lim_{x \to a} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
5. Déduire des questions précédentes la valeur de I_p.

909 **CCINP PC 2025**

Calculer :
$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

910 **X MP**

Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$. Après avoir justifié son existence, calculer l'intégrale suivante :
$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((2m+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

911 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Calculer f.

912 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Soit B la boule fermée de centre O et de rayon 1 pour cette norme. Soit enfin $f \in E$. Montrer que :

$$\sup_{g\in B} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

913 **ENSEA/ENSIIE PSI 2018**

Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier le caractère C^1 de f et déterminer f'.
3. En déduire une expression simple de f.

914 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par deux changements de variables.

915 **Mines-Ponts MP 2022**

Selon la valeur du paramètre réel p, discuter la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^p - 1}{t^2 \ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer sa valeur en cas de convergence.

916 **Mines-Télécom PSI 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;1[$.

   On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

917 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\omega = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{\omega t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_n pour tout entier naturel n.
2. En déduire une expression de la fonction $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
3. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels tels que $a < b$ et $f \in C([a\,;b], \mathbb{R})$ une fonction telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
En admettant le résultat suivant :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in [a\,;b],\ |f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$
montrer que $f = 0$.

918 **ENS MP 2014**

Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positives, continues et 2π-périodiques. On suppose de plus que, pour tout naturel n :

- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- $\forall \delta > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Soit alors f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique. On pose, pour tout entier naturel n :
$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (f_n(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

919 **Mines-Ponts MP 2017**

On définit $R : h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto R(h)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $R(h)(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $S : g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto S(g)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $S(g)(x) = g'(0) + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation entre W_{n+2} et W_n.
3. Soit P un polynôme. Montrer que $(S \circ R)(P) = P$.
4. Montrer que pour tout $g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $(S \circ R)(g) = g$.

920 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g la fonction définie pour tout $x > 0$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. On suppose que f a une limite en $+\infty$. Déterminer celle de g.

921 **Mines-Ponts PSI 2024**

Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. Est-ce cohérent avec les théorèmes du cours ?

922 **Mines-Télécom MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   On admet que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

923 **CCINP PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh^n(x)}$.

1. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[0\,; +\infty[$.
2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^n(x)}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer la nature des séries de terme général $(-1)^n I_n$ et I_n.
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$?

924 **Mines-Ponts MP 2019**

On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de I.
2. Déterminer un équivalent de I en $+\infty$.

925 **Centrale**

Pour tout $x \in]0\,;1[$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

926 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Pour $x \in]0\,;1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+x^2}}$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+x^2}}\,\mathrm{d}u \sim -\ln(x)$ quand $x \to 0^+$.
4. Montrer que $f(x) \sim -\ln(x)$ quand $x \to 0^+$.

927 **X ESPCI PC 2015**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$. Soit $a > 0$.
Montrer que $x \mapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et que leur intégrale sont égales.

928 **CCINP PC 2014**

Soit
$$F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. En déduire $F\left(\frac{3}{2}\right)$.

929 **X ESPCI PC 2013**

Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ en 0, en 1 et en $+\infty$.

930 **ENSEA/ENSIIE PSI 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in [0\,;1] \mapsto n^2 x \mathrm{e}^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

931 **Mines-Télécom MP 2022**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

932 **CCINP PSI 2025**

On pose :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
   Déterminer f'.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x) + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

933 **TPE/EIVP MP 2012**

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. La fonction g est-elle bornée ?
2. La fonction g est-elle décomposable en séries entières ?
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.
   On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. Soit $W_n = n\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.

934 **ENS MP 2019**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$.

935 **ENSEA/ENSIIE PSI 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{(x\ln(x))^n}{n!}.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et exprimer sa somme.
2. Montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer l'intégrabilité de $x \mapsto x^x$ sur $]0\,;1]$.

936 **CCINP PSI 2023**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Montrer que I converge.

(b) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = I$.

(c) On introduit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.

(e) En déduire la valeur de I.

937 **X MP 2019**

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cos(\theta)+n\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que les J_n sont à valeurs réelles.
2. Montrer que les J_n sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de leur développement.

$\boxed{938}$ **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une fonction continue $f : [0\,;b] \to \mathbb{R}$ et une fonction continue b-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose :

$$\omega(f;t) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ |x-y| \leqslant t\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon_n(f;g),$$

   où $\epsilon_n(f;g)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+3\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x$.

4 Équations différentielles

939 **CCP MP**

Soit l'équation différentielle $(E) : 4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à (E).
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = \mathrm{e}^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

940 **X PC 2019**

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \cos^2(t)$.

941 **Mines-Ponts MP**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue et bornée.
Soit l'équation différentielle :

$$xy' - y + f(x) = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Déterminer l'unique solution g telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.
   Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On suppose désormais que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
3. Montrer que g^2 et gf sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

942 **Centrale PSI**

Soit l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0. \quad (1)$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution de (1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.
2. Déterminer les solutions de (1) qui sont développables en série entière.
3. En posant $x = \sinh(t)$, résoudre (1).

943 **X**

Résoudre l'équation différentielle

$$t^2y'(t) + y(t) = t^{-n} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

944 **ENS Lyon 2022**

Soit $q \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$.
Montrer que l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ admet une solution non bornée.

945 **CCP MP**

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle
$$(x-a)(x-b)y'(x) - nxy(x) = ky(x).$$
2. On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n(X),\ f(P(X)) = (X-a)(X-b)P'(X) - nkP(X).$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer $\det(f)$.

946 **CCINP 2018**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telles que $f''' = f$.
Indication : justifier qu'il existe un nombre réel λ tel que $f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

947 **ENS PC 2015**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = l \in \mathbb{R}$;
- $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant \alpha$.

Montrer que l'équation différentielle
$$\varphi y'' = \varphi'' y$$
admet une solution qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

948 **Mines-Télécom MP**

Montrer que les solutions du système d'équations différentielles
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$
possèdent une limite en $-\infty$.

949 **CCP MP**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E).
3. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
4. En déduire le développement en série entière de f.

950 **CCP MP**

Soit $F : t \mapsto \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

On admet que $W_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. La fonction F est-elle développable en série entière ? Justifier.
   Le cas échéant, calculer ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.
3. Montrer que F engendre l'espace vectoriel réel des solutions développables en série entière, solutions de l'équation différentielle $(t^3-t)x''+(3t^2-1)x'+tx = 0$.

951 **Centrale MP**

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ et l'équation différentielle $(E) : y''(x) = q(x)y(x)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note y_α l'unique solution de (E) vérifiant $y_\alpha(0) = 1$ et $y'_\alpha(0) = \alpha$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x)y_0'(x) > 0$.
   Montrer que y_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y_\alpha(x) = y_0(x)\left(1 + \int_0^x \frac{\alpha}{y_0(t)^2}\,\mathrm{d}t\right).$$
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1 < 0$ tel que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) y_α s'annule sur $\mathbb{R}_+$;
   ii) $\alpha < \alpha_1$.
   Calculer α_1.

952 **CCP 2015**

Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

953 **Centrale 2015**

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

954 **Mines 2015**

Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.

955 **Mines 2015**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$$

On donne une solution particulière : $x \mapsto \exp(-2x)$.

956 **CCINP MPI 2025**

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

957 **CCP MP**

Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0\,;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1\,;1[$?

958 **CCP MP**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

959 **Centrale PSI 2017**

1. Montrer que l'équation différentielle (E) : $y'' = (1+x^4)y$ admet une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f^2(x)}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f^2(t)}\,\mathrm{d}t$ est solution de (E).
4. En déduire les solutions de (E) en fonction de la fonction f.

960 **CCP 2017**

Résoudre matriciellement le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y + 4\mathrm{e}^t \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

961 **Centrale 2012**

On considère l'équation différentielle (E) : $x(x^2+1)y' + y + x = 0$.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. Résoudre l'équation (E). Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

962 **Mines 2012**

Montrer que l'équation différentielle (E) : $xy' = x + y^2$ admet une unique solution développable en série entière, et que son rayon de convergence appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.

963 **Centrale 2012**

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$ qui admet une limite en $+\infty$. Préciser cette limite.

964 **TPE/EIVP 2018**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^x \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

965 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ noté (S). Démontrer que toutes les solutions de (S) sont polynomiales si et seulement si A est nilpotente.

966 **Mines**

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. On considère l'équation différentielle notée (E) donnée par $y' = a(x)y + b(x)$. On note aussi, pour $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ et $I = A(1)$.

1. Trouver une condition sur I pour que A soit 1-périodique.
2. Soit y une solution de (E). Démontrer que $x \mapsto y(x+1)$ est aussi une solution de (E).
3. Soit $I \neq 0$. Démontrer que (E) admet une unique solution 1-périodique.
4. Si $I = 0$, que peut-on dire ?
5. Donner un exemple pour chacune des situations.

967 **Mines**

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Existe-t-il des solutions bornées ?

968 **Centrale**

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f\ :]0\,;+\infty[$ de classe C^1 et solutions de l'équation différentielle (non linéaire) E suivante :

$$xf' - |1-f| = 1.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$.
2. Soit f une solution de (E). Démontrer que f est strictement croissante.
3. On suppose que f est minorée par 1. Déterminer la forme de f, puis obtenir une contradiction.
4. On suppose que f est majorée par 1. Déterminer la forme de f, puis obtenir une contradiction.
5. En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in]0\,;+\infty[$ tel que $f(x_0) = 1$. Déterminer toutes les solutions de (E).

969 **INP**

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} 2xy' - 3y = 0 & (H) \\ 2xy' - 3y = \sqrt{x} & (E) \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur $]0\,;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0\,;+\infty[$?

970 **X MP 2019**

Soit x une fonction continûment différentiable au voisinage de 0, telle que

$$x'(t) = 3x(t) + 85\cos(x(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = 77.$$

Montrer que x se prolonge en une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ entier.

971 **Mines-Télécom MP 2016**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

972 **Mines-Télécom MP 2024**

Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E) : 2xy'' + y' - y = 0,\ y(0) = 1.$$

973 **Mines-Télécom MP 2019**

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + \sinh(x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution paire sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0.

974 **CCINP PC 2023**

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ : \cos(t)y + \sin(t)y' = -\cos(t)\sin(t).$$

Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

975 **ENSEA/ENSIIE PSI 2024**

Résoudre l'équation différentielle

$$x'' + 6x' + 9x = 2t\mathrm{e}^{-3t},$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.

976 **CCINP PSI 2022**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \text{ sur l'intervalle }]-1\,;1[.$$

1. Chercher les solutions polynomiales.
2. Effectuer le changement $y(x) = xz(x)$, où z est une fonction inconnue. En déduire une équation différentielle vérifiée par z.
3. Donner $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$:
$$\frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$
4. Donner l'expression de z.
5. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1\,;1[$.

977 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

Résoudre l'équation différentielle

$$t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\cosh(t)}.$$

978 **CCINP PC 2022**

Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

979 **Mines-ponts MP 2018**

Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \cot(t)$.

980 **CCINP PSI 2024**

1. Déterminer $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

981 **Mines-Télécom MP 2021**

Déterminer les fonctions $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(t^2+1)x'' - 2x = 0.$$

982 **Mines 2022**

Montrer que la fonction :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène normalisée à coefficients constants.

983 **ENS 2023**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions a et b continues sur I.

1. Soit x une solution non nulle de $y'' + ay' + by = 0$ sur I. Montrer que les zéros de x sont isolés.
2. On suppose a de classe C^1. Montrer l'existence d'une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I telle que $f(t) = x(t)\mathrm{e}^{x(t)}$ soit une solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + qy = 0$, où q est continue sur I.
3. On note E_q l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$ sur I. Soit q_1 et q_2 deux fonctions continues sur I, vérifiant $q_1 \leqslant q_2$. On considère $y_1 \in E_{q_1} \setminus \{0\}$ et $y_2 \in E_{q_2} \setminus \{0\}$, ainsi que α et β deux zéros consécutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha\,;\beta]$.

984 **CCINP MP 2024**

Soit
$$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$
et
$$(H) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière qui vérifie (E) et la déterminer.
2. Montrer que $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est solution de (E).
3. On admet que $h : x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{x^2}$ est solution de (H).
   Déterminer toutes les solutions de (H).

985 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère l'équation différentielle suivante :
$$xy' + 3y = \frac{\exp\left(-x^{-2}\right)}{x^5}.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}^*$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

986 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière.
2. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. Faire le raccordement des solutions puis en déduire la solution sur $\mathbb{R}$.

987 **Mines-Télécom MPI 2025**

On considère l'équation différentielle suivante :
$$y'' = (x^4 - 1)y.$$

1. Montrer que s'il existe une fonction f solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$, alors cette fonction est unique.
2. On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose :
$$g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} \, \mathrm{d}t.$$
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

988 **CCINP TSI 2025**

En posant $z = \ln\left(\dfrac{y}{y+1}\right)$, résoudre l'équation différentielle $y' = y(1+y)$.

989 **Mines-Télécom PSI 2019**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

990 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Résoudre sur $D =]-\infty\,;1[$ l'équation différentielle :

$$(E) : xy' + y = \frac{1}{1-x}.$$

2. L'équation (E) a-t-elle une solution de classe C^∞ sur D ?

991 **X MP 2017**

Résoudre $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

992 **Centrale-Supélec PC 2017**

On considère l'équation différentielle :

$$\sqrt{1+t^2}y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0.$$

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales

$$(f(0); f'(0)) = (0; 1) \quad \text{et} \quad (g(0); g'(0)) = (1; 0).$$

   L'une d'entre elles vous semble-t-elle évidente ?
2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une série entière.
3. Pour tout $t \in]-1\,;1[$, prouver l'égalité $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.

993 **CCINP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+\mathrm{Re}^*$:

$$(E) : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Montrer que $\phi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est solution de (E).
2. À l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

994 **CCINP TSI 2023**

Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

On pourra poser $z = y'' - y$.

995 **Mines-Ponts PSI 2012**

Trouver les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle :

$$y'' + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} y = 0.$$

996 **Centrale-Supélec PSI 2016**

Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(3)}(t) - f(t) = \mathrm{e}^{pt}.$$

997 **CCINP PC 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2(x - x^2)y''(x) + (x-2)y'(x) - y(x) = 0.$$

1. Montrer que $y_0 : x \mapsto x - 2$ est solution.

   Soit I l'intervalle $]1\,;2[$ ou $]2\,;+\infty[$.

2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x-2}$ est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.

3. (a) On pose $\varphi : x \mapsto -2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$. Montrer que φ est dérivable sur I et calculer $\varphi'(x)$ sur I.

   (b) Résoudre (E) sur I sachant que :

   $$\frac{4-3x^2}{2x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x-2}.$$

   (c) Résoudre (E) sur $]1\,;+\infty[$.

   (d) Résoudre (E) sur $]0\,;+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

998 **Mines-Ponts MP**

1. Soit f une fonction de classe C^1, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$. On suppose que $f'(t) + af(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer que f tend également vers 0 quant $t \to +\infty$.
2. Soit f une fonction de classe C^2, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $f''(t) + f'(t) + f(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer que la fonction f tend également vers 0 quand $t \to +\infty$.

999 **X MP 2022**

Soit λ un réel.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{1+2t}{1-t}y.$$

2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\exp(-2t)}{(1-t)^3}$.
   Justifier que la fonction f est développable en série entière et donner un équivalent des coefficients de ce développement.

1000 **CCINP PSI 2023**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$.
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x vérifiant (E). Montrer que l'application qui à t associe

$$\frac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$$

   est bornée et atteint sa borne supérieure. Sa borne inférieure est-elle atteinte ?

1001 **CCINP PSI 2022**

Soit la fonction $f(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que cette fonction est C^1 sur un intervalle que l'on précisera et donner sa dérivée.
2. Trouver des polynômes non nuls a, b, c tels que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

3. Montrer que l'unique solution de cette équation, qui s'annule en 0, est une fonction impaire développable en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.
5. Donner ce développement en série entière.

1002 **Mines-Ponts MP 2021**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^3y' - 2y = 0$.

1003 **CCINP PC 2019**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2(x+\mathrm{i})}y = 0$.
3. On définit, pour x réel :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que l'on définit ainsi une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. Étudier le caractère C^1 et exprimer f'.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}f(x).$$

5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer l'existence de I_α.
   Exprimer I_α en fonction de f.
   En déduire le signe de I_α.

1004 **TPE/EIVP PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - (2+4x^2)y = 0.$$

Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Déterminer a_1.
2. Déterminer une relation entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}.
3. Déterminer a_2 et a_3. Faire une conjecture sur a_n et la démontrer.
4. Résoudre (E) en posant $y(x) = f(x)z(x)$.

1005 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$x(y'' - y') + ay = 0.$$

1006 **CCINP MP 2021**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4.$$

1. Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.
2. Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;4[$ et $]4\,;+\infty[$.
3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty\,;4[$, $]0\,;+\infty[$ et $\mathbb{R}$.

1007 **Mines-Télécom PSI 2017**

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - 4y' + y = 0$.

1008 **Mines-Télécom MP 2025**

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1009 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $a > 0$ et $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée. L'équation $y' - ay = h(t)$ admet-elle une solution bornée dans $\mathbb{R}_+$? Donner ses solutions.

1010 **CCINP PC 2023**

Soit S l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - (x^4 + 1)y(x) = 0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^2(x)$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \geqslant 0$.
4. Montrer que $f^2(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Posons $h(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que h est définie et que $h \in S$.
6. Montrer que $\{f; h\}$ est une base de S.

1011 **ENSAM PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$x(x+1)y' + y = \arctan(x).$$

1. Résoudre l'équation sur les intervalles ne contenant ni -1 ni 0.
2. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

1012 **CCINP PC 2018**

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation :

$$(E) : xy'' + xy' - y = 0.$$

1. Déterminer un réel α tel que $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $s : x \mapsto xf(x)$. Montrer que s est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E'), que l'on précisera.
5. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la fonction G.

1013 **Mines-Ponts MP 2017**

Donner le système à résoudre pour effectuer la variation des constantes dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

1014 **X MP 2018**

Soit $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$x'' = \frac{1-x}{x^3}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x(0)$ et $x'(0)$ pour que x soit bornée.

1015 **CCINP MP 2015**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) = 1.$$

1. Rappeler la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   Résoudre (E) pour $x > 0$.
2. Montrer que (E) admet une solution f développable en série entière sur $]-2\,;2[$.
   Donner ce développement.
3. En déduire à l'aide des questions précédentes une expression de $f(x)$ pour $x \geqslant 0$.

1016 **Mines-Ponts PC 2014**

Résoudre :

$$x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2.$$

1017 **Mines-Ponts PSI 2022**

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' + xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{1018}$ **Mines-Ponts MP 2015**

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y :

$$x(x^2+1)y'' - 2(x^2+1)y' + 2xy = 0.$$

$\boxed{1019}$ **Mines-Télécom PC 2022**

On note (E) l'équation différentielle suivante :

$$xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   Sans calcul, déterminer le nombre de solutions de ce problème sur un intervalle bien choisi.
3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $]-\infty\,; 0[$ et $]0\,; +\infty[$.
4. Dans le cas $(x_0; y_0) = (0; 1)$, trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy de la question 2.

$\boxed{1020}$ **TPE/EIVP MP 2018**

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
   En déduire une contradiction puis conclure.

$\boxed{1021}$ **CCINP PSI 2016**

On donne l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0.$$

1. (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
   (b) Pourquoi peut-on dire que (E) admet d'autres solutions ?
2. Résoudre entièrement l'équation différentielle en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{z(x)}{1-x}$. Effectuer les raccordements éventuels.

1022 **CCINP MP 2015**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 2ty' + y = 3t\cos\left(t^{\frac{3}{2}}\right).$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.
2. Résoudre (E) dans le cas général et un déduire une simplification de v.

1023 **Mines-Ponts PSI 2024**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y' + y = x^2.$$

1. Montrer que (E) n'a pas de solution développable en série entière (autour de zéro).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que (E) admet une unique solution y telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$.

1024 **Mines-Ponts PC 2016**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'' - (x+3)y' + 3y = 0.$$

Indication : on commencera par chercher une solution développable en série entière telle que $y(0) = 1$, dont on déterminera explicitement le rayon de convergence.

1025 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' - 3xy' + 4x = x^2$$

et on note (H) l'équation homogène associée.

1. Trouver les solutions polynomiales de (H).
2. Trouver toutes les solutions de (H) sur $]0\,;+\infty[$.
3. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

1026 **Mines-Télécom MP 2019**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

1027 **CCINP PC 2017**

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
3. Montrer que les solutions de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(h(x) + k),$$
où k est une constante réelle.
4. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité suivante :
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 + xu}\,\mathrm{d}u.$$
On pourra considérer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1 + xu}$.
5. Montrer que la fonction
$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 + xu}\,\mathrm{d}u$$
est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
6. Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$ et que c'est la seule.
7. Montrer que g est de classe C^∞ sur $[0\,;+\infty[$.
8. Trouver la limite de g en $+\infty$.

1028 **CCINP MP 2015**

Résoudre le système différentiel suivant par résolution matricielle (diagonalisation) :
$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - \exp(-t) \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

1029 **Mines-Ponts PC 2016**

Résoudre le système différence homogène $X' = AX$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Quelle méthode utiliser dans le cas où il y a un second membre ?

1030 **CCINP PC 2018**

Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r\,;r[$. Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + \frac{\alpha}{x} y = \frac{f(x)}{x}.$$

Pour tout $x \in]0\,;r[$, on pose :

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $y' + \dfrac{\alpha}{y} = 0$.
2. Pour tout $x \in]0\,;r[$, montrer l'existence de $M_x \geqslant 0$ tel que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $|f(t)| \leqslant M_x$. En déduire que pour tout $x \in]0\,;r[$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)$ est intégrable sur $]0\,;x]$.
3. Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0\,;r[$, puis résoudre (E) sur cet intervalle.
4. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+\alpha} x^n.$$

5. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0\,;r[$ qui possède une limite finie en 0.

1031 **Mines-Télécom PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

Déterminer une solution développable en série entière et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

1032 **Mines-Ponts 2013**

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution maximale. On note f cette solution.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est définie sur un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de f.

1033 **Mines-Télécom MP 2024**

On pose $a_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!}(n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Justifier que f est définie et de classe C^∞ sur $]-1\,;1[$.
2. En déterminant une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, montrer que f vérifie l'équation différentielle :

$$f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x).$$

En déduire l'expression de f.

1034 **TPE/EIVP PC 2015**

On considère l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ avec $y(0)$ et $y'(0) = 0$. Résoudre l'équation différentielle en utilisant des séries entières.

1035 **X ESPCI PC 2013**

On considère une solution f bornée de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \frac{xy}{1+x^3} = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

5 Fonctions de plusieurs variables

1036 **CCP MP**

Déterminer les coordonnées et la nature des extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 - (y^3 - y)^2 \end{array}$$

1037 **Mines-Ponts/X MP**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $h = a\dfrac{\partial h}{\partial x} + b\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
On suppose que h est bornée. Montrer que h est nulle.

1038 **CCP 2015**

On considère le disque $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et la fonction f définie par :

$$\forall (x;y) \in \mathcal{D},\ f(x;y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

La fonction f admet-elle sur $\mathcal{D}$ des extrema globaux ou des extrema locaux ?

1039 **CCP MP**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0;0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0;0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1040 **CCP MP**

On pose, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, $f(x;y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0;0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1041 **CCP MP**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ \alpha & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

1. Prouver que :
$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0;0)$ et donner leur valeur.
   (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1042 **CCP MP**

1. Soit E et F deux espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application.
   Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x;y) \in E \times E$, $\|(x;y)\| = \max(\|x\|_\infty; \|y\|_\infty)$.
   On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
   (a) Prouver que :
   $$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x;y) \in E \times E,\ |B(x;y)| \leqslant C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0; v_0) \in E \times E$.

1043 **Mines 2016**

On considère l'ensemble $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6\}$ et la fonction f définie sur Δ par :
$$\forall (x;y) \in \Delta,\ f(x;y) = x^2 y(x+y-4).$$

1. Représenter le domaine Δ.
2. Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ.

1044 **CCINP 2024**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x;y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0\,;1] \times [0\,;1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.

1045 **X-ENS/Mines-Ponts MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note : $f(M) = (\mathrm{Tr}(M); \mathrm{Tr}(M^2); \ldots; \mathrm{Tr}(M^n)) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}f(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal annulateur de M, noté π_M.
3. Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \pi_M\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

1046 **Mines-Ponts MP**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la fonction g admet un minimum global.
3. En déduire que la fonction f est surjective.

1047 **Mines-Ponts PSI**

L'application $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x;y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$, et $H(0;0) = 0$ est-elle continue ? de classe C^1 ?

1048 **CCINP MP 2023**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x;y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un minimum sur C.
2. Soit $(u;v) \in C$ où f atteint l'un de ses extrema.
   (a) Justifier avec un théorème de votre programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $$\begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
3. Déterminer les valeurs possibles de $(u;v)$, puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

1049 **CCINP PC 2017**

On pose $f(x;y) = x\ln(y) - y\ln(x)$ pour tout $(x;y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.
Déterminer les extrema de f sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

1050 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ et $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right\}$.

1. Représenter Δ et D dans $\mathbb{R}^2$.
2. Les ensembles Δ et D sont-ils ouverts ? fermés ?
3. Montrer que

$$f : (x;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\sin(xy))}{xy} & \text{si } (x;y) \notin \Delta \\ 1 & \text{si } (x;y) \in \Delta \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur D.

1051 **CCINP TSI**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$$

Déterminer les points où f admet des extrema locaux.

1052 **Mines 2024**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \min(x^2;y^2) \end{array}$$

Quel est le domaine de continuité de f ? de différentiabilité de f ? La fonction f est-elle de classe C^1 ?

1053 **Centrale-Supélec PC 2023**

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - \ln(1+x^2) \quad \text{et} \quad \forall x,y \in \mathbb{R},\ F(x;y) = f(x) - f(y).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et que l'équation $f'(x) = a$ d'inconnue x admet au plus deux solutions.
2. Déterminer les points critiques de F.
3. Quelle est la nature des points critiques ?

1054 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Rechercher les éventuels extrema de la fonction $f(x;y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$.

1055 **Mines 2024**

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{2}\sin(x+y);\dfrac{1}{2}\cos(x-y)\right) \end{array}$$

1. Déterminer la différentielle de f.
2. Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\| \mathrm{d}f(x;y)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
3. En déduire que le système
$$\begin{cases} 2x = \sin(x+y) \\ 2y = \cos(x-y) \end{cases}$$
admet au plus une solution.

1056 **Mines 2023**

Étudier l'existence, la continuité et les extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+x)}{t+y}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1057 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

Étudier les extrema de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x(y^2+\ln^2(x)) \end{array}$$

1058 **Mines-Ponts MP 2022**

On pose :

$$f(x;y) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f admet-elle des extrema globaux ? locaux ?

1059 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ?

1060 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 3xy - x^3 - y^3 \end{array}$$

Étudier les extrema de la fonction f.

1061 **CCINP PSI 2019**

Soit $f : (x;y) \mapsto \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$, et $f(0;0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

1062 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 telle que f admet un extremum en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.
2. Énoncer un théorème semblable pour U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3. Étudier les extrema de

$$f : (x;y) \longmapsto |\sin(x + \mathrm{i}y)|^2$$

sur l'ensemble $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1063 **Mines-Ponts PSI 2025**

On pose $f(x;y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les dérivées partielles de f.

1064 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & x^3y^2(x + y - 1) \end{array}$$

1. Trouver les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux de f.

1065 **CCINP MP 2027**

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

1066 **CCINP PSI 2015**

On considère les deux ensembles suivants :

$$K = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\},$$
$$T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < \pi\}.$$

On considère la fonction $F(x;y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$ et $F(x;y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$.

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum ? Si oui, déterminer leur valeur.

1067 **CCINP MP 2022**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x;y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les points critiques de f. La fonction f admet-elle un extremum global ?
2. Soit $(a;b)$ un point critique de f. Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a;b;f(a;b))$.
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1;1;1)$.
4. Exprimer la différentielle en $(1;1)$, puis g telle que $g(x;y) = (f(x;y);f(x;y))$.

1068 **Mines-Ponts PSI 2014**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

1. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.
2. En est-il de même pour deux points de $\mathcal{C}$ séparés d'un quart de tour ?

1069 **CCINP PSI 2017**

On note f la fonction :

$$(x;y) \longmapsto x^2y + \ln(4 + y^2).$$

1. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ un unique point critique.
2. On note $g : x \mapsto f(x;x^3) - f(0;0)$. Trouver un équivalent simple de g en 0.
3. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?

1070 **Centrale-Supélec PC 2023**

On définit :

$$f : \begin{array}{ccc} [-2\,;2] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2} - \sqrt{4 - x^2}\cos(y) \end{array}$$

Montrer que f possède un maximum et un minimum, puis déterminer leur valeur.

1071 **CCINP PC 2019**

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x;y) = \cosh(2x) - \cos(2y).$$

On considère les deux ensembles suivants :

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$$D' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leqslant t$ et $\sinh(t) \geqslant t$.
2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.
4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.
5. En déduire qu'il existe $t_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0);\sin(t_0))$.
6. Étudier les variations sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta);\sin(\theta))$.
Conclure.

1072 **CCINP TSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y;z) & \longmapsto & (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2) \end{array}$$

et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x;y;z) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est régulière en tout point.
2. Soit $M(3;0;0)$. Trouver une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par M.

1073 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et

$$f : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \longmapsto \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose que h est de classe C^1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose que h est de classe C^2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1074 **Mines-Ponts MP 2023**

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne usuelle. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geqslant a N(x-y)^2.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $N(x)$ tend vers $+\infty$.

1075 **ENS MP 2022**

1. Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\Delta u > 0$ sur $\overline{B}(0,1)$. Montrer que u atteint son maximum sur la sphère $S(0;1)$.
2. Démontrer le même résultat en supposant uniquement que $\Delta u \geqslant 0$ sur $\overline{B}(0,1)$.
3. Soit V telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\Delta V = 0$.

1076 **CCINP PC 2018**

1. Soit
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + \exp(x) \end{array}$$
   Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
2. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x\exp(y) + y\exp(x) \end{array}$$
   Montrer que si $(x_0;y_0)$ est un point critique, alors $x_0 < 0$, $x_0y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
3. Soit $x \mapsto f(-1+ax;-1+x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5. Notons $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

1077 **Mines-Télécom PSI 2022**

Étudier la continuité en $(0;0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0;0)$. Elles sont définies pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ par :

$$f(x;y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, \quad g(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad h(x;y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2+xy}.$$

1078 **TPE/EIVP PSI 2017**

Posons $f(x;y) = (x-y)^2(1-x^2-y^2)$ pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Préciser le signe de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?
4. Montrer que f possède un maximum global et préciser les points où il est atteint.
5. Préciser les extrema locaux de f.

1079 **CCINP PC 2015**

Soit

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x-y} \end{array}$$

1. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t.$$
2. Déterminer tous les points critiques de f et donner leur nature. Existe-t-il un maximum ?

1080 **CCINP MP 2023**

On note, pour tous réels x et y :

$$f(x;y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x;0) = 0.$$

1. On pose $X_0 = (x_0;0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f est continue en $(x_0;0)$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1;y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.
   (a) Calculer les dérivées partielles de f en X_1.
   (b) La fonction f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1, puis en $(0;1)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0. Si on suppose que f est différentiable en X_0, que vaut sa différentielle ?

1081 **CCINP MP 2012**

1. Déterminer les extrema de la fonction
$$f : (x;y) \longmapsto \sin(x)\cos(x)\cos(x+y)$$
sur le domaine
$$\Delta = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}.$$
2. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x+y+z \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Montrer que $\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leqslant \frac{1}{8}$.

1082 **Mines-Ponts MP 2014**

Montrer que

$$f(x;y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - nx - y)^2}{2^n}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle possède un minimum et trouver pour quel couple $(x;y)$ elle l'atteint.

1083 **CCINP PC 2024**

Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives, de classe C^2, convexe et de dérivée strictement négative.

1. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ vérifie ces hypothèses.
2. Soit
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + h'(x) \end{array}$$
   (a) Montrer que g est strictement croissante, et vérifier que $g(0) < 0$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution. On la notera α.
3. Soit f l'application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à $(x;y)$ associe $x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
   (a) Montrer que $\left(\alpha; \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de f.
   (b) Montrer que f admet un extremum local et déterminer sa nature.
4. On pose :
$$\phi : ((x;y);(x';y')) \longmapsto xx' - xy' - x'y + 2yy'.$$
   On admet que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :
$$\exists k > 0,\ \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2xy + 2y^2 \geqslant k(x^2 + y^2).$$
5. Montrer que l'extremum de f est global.

1084 **ENSAM 2015**

Déterminer les fonctions $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que le champ de vecteurs
$$V(x;y) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix}$$
soit le gradient d'une fonction f. Calculer alors cette (ces) fonction(s) f.

1085 **ENS MP 2019**

On définit les intégrales doubles des fonctions de $[0\,;1]^2$ dans $\mathbb{R}$ continues : on intègre successivement et les deux variables jouent des rôles équivalents i.e.
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$
On définit une norme :
$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 f(x;y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}.$$
On considère l'ensemble A des $g \in C([0\,;1]^2, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $r, s : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ avec, pour tous x, y, $g(x;y) = r(x)s(y)$.
Soit $f \in C([0\,;1]^2, \mathbb{R})$. Supposons que, pour tout $g \in A$, $\|f + g\| \geqslant \|f\|$.
Montrer que f est la fonction nulle.

1086 **CCINP PC 2024**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 - y^2 \end{array}$$

Soit l'ensemble $C = \{(x;y) \mid h(x;y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe C^1, puis montrer que $(0;0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0;0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1 et telle que $f(x;y) = 0$ pour $(x;y) \in C$.
   (a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t^2;t^3) = 0$.
   (b) En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0) = 0$.
3. Soit
$$\varphi_t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & f(t^2;u) \end{array}$$
   Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3\,;t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$.
4. Conclure que $(0;0)$ est un point critique pour f.
5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

1087 **Mines-Ponts MP 2024**

Posons $D = {\mathbb{R}_+^*}^2$. Montrer que l'ensemble

$$S = \left\{ g \in C^1(D,\mathbb{R}) \mid \exists f \in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),\ \forall (x;y) \in D,\ g(x;y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \right\}$$

est l'ensemble des solutions sur D d'une équation aux dérivées partielles à préciser.

1088 **CCINP PSI 2014**

On pose $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 + xy \leqslant 1\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il borné ?
2. À l'aide du changement de variable $u = x + \frac{y}{2}$ et $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$, calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

1089 **TPE/EIVP MP 2018**

On définit :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1;\ldots;x_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \end{array}$$

La fonction f admet-elle des extrema ? Si oui, lesquels ?

1090 **Mines-Télécom MP 2018**

Étudier la fonction f définie par :

$$f(x;y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1091 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit, pour tout $(u; v) \in D$:

$$\phi(u; v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}; \frac{u}{v}\right).$$

1. Montrer que ϕ est une bijection de D dans Δ.
2. Montrer que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1.

1092 **Centrale-Supélec PC 2022**

Soit $f \in C^2(]0\,;+\infty[, \mathbb{R})$. On définit :

$$\Phi \;:\; \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x; y; z) & \longmapsto & f\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) \end{array}$$

Déterminer les choix de f tels que :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

1093 **CCINP PC 2018**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *harmonique*, c'est-à-dire g est de classe C^2 et :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

1. Trouver a, b des réels tels que :

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{a}{1 + t} + \frac{b}{1 - t}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = f \circ g$.

3. Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
4. On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique si et seulement si g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et :

$$G(x; y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\cosh(y)}\right).$$

5. Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

1094 **Mines 2015**

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}-f=-(x^2+y^2)$$

dans le domaine $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(x;0)\mid x\in\mathbb{R}_-\}$, en passant en coordonnées polaires.

1095 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit

$$f:(x;y)\longmapsto\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(x+y)^n}{n^2}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les extrema locaux de f.

1096 **ENS MP 2013**

On suppose disposer d'une fonction f de deux variables $(t;x)\in\mathbb{R}_+^2$, positive, de classe C^1, telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(0;x)=0$, et vérifiant l'inégalité :

$$\frac{\partial f}{\partial t}-c\frac{\partial f}{\partial x}\leqslant Kf,$$

où c et K sont deux constantes réelles avec $c>0$. Montrer que f est nulle.

1097 **ENS MP 2013**

Soit v une fonction de deux variables $(t;x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, lipschitzienne et bornée.
Montrer qu'étant donnée une fonction $u_0\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}=0\\ u(0;\cdot)=u_0\end{cases}$$

1098 **Centrale-Supélec MP 2013**

On considère $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien.
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.
On note $N:x\mapsto\|x\|$ et $F:x\mapsto f(\|x\|)x$.

1. La fonction N est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$?
   Quelle est la différentielle de N ?
2. La fonction F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$?
   Quelle est la différentielle de F ?
3. La fonction F est-elle continue en 0 ? Est-elle différentiable en 0 ?

1099 **CCINP MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0;0) = 0$ et

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) > \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right|.$$

On pose $u : x \mapsto f(x;x)$, $v : x \mapsto f(x;-x)$ et $w_x : y \mapsto f(x;y)$.

1. Calculer les dérivées de u, v et w_x.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leqslant |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \mapsto y_x$. On suppose que φ est dérivable.
   Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x;\varphi(x))$. Montrer que φ est de classe C^1.

1100 **ENS MP 2014**

Soit $\mu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $\chi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi\mu)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi)\|^2 \mu^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \chi^2 \mu \Delta\mu.$$

1101 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit S une matrice symétrique réelle. On note

$$R(X) = \frac{X^T S X}{X^T X}$$

pour tout vecteur colonne X non nul.
Montrer que $P(x) = \det(S - xI_n)$ admet comme racines les valeurs prises par la fonction R en ses points critiques.

1102 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-2\} \\ & & z & \longmapsto & \dfrac{2z+1}{z+2} \end{array}$$

On pose $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que sous réserve de restrictions, f définit une bijection sur chacun de ces ensembles.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, $u : (x;y) \mapsto \mathrm{Re}(f(z))$ et $v : (x;y) \mapsto \mathrm{Im}(f(z))$.
   Montrer que u et v sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-2;0)\}$.
3. Déterminer f^{-1}.
4. Déterminer le jacobien de $(x;y) \mapsto (u(x;y); v(x;y))$.
5. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{|(z+2)^4|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1103 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f. Montrer qu'elles sont continues en $(0;0)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Interpréter le résultat.

1104 **CCINP MP 2022**

Soit $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x;y) & \longmapsto & \left(xy; \dfrac{x}{y}\right) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2. On pose $(u;v) = \Phi(x;y)$ et $f(x;y) = F(u;v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3. Résoudre :
   $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) - 2f(x;y) + 2 = 0.$$
4. Résoudre :
   $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

1105 **CCINP MP 2022**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Prouver que $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. On pose $\overrightarrow{u_\theta} = (\cos(\theta); \sin(\theta))$ avec $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.
   Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0;0)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ existe.
3. Existe-t-il des dérivées partielles de f en $(0;0)$?
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ avec $(x;y) \neq (0;0)$.
5. Est-ce qu'il existe des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

1106 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $(p;q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(p;q) \neq (0;0)$, et $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que les restrictions de f aux droites d'équation $px + qy = c$ sont constantes si et seulement si $q\dfrac{\partial f}{\partial x} = p\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1107 **Mines-Ponts MP 2016**

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x;y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

et donner leur nature.

1108 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

6 Topologie

1109 **CCP**

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) On suppose $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbb{R}$.

1110 **CCP MP**

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

1111 **CCP MP**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose, pour tout $x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que :
   $$d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}.$$
   (b) On suppose que A est fermée et que, pour tout $(x; y) \in E^2$, pour tout $t \in [0\,;1]$,
   $$d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y).$$
   Prouver que A est convexe.

1112 **X PC 2019**

On considère l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant une famille libre. Montrer que cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

1113 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer qu'une intersection décroissante de boules fermées de E est encore une boule fermée.

1114 **CCP MP**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$. On munit E des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définies par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On pose $O = \{f \in E \mid f(1) > 0\}$ et $F = \left\{f \in F \mid \int_0^1 f(t) \leqslant 0\right\}$.

1. Montrer que O est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.
3. L'ensemble O est-il ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$?

1115 **CCINP 2024**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) Soit $u : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   Soit $c : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et on note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$. L'ensemble F est-il fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$?

1116 **X-ENS**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que tout $a \in A$ est isolé. Montrer que l'ensemble A est au plus dénombrable.

1117 **X-ENS**

Donner un exemple de forme linéaire non continue.

1118 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact d'intérieur vide de $M_n(\mathbb{R})$.

1119 **CCP MP**

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel réel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :
$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que, } \forall n \in \mathbb{N},\, x_n \in A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$
3. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

1120 **CCP MP**

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Soit f une application de E dans F et a un point de E.
   Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :
   i) L'application f est continue en a.
   ii) Pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense dans E, et soit f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

1121 **CCP MP**

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) L'application f est continue sur E.
   ii) L'application f est continue en 0_E.
   iii) Il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$
   On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Démontrer que φ est linéaire et continue.

1122 **CCP MP**

Soit $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

On considère l'ensemble $A = \left\{ f \in E \mid f(0) \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que si $f \in A$, alors $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n > 1$. On considère

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leqslant \alpha \\ 1+\dfrac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $f_n \in A$.
En déduire la distance de O_E à A.

1123 **CCINP 2024**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de E par $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0;1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n des entiers naturels distincts.
   L'ensemble $S(0;1)$ est-il une partie compacte de E ? Justifier.

1124 **Mines-Ponts**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$$

réalise une bijection continue de E dans la boule ouverte centrée en O et de rayon 1.

1125 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit X une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

1126 **CCP PSI**

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées complexes.

1. Montrer que $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E.
2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

1127 **Centrale PSI**

On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? un groupe multiplicatif ? un fermé de $M_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$?

1128 **X-ENS**

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

1129 **X-ENS**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension finie, K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K. Cette boule est-elle unique ?

1130 **X**

Décrire les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ et de $GL_n(\mathbb{R})$.

1131 **X**

Décrire les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$.

1132 **X**

Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

1133 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E le plan euclidien.

1. L'ensemble $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ est-il un fermé de E ?
2. Donner la définition d'un partie connexe par arcs.
3. Montrer que le cercle de centre O et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée, est un segment.

1134 **X**

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{A} = \{u \in L(\mathbb{R}^n) \mid u(K) \subset K\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est compact.
2. Montrer que, pour $u \in \mathcal{A}$, $|\det(u)| \leqslant 1$.

1135 **X**

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ convexe non vide et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(K) \subset K$. Montrer que u admet un point fixe dans K.

1136 **Centrale-Supélec MP 2025**

1. Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

   Soit Ω une partie de $E = \mathbb{R}$. On note (C) la propriété suivante :
   Pour toute fonction $f : \Omega \to \{0; 1\}$ continue sur Ω, f est constante.
2. Montrer que si Ω est connexe par arcs, alors Ω vérifie (C).

   Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\Omega = \left\{\left(x; \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\} \cup (\{0\} \times [-1\,; 1])$.
3. (a) Montrer que Ω vérifie (C).
   (b) Montrer que Ω n'est pas connexe par arcs.

1137 **Centrale**

Soit E un espace vectoriel réel normé et f une forme linéaire de E. Montrer que :

$$f \text{ est continue} \iff \mathrm{Ker}(f) \text{ est fermé.}$$

1138 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n et scindés sur $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer que U_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)|.$$
2. Conclure.

1139 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension n. On identifiera $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit M un matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = X^T A X$, pour $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1\|X\|^2 \leqslant \varphi_A(X) \leqslant \lambda_n\|X\|^2.$$
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.

1140 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit E un espace vectoriel réel normé et A, B des sous-ensembles de E. On pose :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A et B son compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

1141 **ENS MPI 2025**

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E, non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide.

1142 **Mines-Ponts MP 2023**

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un fermé de ℓ^∞.

1143 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A.

1. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert.
2. On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que, si $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors $A = E$.
3. On pose $E = M_n(\mathbb{R})$ et A l'ensemble des matrices nilpotentes de E. On veut montrer que $\mathring{A} = \emptyset$.
   (a) Montrer que si $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors l'intérieur de $\mathrm{Vect}(A)$ est non vide.
   (b) Aboutir à une contradiction.

1144 **CCINP PC 2018**

On étudie $E = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}\right\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x;y) \in E$.
2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1145 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un ouvert de E.
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E.
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes.

1146 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit p un entier naturel non nul et a, b des réels tels que $a < b$.
On note $Z_p = \Big\{f \in C([a\,;b], \mathbb{R}) \mid \mathrm{Card}(\{x \in [a\,;b]\}) \mid f(x) = 0\}) \geqslant p\Big\}$.
Déterminer l'adhérence de Z_p pour la norme infinie.

1147 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à r (avec $0 \leqslant r \leqslant n$) est un fermé.
2. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang exactement r.

1148 **X MP 2018**

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1; 0; 1\}$. Notons A l'ensemble des racines des polynômes de E. Quelle est l'adhérence de A ?

1149 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit A un compact de E.

1. Montrer que $A \times A$ est un compact.
2. Soit $f : A \to A$ telle que :
$$\forall x, y \in A,\, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
Montrer que f admet un unique point fixe.
3. Soit $f : A \to A$ telle que :
$$\forall x, y \in A,\, \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$
Montrer que f est bijective et préserve les distances. (Montrer que l'inégalité de l'hypothèse est un fait une égalité.)

1150 **ENS Ulm 2022**

Montrer que l'application $M \mapsto \mathrm{Tr}(\exp(M))$ est convexe sur $S_n(\mathbb{R})$.

1151 **Centrale 2023**

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *connexe* s'il n'existe aucun couple de fermés disjoints non vides $(F; G)$ tel que $A = F \cup G$.

1. Montrer que l'on peut remplacer « fermés » par « ouverts » dans la définition ci-dessus.
2. Montrer que A est connexe si, et seulement si, toute application continue de A dans $\mathbb{N}$ est constante.
3. Montrer que si A est connexe par arcs, alors A est connexe.
4. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?
5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u. Montrer que $V(u)$ est un intervalle.
6. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que $V(u)$ est connexe.

1152 **Centrale 2022**

Soit B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $u(B) \subset B$.

On pose $u_0 = \mathrm{Id}$, et $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour $n \geqslant 1$.

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?
2. On pose $A = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} u_n(B)$. Montrer que $x \in A$ si, et seulement si, $u(x) = x$ et $x \in B$.
3. Montrer que $A \neq \emptyset$.

1153 **ENS 2022**

Montrer que les morphismes continus de $SL_n(\mathbb{R})$ vers $GL_n(\mathbb{R})$ sont à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

1154 **Mines 2024**

On note $I = [1\,;+\infty[$ et on considère les ensembles :

- $E = \{f \in C(I,\mathbb{R}) \mid f \text{ a une limite en } +\infty\}$,
- $F = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \exists n \in \mathbb{N},\, \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\, \forall t \in I,\, f(t) = P(t)t^{-n}\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, et que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est dense dans E.

1155 **ENS 2022**

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ bornée et $x \in \mathrm{conv}(A)$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que :

$$\left\| x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leqslant \frac{\mathrm{diam}(A)}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|.$$

1156 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N(x;y) = \max\left(|y|; \left|x + \frac{y}{2}\right|; |x+y|\right).$$

   Représenter la boule unité pour cette norme.
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\{\varphi_1; \ldots; \varphi_p\}$ une famille de formes linéaires sur E. À quelle condition l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$, qui à x associe $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}|\varphi_i(x)|$, est-elle une norme ?

1157 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.
On pose $A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\}$. Montrer que A est un fermé de E.

1158 **ENS MP 2018**

Que dire d'un sous-groupe strict fermé de $\mathbb{U}$?

1159 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.
2. Soit F un hyperplan de E. Montrer que F est fermé ou dense dans E.

1160 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Montrer que les deux applications suivantes sont des normes sur E :

- La norme infinie des suites ;
- $N : u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

1. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
2. Soit Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que l'intérieur de Z est vide, et déterminer son adhérence.

1161 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit I un segment de $]0\,;1[$ et $E = C(I,\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.
2. On pose $f(x) = 2x(1-x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E.

1162 **ENS MP 2019**

Existe-t-il un espace vectoriel muni de deux normes et une suite dans cet espace tels que cette suite converge pour les deux normes mais vers des limites différentes ?

1163 **CCINP**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact de E.
Soit $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x; y) \in K^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. (a) Montrer que si f admet un point fixe, alors ce point est unique.
   (b) En étudiant l'application $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K, montrer que f admet un unique point fixe.
2. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Montrer, à partir de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \|x_n - a\|,$$

où a est le point fixe de f, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.

1164 **X MP 2019**

On note E l'ensemble des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme infinie sur $[0\,;1]$. Pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on définit :

$$\Omega_{m,\varepsilon} = \{f \in E \mid \forall x \in [0\,;1],\ \exists y \in]x-\varepsilon\,;x+\varepsilon[,\ |f(x)-f(y)| > m|x-y|\}.$$

1. Montrer que, pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, $\Omega_{m,\varepsilon}$ est un ouvert dense.
2. On admet le théorème de Baire : une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Montrer que l'ensemble des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle part dérivables est dense dans E.

1165 **X MP 2013**

On note C_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal.

1. Démontrer que C_n est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.
2. L'application qui à une matrice associe son polynôme minimal est-elle continue ?
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

1166 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les ensembles suivants :

$$\Lambda_n = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = n\} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \{(x;y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2 = n\}.$$

1. L'ensemble Δ_1 est-il dense dans Λ_1 ?
2. L'ensemble Δ_2 est-il dense dans Λ_2 ?
3. L'ensemble Δ_3 est-il dense dans Λ_3 ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_n soit dense dans Λ_n.

1167 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension infinie.

1. Soit C un convexe de E et D un ensemble tel que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que $E \backslash H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

1168 **Centrale-Supélec MP 2017**

On note A_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note B_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-m_{ii})$.

1. Rappeler la définition d'un fermé.
2. Montrer que B_n est un fermé. Montrer que A_n est un ouvert.
3. Quelle est la dimension maximale d'un espace vectoriel inclus dans B_n ?

1169 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, A une partie de E et f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans E telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer qu'il existe un élément de $f([0\,;1])$ qui appartient à la frontière de A.

1170 **X MP 2024**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ et G_f son graphe. Les deux affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction f est continue si et seulement G_f est fermé.
2. La fonction f est continue si et seulement G_f est compact.

1171 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe un segment de longueur maximale dans K.
On rappelle que $[a\,;b] = \{ta + (1-t)b \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

1172 **X MP 2019**

1. Montrer que l'ensemble A défini par
$$A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P \text{ simplement scindé et } \deg(P) = n\}$$
est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelle est l'adhérence de A ?

1173 **Mines-Ponts**

Soit $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ et $(f;g) \in E^2$. On pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

1174 **ENS**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P d'une partie fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{C}$ est fermée (resp. ouverte).

1175 **ENSEA/ENSIIE 2012**

Un espace vectoriel réel normé E est dit *uniformément convexe* si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,$$
$$\|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \text{ et } \|x-y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta.$$
Étudier si $\mathbb{R}^2$, pour les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, est uniformément convexe.

1176 **Mines-Ponts**

Soit $E = C^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.
3. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

1177 **Mines-Ponts**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit :

$$P = \{u \in L(E) \mid u^2 = \mathrm{Id}_E\}.$$

1. L'ensemble P est-il fermé ? compact ?

   Soit E un espace topologique, A une partie non vide de E et $a \in A$. On dit que le point $a \in A$ est *isolé* dans A s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap A = \{a\}$.
2. Caractériser $T = \{\mathrm{Tr}(u) \mid u \in P\}$. En déduire que Id_E est un point isolé de P.
3. Déterminer tous les points isolés de P.

1178 **Centrale-Supélec MP 2023**

Soit (E, N) et (E', N') des espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $d \in \mathbb{N}$. On note $\|\cdot\|$ l'application de $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\left\|\sum_{k=0}^{d} a_k X^k\right\| = \max_{k\in[\![0;d]\!]} |a_k|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$.

   Montrer que $Y = \{\ell\} \cup \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E'.

   (b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ soit un compact de E. Montrer alors que pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ unitaire, x une racine réelle de P telle que $|x| > 1$. Montrer que $|x| \leqslant \|P\| + 1$.

   En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$.

1179 **Mines-Ponts MP 2013**

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles.

1180 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie n. Pour $u \in L(E)$, on pose :

$$\|u\| = \sup\{N(u(x)) \mid x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et que :

$$\forall y \in E,\ N(u(y)) \leqslant \|u\| N(y).$$

2. Montrer que l'on a ainsi bien défini une norme sur $L(E)$.
3. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L(E)$. Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement pour N.

1181 **Mines-Télécom MP 2018**

1. Dans un espace vectoriel normé, donner la définition d'un point adhérent à une partie, et une caractérisation de l'adhérence d'une partie.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est adhérent à $GL_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $M_n(\mathbb{R})$?

1182 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ une forme linéaire positive non nulle. Soit

$$p_\phi : f \longmapsto |\phi(f)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Par exemple, pour $\phi : f \mapsto f(0)$, on note p_0 la fonction associée.

1. Montrer que pour tout f :

$$|\phi(f)| \leqslant \phi(1)\|f\|_\infty.$$

En déduire que p_ϕ est une norme.

2. Montrer que p_0 et p_ϕ sont équivalentes.

1183 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit E un espace euclidien, A un compact et u un endomorphisme orthogonal tel que $u(A) \subset A$.

1. Montrer que $u(A) = A$.
2. On note :

$$r = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in E,\ A \subset B(x, s)\}.$$

Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon r contenant A.

3. Montrer que u admet un point fixe.

1184 **X MP 2025**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Montrer que tout convexe fermé non borné contient une demi-droite.
2. Montrer que le résultat est encore vrai sans l'hypothèse « fermé ».

1185 **Mines-Télécom MP 2024**

On appelle *matrice stochastique* de $M_n(\mathbb{R})$ toute matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des réels positifs et la somme de chaque coefficient de la même ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit matriciel.
2. Étudier la topologie de $\mathcal{S}$ (ouvert, fermé, compact, connexité par arcs).

1186 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note :

$$\varphi(f) : x \longmapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\|f\|_\infty.$$

3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\|f\|_1.$$

1187 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Rappeler la définition de $|||\cdot|||$ sur $M_n(\mathbb{C})$.
   (b) On note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.
   L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme ?
2. Montrer que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \rho(A) \leqslant |||A^k|||^{\frac{1}{k}}.$$

3. Soit N une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} |N(A^k)|^{\frac{1}{k}}.$$

1188 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^2 de S dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f.

1189 **X MP 2021**

Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que K est *précompacte* lorsque, pour tout $\delta > 0$, il existe une liste finie $(x_1; \dots; x_n)$ d'éléments de E telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta),$$

et on note alors $n(K, \delta)$ le plus petit de ces entiers n.

1. Montrer que si K est compact alors il est précompact.
2. On suppose E de dimension finie d. Soit K un compact d'intérieur non vide. Déterminer un équivalent de $\ln(n(K, \delta))$ lorsque δ tend vers 0^+.

   On pourra commencer par le cas où $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme infinie.
3. On considère ici l'espace vectoriel $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note K l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0. Montrer que K est précompact, puis déterminer un équivalent de $\ln(\ln(n(K, \delta)))$ quand δ tend vers 0^+.

1190 **ENS MP 2025**

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitziennes et 1-périodiques. Pour tout $a \in]0\,;1]$, on note :

$$\|f\|_a = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^a}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur E pour tout $a \in]0\,;1]$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-périodiques est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_1$.

1191 **Mines-Ponts PC 2022**

1. Donner la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$?

   Dans la suite, la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\cdot\|$. La sphère unité correspondante est notée S.
2. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur S. Ce maximum est noté $|||f|||$.
3. Pour tout couple $(f; g)$ d'éléments de $L(\mathbb{R}^n)$, prouver l'inégalité :

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \cdot |||g|||.$$

4. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $|||f||| < 1$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f^k$ est convergente et que sa somme est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1192 **Mines-Télécom MP 2022**

On pose pour tout l'exercice $E = C([a\,;b], \mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier, oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

1193 **CCINP MP 2022**

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E.
   Montrer que K est fermé et borné.
   On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C([0\,;2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :
   $$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}.$$
2. On admet dans un premier temps que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
   (b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.
3. (a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité :
   $$|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}.$$
   En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$
   (b) Soit $(f;g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :
   $$h : \lambda \longmapsto \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$
   démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.
   (c) En déduire que $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

1194 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) > 0$
- $N(0) = 0$
- $\forall (x;y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y)$

Montrer que N est une norme sur E.

1195 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in [a\,;b]^{[\![1;n]\!]}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in [a\,;b]^{[\![1;n]\!]}$. On note E l'ensemble $C([a\,;b],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'adhérence de l'ensemble

$$\{p \in P \mid \forall i \in [\![1\,;n]\!],\, p(x_i) = y_i\}$$

est

$$\{f \in E \mid \forall i \in [\![1\,;n]\!],\, f(x_i) = y_i\}.$$

1196 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit K un compact de E.
Soit $f : K \to K$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x;y) \in K^2,\, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un point fixe.

1. Montrer que l'hypothèse K compact est nécessaire, en considérant la fonction :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$$

2. Montrer que, si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.
3. Montrer que f admet un point fixe.
4. On considère $x_0 \in \mathbb{K}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$U_N = \{u_n \mid n \geqslant N\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{U_N}.$$

   (a) Montrer que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points fixes de f. Conclure.

1197 **TPE/EIVP MP 2012**

1. Soit $N_A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_+$ telle que $P \mapsto \sup\limits_{x\in A}|P(x)|$.
   À quelle condition sur A, l'application N_A est-elle une norme ?
2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que N_A et N_B soient des normes.
   Comparer N_A et N_B.

1198 **ENS MP 2023**

Montrer que l'intervalle $]0\,;1[$ n'est pas réunion disjointe de fermés d'intérieur non vide.

1199 **X MP 2017**

Soit $\omega = (\omega_1; \ldots; \omega_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et G_ω le groupe défini par $G_\omega = \omega\mathbb{R} + 2\pi\mathbb{Z}^n$. On suppose que les ω_i sont liés dans $\mathbb{Q}$. Montrer que G_ω n'est pas dense dans $\mathbb{R}^n$.

7 Arithmétique et algèbre

1200 **X-ENS**

Soit $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ et $n \geqslant 3$ un entier. On suppose $P^n + Q^n = R^n$.
Montrer que P, Q, R sont égaux, à une constante multiplicative près.

1201 **Mines MP 2019**

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \star y = x + (-1)^x y$. Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.

1202 **X-ENS**

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui sont continus.

1203 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation $\sigma \in S_n$ est un *dérangement* si et seulement si σ n'a pas de point fixe. Y-a-t-il plus de dérangements pairs ou impairs ?

1204 **ENS MP**

Trouver tous les groupes finis tels que l'identité soit le seul automorphisme.

1205 **Mines-Ponts MP 2021**

Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 sont égaux à 1.

1206 **CCP MP**

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A.
On note $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$ le *radical* de I.

1. Montrer que $\sqrt{0} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal et qu'il contient I.
3. Soit I et J deux idéaux de A. Montrer que
   (a) $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$
   (b) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
4. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = I$.

1207 **X PC 2020**

Trouver les polynômes P appartenant $\mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ est premier.

1208 **Mines-Ponts**

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Déterminer un groupe multiplicatif de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Soit G un groupe multiplicatif de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang.

1209 **Mines-Ponts**

On pose $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau. Quels sont les éléments inversibles ?

1210 **Mines-Ponts**

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

1211 **Mines**

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$.
Montrer que G est cyclique.

1212 **Mines-Ponts MP 2021**

Quel est le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$?

1213 **X**

Soit $n \geqslant 2$ un nombre naturel. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) n est premier ;

ii) $(n-1)! \equiv -1 \mod n$.

1214 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $N_n \in \mathbb{N}$ tel que tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur ou égal à N_n.

1215 **X-ENS**

Soit V un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(V)$. On note $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G,\, g(x) = x\}$. Montrer que

$$\frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = \dim(V^G). \quad (\textit{formule de Burnside})$$

1216 **ENS Ulm**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *spectre* de x, noté $\mathrm{spec}(x)$, la suite réelle $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est défini par $u_n = \lfloor nx \rfloor$ (partie entière de nx). Si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, on dit que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une *suite de Beatty*.

Démontrer le *théorème de Beatty* :

Soit a et b deux nombres réels supérieurs à 1. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les ensembles $A = \{u_n(a) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{u_n(b) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

ii) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ et a, b sont irrationnels.

1217 **X-ENS**

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est *transcendant* si et seulement s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ annulé par un polynôme irréductible $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 1$.
   Soit $(p_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$,
   avec $\dfrac{p_n}{q_n} \neq \alpha$.

   Montrer le *critère de Liouville* :
   $$\frac{1}{q_n^d} = O\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\right).$$
2. Montrer que le nombre $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

1218 **Mines-Ponts MP**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien d'élément neutre e. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^n = e$.

1. On suppose $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
   On pose $G_a = \{x^a \mid x \in G\}$ et $G_b = \{x^b \mid x \in G\}$.
   Montrer que G_a est un sous-groupe de G.
   Montrer que pour tout $x \in G$, il existe un unique couple $(u; v) \in G_a \times G_b$ tel que $x = uv$.
2. On suppose n impair.
   (a) Montrer que l'application $\Phi_2 : x \mapsto x^2$ est un automorphisme de G et préciser sa réciproque.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \wedge n = 1$.
   Montrer que l'application $\Phi_k : x \mapsto x^k$ est un automorphisme de G et préciser sa réciproque.

1219 **ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\displaystyle\sum_{M\in G} \mathrm{Tr}(M) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{M\in G} M = 0$.

1220 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit a et n deux nombres naturels avec $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.
2. Soit p un nombre premier impair et d un diviseur de $2^p - 1$.
   Montrer que $d \equiv 1 \mod 2p$.

1221 **X-ENS**

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},+)$ vers $(\mathbb{Z},+)$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(e_k)=0$, où e_k est la suite définie par $e_k(n)=\delta_{k,n}$. Montrer que $f=0$.

1222 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On veut montrer que n ne divise pas 2^n-1. Par l'absurde, on suppose que n divise 2^n-1. Soit p un diviseur premier de n.

1. Montrer que 2 est inversible modulo p. On note k l'ordre de 2 modulo p. Montrer que $k \mid n$ et que $k \mid p-1$.
2. Conclure.

1223 **X-ENS**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit d_n le nombre de couples $(a;b) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que a et b soient premiers entre eux. Soit $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ la *fonction de Mœbius* définie par :

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ (-1)^r & \text{si } n=p_1\cdots p_r \quad (p_1,\dots,p_r \text{ premiers distincts}) \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait différent de } 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $d_n=\displaystyle\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{d_n}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$.

1224 **X-ENS**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\mathbb{K}$ un corps, $|\mathbb{K}| \geqslant 3$. Démontrer que $D(GL_n(\mathbb{K}))=SL_n(\mathbb{K})$, où $D(GL_n(\mathbb{K}))=\langle ABA^{-1}B^{-1} \mid A,B \in GL_n(\mathbb{K})\rangle$. (L'ensemble $D(GL_n(\mathbb{K}))$ est appelé le *groupe dérivé* de $GL_n(\mathbb{K})$.)

1225 **Mines-Ponts**

1. Le polynôme X^4+4 est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?
2. En déduire les entiers n tels que n^4+4 est premier.

1226 **ENS Ulm**

Pour toute permutation σ de S_n, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\mathrm{inv}(\sigma)$ le nombre d'invariants de σ. Calculer :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\mathrm{inv}(\sigma)+1}.$$

1227 **X-ENS**

Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

1228 **X-ENS**

Soit $p \geqslant 3$ premier et $\varphi : GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction canonique. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\varphi|_G$ est injective.

1229 **X-ENS**

Soit G un groupe fini. On suppose que pour tous x, y appartenant à $G \setminus \{e\}$, il existe $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\tau(x) = y$. Le groupe G est-il abélien ?

1230 **X PC 2019**

Soit m, n des entiers positifs. Déterminer un polynôme unitaire de degré maximal divisant $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

1231 **X MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n = \{(x; y) \in (\mathbb{Q}^*)^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.

1. Montrer que C_1 est non vide.
2. Montrer que C_7 est vide.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose C_n non vide. Montrer que C_n est infini.

1232 **X MP 2021**

Résoudre l'équation $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{n}{a+b}$ d'inconnue $(a; b; n) \in \mathbb{N}^{*3}$.

1233 **CCP MP**

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = kp.$$

On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
2. Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
3. On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau.
   Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

1234 **CCP MP 2025**

1. Soit $(a; b; p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge ab = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que pour tout $k \in [\![1\,;p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k} k!$.
   En déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
   (b) Prouver que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p.$$
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que :
   $$p \text{ ne divise pas } n \implies n^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

1235 **CCP MP**

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que :

$$a \mid c \text{ et } b \mid c \iff ab \mid c.$$

3. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 17 \\ x \equiv 4 \mod 15 \end{cases}$$

dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

(b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

1236 **X MP 2021**

Pour $\sigma \in S_n$, on pose $A(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n)$.
Déterminer le maximum de A.

1237 **X ESPCI**

Soit $q \geqslant 2$ un entier fixé.

1. Soit d et n deux naturels non nuls. Montrer que, si d divise n, alors $q^d - 1$ divise $q^n - 1$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

1238 **X**

Soit p premier et $C_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$.
Montrer que C_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et en déterminer les sous-groupes.

1239 **Centrale PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{n}$ ou H_n le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
On pose $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

1. On dit qu'un polynôme P *stabilise* $\mathbb{Z}$ si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n stabilise $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0; \ldots; c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = c_0 H_0 + \cdots + c_n H_n$.

1240 **ENS MP MPI**

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ et $XY = \{xy \mid (x; y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

1241 **X ESPCI**

On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_m) \in \{-1; 1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

1. Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.
2. Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

1242 **ENS MP MPI**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition $(a\,b)$ telle que $1 \leqslant a < b \leqslant n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $c = (1\,2 \cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.
2. Montrer que la transposition $\tau = (1\,3)$ et le cycle $c = (1\,2\,3\,4)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4. (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in [\![1\,;4]\!]$.)
3. Montrer que la transposition $(a\,b)$ et le cycle $c = (1\,2 \cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

1243 **Mines-Ponts MP MPI**

Déterminer tous les couples $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$.

1244 **X-ENS**

Calculer le nombre d'involutions du groupe S_n.

1245 **X MP 2019**

Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau $C([0\,;1])$ des fonctions réelles définies et continues sur $[0\,;1]$ qui sont strictement inclus dans $C([0\,;1])$?

1246 **X MP 2019**

1. Pour n un nombre premier, montrer que :
$$n \mid 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1.$$
2. Trouver tous les nombres entiers $n \geqslant 1$ tels que :
$$n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n.$$

1247 **Mines-Télécom MP 2022**

1. Le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
3. Soit des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer que :
$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

1248 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Déterminer f sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Étudier la monotonie de f.
4. Déterminer entièrement f.

1249 **Mines-Télécom MP 2018**

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 10 \end{cases}$$

1250 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit E l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Montrer que E est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Est-ce un corps ?

1251 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est *premier* si et seulement si :

$$\forall (x; y) \in A^2,\ xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

1252 **CCINP MP**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif.

1. (a) Rappeler la définition d'un anneau.
   (b) Rappeler la définition d'un idéal.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que si $1_A \in I$, alors $I = A$.
3. Soit $x \in A$. On pose $I_x = \{a \cdot x \mid a \in A\}$. Montrer que I_x est un idéal de A.
4. On suppose que A n'est pas l'anneau nul. Démontrer :

$$A \text{ est un corps} \iff \text{Les seuls idéaux de } A \text{ sont } \{0_A\} \text{ et } A.$$

1253 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

1254 **Mines-Ponts MP 2024**

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

1255 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit l'anneau $A = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est un idéal.
2. Montrer que si $x_1 \neq x_2$, alors $A = I_{x_1} + I_{x_2}$.

1256 **Mines-Ponts MP 2018**

Déterminer le plus petit entier n pour lequel il existe un groupe G de cardinal n non abélien.

1257 **Mines-Télécom MPI 2024**

Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1258 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $a \in [\![1\,;p-1]\!]$ avec p premier.

1. Montrer qu'il existe un unique $b \in [\![1\,;p-1]\!]$ tel que $ab \equiv 1 \mod p$.
2. Quels sont les a tels que $a = b$?

1259 **Centrale-Supélec 2017**

Soit p un nombre premier. On note :

- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{F}_p^*$ le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{F}_p^{*2} = \left\{\overline{x^2} \mid x \notin p\mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $\mathrm{e}^{\frac{2\pi x \mathrm{i}}{p}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi y \mathrm{i}}{p}}$.

   On notera $\tau(a) = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{F}_p} ak^2$.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{F}_p^{*2}$, alors $\tau(a) = \tau(1)$.
3. Montrer que si $b \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$, alors $\tau(b) + \tau(1) = 0$.

1260 **TPE/EIVP MP 2017**

Résoudre dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

1261 **Centrale-Supélec MP 2019**

On dit qu'un anneau A est *régulier* si, pour tout x appartenant à A, il existe un u appartenant à A tel que $xux = x$.

1. (a) L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est-il régulier ?
   (b) Un corps est-il un anneau régulier ?
   (c) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $(L(E), +, \circ)$ est un anneau régulier.
2. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ayant ses coefficients $a_{i,i+1}$ égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Exhiber U tel que $AUA = A$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ soit un anneau régulier.

1262 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est de *type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in I,\ \forall x \in I,\ \exists a_1, \ldots, a_p \in A,\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i.$$

On écrit aussi $I = \mathrm{Vect}_A(\{\lambda_1; \ldots; \lambda_p\})$. On dit qu'un anneau est *noethérien* si tous ses idéaux sont de type fini.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ sont noethériens.
2. Montrer que l'anneau $(A, +, \cdot)$ est noethérien si et seulement si toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang.

1263 **Mines-Ponts MPI 2025**

Soit p un nombre premier et $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$.

1. Calculer le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Montrer que pour tout $A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $A^{q+2} = A^2$.

1264 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit G un groupe abélien d'ordre pq, où p et q sont deux premiers distincts.

1. Montrer que G est cyclique.
2. Montrer l'importance de la commutativité.

1265 **Mines-Ponts MP**

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) fini de cardinal q.
On considère le groupe quotient $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.
   On pourra utiliser l'application déterminant.
2. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$.
3. Déterminer les cardinaux de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $\mathbb{L}$ un autre corps (commutatif) tel que $SL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{L})$ soient isomorphes. Que peut-on dire de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$?

1266 **Mines-Télécom MP 2018**

Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

1267 **Mines-Ponts MP**

Soit G un groupe cyclique de cardinal n, d'élément neutre e.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n = e$.
2. Soit H un sous-groupe de G.
   (a) Montrer que H est cyclique.
   (b) Montrer que le cardinal de H divise le cardinal de G.
3. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

1268 **TPE/EIVP MP 2017**

1. Soit p un nombre premier. Résoudre l'équation $x^2 = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis montrer que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

1269 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, f un endomorphisme de E et P son polynôme minimal. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $\mathbb{K}[f]$ soit un corps.

1270 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Résoudre l'équation $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2. Résoudre l'équation $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

1271 **Centrale-Supélec MP 2019**

On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et impair, et $\mathcal{C} = \{x^2 \mid x \in F_p^*\}$.

1. (a) Que dire de la structure algébrique de F_p et de $\mathcal{C}$?
   (b) Expliciter $\mathcal{C}$ pour $p = 11$.
2. Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à d et à coefficients entiers, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que
$$\forall i \in [\![1\,;d]\!],\ p \mid P(a_i) \text{ avec les } a_i \text{ distincts modulo } p.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \mid P(n)$.
3. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p \mid x^{\frac{p-1}{2}} = 1\right\}$.

1272 **CCINP PC 2014**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

1273 **ENS MP 2019**

Soit G un groupe. Est-il vrai que :
$$G \text{ est fini} \iff \text{L'ensemble des sous-groupes de } G \text{ est fini ?}$$

1274 **X MP 2019**

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{3}] \subset \mathbb{Z}[j]$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est euclidien.

1275 **Centrale-Supélec MP 2025**

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. (a) Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Donner le reste de la division euclidienne de P par $(x-a)^2$.
   (c) En déduire une caractérisation des racines de P.
2. Posons $T_n = X^n - X + (-1)^n$. Quel est le nombre de racines de T_n dans $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

1276 **ENS 2023**

Montrer que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un groupe, engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1277 **Mines 2023**

On note $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\,\mathbb{Q} + \sqrt{2}\,\mathbb{Q} + \sqrt{3}\,\mathbb{Q} + \sqrt{6}\,\mathbb{Q}$.
Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dont $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}\}$ est une base, puis que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

1278 **Centrale 2022**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

1. (a) Montrer que l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$ est donné par :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ k & \longmapsto & k \cdot 1_A \end{array}$$

   (b) Montrer qu'il existe un unique $\kappa_A \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f_A) = \kappa_A \mathbb{Z}$. (Le nombre κ_A est appelé la *caractéristique* de l'anneau A.)
2. (a) Montrer que si A est un corps, alors $\kappa_A = 0$ ou κ_A est un nombre premier.
   (b) Montrer que si A est un corps fini, alors $\kappa_A \neq 0$.
3. (a) On suppose que A est un corps fini de cardinal p^n avec $n \geqslant 1$ et p premier. Montrer que l'application $F : x \mapsto x^p$ est un automorphisme de corps de A.
   (b) Déterminer l'ordre de F dans le groupe des automorphismes de A.

1279 **Centrale 2024**

1. (a) Énoncer le théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$, ainsi que le petit théorème de Fermat.
   (b) Rappeler la définition d'un idéal d'un anneau commutatif. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $a\mathbb{Z}[X]$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Soit R un anneau commutatif et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $pR = \{pr \mid r \in R\}$ est un idéal de R, puis montrer que pour tous $x, y \in R$, $(x+y)^p - (x^p + y^p) \in pR$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, R un anneau commutatif et I un idéal de R. On se donne $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et on suppose que tous les coefficients de B appartiennent à I. Montrer que $\det(A+B) - \det(A) \in I$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $P(X^p) - (P(X))^p \in p\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(M^p) = \mathrm{Tr}(M) \mod p$.

1280 **Mines 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Pour $x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $T(x) = \text{pgcd}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) $\det(A) \in \{-1; 1\}$

ii) $\forall x \in \mathbb{Z}^n$, $T(Ax) = T(x)$

1281 **Mines 2024**

Soit G et G' deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que f est surjectif si, et seulement si, l'image par f de toute partie génératrice de G est G'.

1282 **X 2022**

On pose $G = SO_3(\mathbb{R})$ et on considère un sous-groupe H de G tel que :

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \, ghg^{-1} \in H.$$

Montrer que $H = \{I_3\}$ ou $H = G$.

1283 **ENS 2022**

On considère le groupe :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Si B est un sous-groupe de G, on définit $C(B) = \{g^{-1}Bg \mid g \in G\}$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe non trivial H de G tel que $C(H) = H$.

1284 **ENS 2023**

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs v_1, v_2 non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, on pose $L = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$, et on note $\text{vol}(L) = |\det(v_1; v_2)|$.

1. Soit B une boule d'aire strictement supérieure à $\text{vol}(L)$. Montrer qu'il existe $x, y \in B$ tels que $x - y \in L$.
2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists I \in L, \, \|I\|_2 \leqslant 2(1 + \varepsilon)\sqrt{\frac{\text{vol}(L)}{\pi}}.$$
3. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \mod 4$. Montrer que -1 est un carré modulo p.
4. Montrer que p est somme de deux carrés.

1285 **Mines-Ponts MP 2024**

1. Soit $(G, \star)$ un groupe et $(H, \star)$ un sous-groupe de G. Déterminer le plus petit sous-groupe de G contenant le complémentaire de H.
2. On suppose G fini. Soit S un sous-ensemble de G. Montrer que $(S, \star)$ est un sous-groupe de G si et seulement si S est stable pour la loi $\star$.

1286 **CCINP MP 2022**

On considère un groupe $(G, \cdot)$ cyclique d'ordre n, engendré par a. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f : x \in G \mapsto x^r$. Soit encore $d = \text{pgcd}(r, n)$.

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de G engendré par a^d.
4. Soit $g \in G$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $y = x^r$.

1287 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que, pour tout $M \in G$, $M^2 = I_n$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que $|G| \leqslant 2^n$.
3. Soit $(n; p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que les deux groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

1288 **ENS MP 2022**

Soit $p = \overline{a_n \dots a_0}^{10}$ un nombre premier (écriture en base 10).
On pose $P = a_n X^n + \dots + a_0$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

1289 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le sous-groupe engendré par A et B.
2. Que dire des éléments qui commutent avec A et B ?

1290 **Mines-Ponts MP 2021**

Une application p d'un ensemble E dans E est dite *idempotente* si $p \circ p = p$.

1. (a) Montrer que si p est injective et idempotente, alors $p = \text{Id}_E$.
   (b) Montrer que si p est surjective et idempotente, alors $p = \text{Id}_E$.
   (c) Construire une application idempotente p différente de l'identité pour l'ensemble $E = \{a; b\}$.
2. Montrer que p est idempotente si et seulement si, pour tout $x \in P(E)$, $p(x) = x$.
3. Donner les trois applications idempotentes pour $E = \{a; b\}$, et les dix pour $E = \{a; b; c\}$.

1291 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Montrer que $f : x \mapsto ax$ est un automorphisme. En déduire que a est inversible.
2. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\{1; a\}$ est libre et que $\{1; a; a^2\}$ est liée.
3. Montrer l'existence de $i \in \mathcal{A}$ tel que $i^2 = -1$, puis que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

1292 **X ESPCI 2016**

Soit $n = 10101010 \cdots 101$ tel qu'il y ait 2016 fois le chiffre 0.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

1293 **Mines-Télécom MP 2019 MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 10 = 1$. Montrer que $n^4 \equiv 1 \mod 10$.
2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{4 \cdot 10^k} \equiv 1 \mod 10^{k+1}$.

1294 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $(g_1; g_2) \in G \times G$. On suppose que pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$. Soit G_1 le sous-groupe engendré par g_1 et G_2 les sous-groupe engendré par g_1 et g_2.

1. Décrire les éléments de G_1.
2. Décrire les éléments de G_2.
3. Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}^*$. Montrer que $G \cap K$ est fini.
4. Montrer que $\mathbb{U} \cap G$ est monogène.

1295 **Mines-Ponts MP 2015**

Pour n entier naturel non nul, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs.
Montrer que $S(n) \leqslant n + n\ln(n)$.

1296 **CCINP MP 2016**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau d'élément unité 1.

1. Soit $(a; b) \in A^2$. Supposons que $1 - ab$ soit inversible dans A. Montrer que $1 - ba$ est inversible dans A et préciser son inverse.
2. Soit a un élément de a tel qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $a^n = 0$.
   (a) Montrer que $1 - a$ est inversible et préciser son inverse.
   (b) En déduire que $b = 1 + 2a + \cdots + na^{n-1}$ est inversible dans A et préciser son inverse.
3. Soit $(a; b) \in A^2$ tel que ab est nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.
4. On suppose A commutatif. On note $\mathrm{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.

1297 **ENS MP 2013**

Soit $(\mathcal{A}, \times)$ un magma associatif. Démontrer la proposition suivante généralement admise : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout n-uplet $(a_1; \dots; a_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et tout parenthésage « admissible » de la multiplication $a_1 \times \cdots \times a_n$ (par exemple, pour $n = 4$, $(a_1 \times a_2) \times (a_3 \times a_4)$, $a_1 \times (a_2 \times (a_3 \times a_4))$, $(a_1 \times (a_2 \times a_3)) \times a_4$ sont des parenthésages admissibles), le résultat de la multiplication est le même.

1298 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soit $n \geqslant 1$ entier. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p = 2^{2^p} + 1$. Montrer que :
$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \neq q \implies f_p \wedge f_q = 1.$$
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

1299 **Mines-Ponts**

Soit $(E, +, \cdot)$ un anneau non commutatif. On munit E d'une loi de composition interne $[\cdot, \cdot]$ (*crochets de Lie*) définie par :
$$\forall (a; b) \in E^2,\ [a, b] = ab - ba.$$

1. Montrer l'*identité de Jacobi* :
$$\forall (a; b; c) \in E^3,\ \Big[a, [b, c]\Big] + \Big[b, [c, a]\Big] + \Big[c, [a, b]\Big] = 0.$$
2. On note, pour $a \in E$ fixé, l'application φ_a, qui va de E dans lui-même, définie par $\varphi_a(x) = [a, x]$. Montrer que :
   (a) Pour tout $(x; y) \in E^2$, $\varphi_a(x + y) = \varphi_a(x) + \varphi_a(y)$.
   (b) Pour tout $(x; y) \in E^2$, $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)y + x\varphi_a(y)$.
   (c) Pour tout $(x; y) \in E^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\varphi_a^n(xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi_a^k(x) \varphi_a^{n-k}(y).$$
   (d) Pour tout $(x; y) \in E^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\varphi_a(x^n) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \varphi_a(x) x^{n-1-k}.$$
   (e) Montrer que si a est *nilpotent*, c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a^p = 0_E$, alors φ_a est également *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que φ_a^q est l'application nulle de E dans E.

1300 **ENS MP 2019**

Soit G un groupe fini de cardinal n. On dit que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si pour tout entier d divisant n, il existe au plus un sous-groupe de G de cardinal d.

1. On suppose G cyclique. Montrer que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
2. Réciproquement, si G vérifie la propriété $\mathcal{P}$, montrer que G est cyclique.
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. On note $\mathbb{K}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$ et on rappelle que $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est un groupe. Montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique.
4. On suppose que $|\mathbb{K}| = p^2$, où p est un premier supérieur ou égal à 3. Montrer que $X^4 + 1$ admet une racine dans $\mathbb{K}$.

1301 **X MP 2024**

Soit G un sous-groupe du groupe des bijections du plan complexe. On suppose que :

- G est cyclique d'ordre 2^n avec $n \geqslant 2$,
- G contient la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$,
- $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall g \in G$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(mz) = mg(z)$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $g \in G$ tel que $\dfrac{g(z)}{z} \notin \{-1; 1\}$.
2. Déterminer les sous-groupes de G d'ordre 2^{n-1}.
3. On regarde $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-il possible que G ne soit composé que d'applications linéaires ?

1302 **CCINP MP 2025**

1. Calculer $d = \operatorname{pgcd}(473, 220)$.
2. Existe-t-il un couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $473u + 220v = d$? Si oui, en déterminer un.
3. Les équations suivantes ont-elles des solutions $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$? Si oui, les déterminer.
   (a) $(E_a) : 473u + 220v = 1$
   (b) $(E_b) : 473u + 220v = 11$
   (c) $(E_c) : 473u + 220v = 22$

1303 **ENS MP 2018**

Donner, à isomorphisme près, les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.

1304 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $(G, \star)$ un groupe. On note $\operatorname{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Soit $a \in G$ et

$$\phi_a \;:\; \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \star x \star a^{-1} \end{array}$$

1. On considère :
$$\phi \;:\; \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Aut}(G) \\ a & \longmapsto & \phi_a \end{array}$$
   Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.
2. Montrer que $\{\phi_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}(G)$.

1305 **CCINP PC 2022**

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n;m) & \longmapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$$

1. Trouver un antécédent de 56 par f.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
4. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est-il dénombrable ?

1306 **ENS MPI 2022**

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace euclidien.
Soit $e = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'un sous-groupe L de $(\mathbb{R}^n, +)$ est un *réseau* si :

- $\text{Vect}(L) = \mathbb{R}^n$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall R > 0\,, B(x,R) \cap L$ est fini.

1. Déterminer L pour $n = 1$.
2. On note $L(e) = \{a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \mid (a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
   Montrer que $L(e)$ est un réseau.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $L(e) = L(e')$.

1307 **X-ENS**

Soit p un nombre premier, G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ et φ le morphisme de *réduction modulo p* :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{F}_p) \\ M & \longmapsto & M \mod p \end{array}$$
Quand l'application φ est-elle injective ?

1308 **ENS Ulm MP 2023**

Soit p premier. Montrer que n divise le cardinal de $GL_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1309 **ENS MP 2017**

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que G s'injecte dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $p \geqslant 3$ premier.

1310 **CCINP MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
2. Soit $(n;x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = x$.
4. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

1311 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit E l'ensemble des matrices

$$M(a;b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que E est un anneau.
3. Soit la fonction φ telle que $\varphi(a+b\mathrm{i}) = M(a;b)$. Montrer que φ est un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ dans E.
4. L'application φ est-elle un morphisme d'anneaux ?

1312 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini d'élément neutre e.
Le groupe des automorphismes de G est supposé d'ordre 3.

1. Montrer que
$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$
est un automorphisme, puis que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
2. Montrer qu'il existe un sous-groupe V de G d'ordre 4. Déterminer les automorphismes de V.
3. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, en conclure une absurdité.

1313 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $\varphi(n)$ le cardinal des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\varphi(p)$ pour p premier, puis $\varphi(p^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
2. Redémontrer le théorème chinois.
3. En déduire que si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
4. En déduire une expression générale de $\varphi(n)$.

1314 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.

1. On définit l'ensemble quotient A/I avec la relation d'équivalence suivante :
$$\forall (a;b) \in A^2,\ a \sim b \iff a - b \in I.$$
Montrer que A/I est un anneau pour certaines lois que l'on précisera.
2. En déduire que si a est un entier et p un nombre premier tel que p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

1315 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ euclidien muni de son produit scalaire canonique. On définit un arc Γ sur E par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$.

1. Trouver toutes les isométries de E qui conservent Γ.
2. Soit $G = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f(\Gamma) = \Gamma\}$. Montrer que G est un groupe pour la loi $\circ$. Puis trouver les sous-groupes de G.

1316 **TPE/EIVP MP 2015**

On considère un groupe fini $(G, \cdot)$ d'élément neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. On considère un sous-groupe H de G, différent de G, et x un élément de G qui n'est pas dans H. On note K le sous-groupe engendré par H et x. Montrer que $\mathrm{Card}(K) = 2\mathrm{Card}(H)$. En déduire que le cardinal de G est une puissance de 2.

1317 **ENS MP 2024**

Montrer qu'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ admet une $\mathbb{Z}$-base.

1318 **X MP 2017**

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + n\mathbb{Z})$. On pose :

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & d^{-\frac{1}{4}} \tan(a) \\ -d^{\frac{1}{4}} \tan(a) & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le lien entre T_{a+b} et $T_a \cdot T_b$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, sans valuation paire dans sa décomposition en facteurs premiers. On note :
$$A_d = \{a + b\sqrt{d} \mid (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$
Montrer que A_d est un corps.
3. On note :
$$\sigma \; : \; \begin{array}{ccc} A_d & \longrightarrow & A_d \\ a + b\sqrt{d} & \longmapsto & a - b\sqrt{d} \end{array}$$
Montrer que σ est un automorphisme de corps.
4. Soit $p, q \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $p \wedge q = 1$ et $q \geqslant 3$ impair.
Montrer que $\tan\left(\pi \dfrac{p}{q}\right)$ ne peut s'écrire sous la forme $x = r \cdot d^{\frac{1}{4}}$ avec d entier vérifiant les conditions de la question 2 et $r \in \mathbb{Q}$.

1319 **ENS Ulm**

Soit A un anneau tel que tout $a \in A$ est soit nilpotent, soit idempotent.

1. Montrer que $a^2 = a$ pour tout $a \in A$ et que A est commutatif.
2. Si A est fini, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cong \mathbb{F}_2^n$ en tant qu'anneau.

1320 **X**

1. Soit a et r premiers entre eux.
   Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1 \mod r$.
2. Soit a et r deux entiers relatifs avec $a > r \geqslant 2$. Montrer que la progression arithmétique de premier terme a et de raison r contient une infinité de termes ayant tous les mêmes diviseurs premiers.

1321 **Mines-ponts MP 2017**

Soit a un nombre impair positif et n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \mod 2^n$.
2. En déduire les entiers n pour lesquels le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ est cyclique.

1322 **X-ENS**

Soit G un groupe fini et f un morphisme de G dans G. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

1323 **X MP 2017**

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et V un espace vectoriel. Si $\tau \in L(\mathcal{A}, V)$, on dit que τ est une *trace* si :

$$\forall (A; B) \in \mathcal{A}^2,\ \tau(AB) = \tau(BA).$$

On note $T(\mathcal{A}, V)$ l'ensemble des traces de $\mathcal{A}$ sur V.
On note $[A, B] = AB - BA$ et $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \mathrm{Vect}(\{[A, B] \mid (A; B) \in \mathcal{A}^2\})$.

1. On dit que A est équivalent à B si $A - B \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. Montrer que cette relation est effectivement une relation d'équivalence.
2. On note $L[\mathcal{A}]$ l'ensemble des classes d'équivalence et on considère l'application T de $\mathcal{A}$ dans $L[\mathcal{A}]$ qui à un élément associe sa classe d'équivalence. Montrer que $L[\mathcal{A}]$ est un espace vectoriel et que T est sa trace.
3. Soit $\tau \in T(\mathcal{A}, V)$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{\tau} \in L(L[\mathcal{A}], V)$ tel que :
   $$\forall A \in \mathcal{A},\ \tau(A) = \overline{\tau}(T(A)).$$
4. Montrer que $T(\mathcal{A}, V) \cong L(L([\mathcal{A}], V)$.

1324 **X 2022**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est un *diviseur de zéro* lorsqu'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.

1. Montrer que si A est fini et sans diviseur de zéro, alors A est un corps.
2. Soit $f \in A[X] \setminus \{0\}$. Montrer que si f est un diviseur de zéro, alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $af = 0$.

1325 **Centrale-Supélec MP**

1. Rappeler la définition de φ la fonction indicatrice d'Euler et calculer $\varphi(1176)$.
2. Soit $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un multiple de $p_1 p_2 \cdots p_r$. Calculer le cardinal de l'ensemble

$$E(q; p_1; \dots; p_r) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant q \text{ et } k \wedge p_1 p_2 \cdots p_r = 1\}.$$

3. En déduire une propriété connue de la fonction indicatrice d'Euler.

1326 **ENS MP 2018**

Soit f un morphisme de groupe de $\mathbb{U}$ muni du produit usuel, dans lui-même.

1. Supposons f injectif. Montrer que f est l'identité ou l'application $z \mapsto z^{-1}$.
2. Dans le cas général, montrer que f est de la forme $z \mapsto z^n$, où n est fixé dans $\mathbb{Z}$.

1327 **ENS MP 2024**

On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1. On définit :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe.
2. Montrer que S et T engendrent $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$.
3. On admet que $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$. Déterminer sa décomposition avec les matrices S et T.

1328 **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^d = I_n$. On pose $A = \dfrac{M - I_n}{3}$.

   Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe une constante K_n qui majore le cardinal de tous les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{Z})$.

1329 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit p un premier impair.

1. Montrer que le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est $\frac{p+1}{2}$.
2. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.
3. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est somme de deux carrés.

1330 **ENS MP 2015**

Déterminer les entiers n vérifiant $n^2 \mid 2^n + 1$.

1331 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

Pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose $\mathcal{F}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)X^k$ et $\hat{\mathcal{F}}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})X^k$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2. Calculer $\mathcal{F} \circ \hat{\mathcal{F}}$. Montrer que $\mathcal{F}$ induit un automorphisme sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Exprimer sa réciproque.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que :
   (a) $\forall z \in \mathbb{U}_n$, $|P(z)| \leqslant 1$;
   (b) P admet une racine dans $\mathbb{U}_n$.

   Montrer que $X^n - 1$ divise P.

   On admet que si $A, P \in \mathbb{Z}[X]$, $A \neq 0$ et A de coefficient dominant 1 ou -1, le reste R dans la division euclidienne de P par A est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

1332 **TPE/EIVP MP 2013**

Montrer que :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a \equiv b \mod n \implies a^n \equiv b^n \mod n^2.$$

1333 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère comme loi la multiplication matricielle. Décrire G, inclus dans $M_n(\mathbb{R})$, tel que G soit un groupe.

1334 **ENS MP 2015**

1. Soit G un groupe fini. Soit f un automorphisme involutif dont le seul point fixe est e. Montrer que G est abélien.
2. Soit G un groupe abélien fini. Tous les automorphismes involutifs ont-ils seulement e comme point fixe ?
3. Soit G un groupe fini et $a \in G$. On suppose que a est d'ordre 2, et tel que pour tout $x \neq e$ et $x \neq a$, $ax \neq xa$. Que peut-on dire ?

1335 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}^*$, deux à deux premiers entre eux.

1. On pose, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, $c_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} a_i$.

   Montrer que les c_k sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. Soit $b \in \mathbb{Z}$.

   Montrer qu'il existe un unique $(y; x_1; \dots; x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$, avec $0 \leqslant x_k < a_k$ pour tout k, tel que :
$$\frac{b}{a_1 \cdots a_r} = y + \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k}{a_k}.$$

1336 **X MP 2018**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d(k)$ le nombre de diviseurs positifs de k. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n\ln(n) + n(2\gamma - 1) + O(\sqrt{n}),$$

où γ est la constante d'Euler.

1337 **ENS Lyon MP 2022**

Soit p un nombre premier. On note pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-v_p(q)}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} |xy|_p = |x|_p|y|_p \\ |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p; |y|_p) \end{cases}$$

   Que peut-on dire si $|x|_p \neq |y|_p$?

   On note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance associée à $|\cdot|_p$.

2. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est un corps.
3. Montrer que pour toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}_p$, la suite $(|u_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge} \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

5. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes en tant que corps.

1338 **X MP 2021**

Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les carrés de l'anneau $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.

1339 **X MP 2021**

À quelle condition une permutation de $\{1; \ldots; n\}$ est-elle un carré ?

1340 **X MP 2021**

Soit G un groupe d'ordre 8 non cyclique.

1. Montrer que G admet un élément d'ordre 2 et que tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4.
2. On suppose que tous les éléments sont d'ordre au plus 2. Que dire de G ?

   On suppose désormais qu'il existe un élément a d'ordre 4. On note H le sous-groupe engendré par a.

3. Montrer que $xHx^{-1} = H$ pour tout $x \in G$.
4. Soit $b \in G \setminus H$. Montrer que bab^{-1} vaut a ou a^3.
5. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, au plus cinq groupes d'ordre 8.
6. Exhiber cinq groupes d'ordre 8 deux à deux non isomorphes.

1341 **ENS MP 2022**

On note $A = \mathbb{C}[X,Y]$. Pour tout $v \subset \mathbb{C}^2$, on pose :

$$I(v) = \{P \in A \mid \forall (x;y) \in v,\ P(x;y) = 0\}.$$

1. Soit $v \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que $I(v)$ est un idéal de A.
2. On pose $P(X;Y) = Y - X^2$, et on note :

$$v(P) = \{(x;y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x;y) = 0\}.$$

Montrer que $A/I(v(p))$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

1342 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(a) = 0$.

1. (a) Montrer que $\{Q(a) \mid Q \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
   (b) Que peut-on dire de sa dimension ?
2. Montrer que c'est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

1343 **ENS Ulm MP 2019**

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et S_n le groupe des permutations de $\{1;\dots;n\}$. On définit :

$$g(n) = \max_{\sigma \in S_n} \left(\min\left(\{k \geqslant 1 \mid \sigma^k = \mathrm{Id}\}\right)\right).$$

Déterminer les entiers naturels n tels que $g(n)$ est impair.

1344 **X MP 2023**

Pour $\sigma \in S_n$, on note $z(\sigma)$ l'ensemble des éléments de S_n commutant avec σ.

1. Montrer que $z(\sigma)$ est un groupe, puis que pour tout automorphisme ϕ de S_n, $z(\phi(\sigma)) = \phi(z(\sigma))$.
2. Déterminer le cardinal de ce groupe pour une transposition et pour une composition de transpositions à supports disjoints.
3. Montrer que si $n \neq 6$, alors pour toute transposition σ et pour tout automorphisme ϕ de S_n, $\phi(\sigma)$ est une transposition.

1345 **ENS MP 2018**

On considère un anneau commutatif A. On suppose que A possède n diviseurs de zéro, avec $n > 1$.

1. Montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments.
2. Trouver une infinité d'anneaux du même type que A, et qui ont exactement $(n+1)^2$ éléments.

1346 **ENS MP 2018**

Classifier les sous-groupes de $\mathbb{U}$.

1347 **ENS MP 2017**

Soit n un entier naturel non nul. Exprimer la permutation qui à k associe $n+1-k$ à l'aide de transpositions de la forme $(i \;\; i+1)$.

1348 **X MP 2018**

Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $(*)$ l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ dont on cherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. (a) On suppose $d \leqslant 0$. Résoudre $(*)$.
   (b) On suppose $\sqrt{d} \in \mathbb{N}$. Résoudre $(*)$.

   On suppose dans la suite $d > 0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.
2. (a) Soit $(x_0; y_0)$ une solution de $(*)$ telle que $y_0 \neq 0$. On pose $z = x_0 + y_0\sqrt{d}$.
      i. Montrer que $|z| \neq 1$.
      ii. Montrer que l'on peut construire une suite $(x_n; y_n)$ de couples d'entiers telle que pour tout entier naturel n on ait $z^{n+1} = x_n + y_n\sqrt{d}$.
   (b) En déduire que l'équation $(*)$ admet une infinité de solutions.
3. On admet le résultat suivant :

   Pour tout α réel irrationnel, il existe une infinité de rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, tels que $0 < |\alpha - r| < \frac{1}{q^2}$.

   Montrer qu'il existe une solution $(x_0; y_0)$ de l'équation $(*)$ telle que $y_0 \neq 0$.

1349 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant 4$, la matrice $A + kB$ soit inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il en est de même pour la matrice $A + 5B$.

1350 **ENS MP 2013**

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p \geqslant 3$ premier, et v un entier avec $0 < v < p-1$.

1. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{K}$ tel que $y^v \neq 1$.
2. Calculer, pour $u \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{K}} x^u$.

1351 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$, scindés dans $\mathbb{C}[X]$, que l'on pourra écrire :

$$P = a\prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad Q = b\prod_{k=1}^{s}(X - \beta_k),$$

où les α_k sont deux à deux distincts et les β_k sont deux à deux distincts.

On pose $x = \alpha_1$ et $y = \beta_1$, et pour tout $t \in \mathbb{Q}$, $z_t = x + ty$ et $R_t = P(z_z - tX)$.

1. Justifier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $R_{t_0}(y) = 0$ et pour tout $j \geqslant 2$, $R_{t_0}(\beta_j) \neq 0$.

   On pose $\mathbb{Q}[z_{t_0}] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\{z_{t_0}^m \mid m \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{C}$. On admet que $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$ est un corps.
3. Montrer que x et y appartiennent à $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$.

1352 **ENS MP 2015**

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-groupe propre de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont congrus à aucun élément de H modulo q.

1353 **X MP 2020**

On considère un corps quelconque $\mathbb{K}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

1. Soit A l'ensemble des combinaisons linéaires dans $\mathbb{K}$ des matrices I_2 et J. Que dire de la structure algébrique de A ?
2. Soit B l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec tout élément de A. Que dire de B ?

   Dorénavant, on cherche à résoudre l'équation $X^n = J$ dans $M_2(\mathbb{K})$ en distinguant selon si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer un isomorphisme d'anneaux entre A et un autre ensemble classique. En déduire la résolution de l'équation $X^n = J$ et son nombre de solutions.
   (b) En fait, quelle est la structure algébrique de A ici ?
4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) L'ensemble A garde-t-il la même structure algébrique ?
   (b) En s'inspirant de la méthode de 3(a), résoudre de nouveau l'équation $X^n = J$ et dénombrer l'ensemble des solutions.

8 Algèbre linéaire

1354 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Calculer :

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

1355 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de f.

1356 **X PC 2012**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les matrices A et B ont une valeur propre commune.

ii) Il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

1357 **X**

Calculer :

$$\det\left(\left(\mathrm{pgcd}(i,j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

1358 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ un entier.
Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A = \mathrm{com}(A)$, où $\mathrm{com}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

1359 **Mines-Ponts MP**

Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que la matrice A est nilpotente.

1360 **ENS 2024**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que $M^k = A$. Que dire de la matrice A ?

1361 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux vecteurs de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. On pose $M = XY^T$.
Étudier la diagonalisabilité de M.

1362 **X-ENS**

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé uniquement de matrices diagonalisables ?

1363 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices U et V dans $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

1364 **X**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^T = \mathrm{Tr}(X)A$, d'inconnue X.

1365 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. L'égalité $(AB)^2 = 0$ implique-t-elle $(BA)^2 = 0$?

1366 **ENS PC**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose que

$$\mathrm{Tr}(A) = 3,\ \mathrm{Tr}(A^2) = 5,\ \mathrm{Tr}(A^3) = 9.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices M appartenant $M_3(\mathbb{R})$, symétriques et telles que $\mathrm{Tr}(AM) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A^2M) = 3$. Déterminer $\min\{\mathrm{Tr}(M^2) \mid M \in \mathcal{E}\}$.

1367 **Mines/Centrale**

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit p, q, r trois projecteurs de V tels que $p = \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$. Montrer que $p = q = r = 0$.

1368 **Mines-Ponts**

Montrer que la famille $\{|x-a| \mid a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1369 **Mines 2014**

Soit A une matrice carrée réelle. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Montrer que la matrice B est diagonalisable et de spectre inclus dans $\{0; 1\}$.

1370 **Mines-Ponts MP/PC 2023**

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}| \leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

1371 **Mines-Ponts MP 2008**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de taille n :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

1372 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible.
   Montrer que AB et BA sont semblables.
2. Que dire si A n'est pas inversible ?

1373 **ENS PC 2023**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Si $A + \mathrm{i}B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Si les matrices A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

1374 **Mines-Ponts MP**

Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A+M) = \det(A)+\det(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1375 **Mines-Ponts PC**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, N \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A et B commutent. Factoriser $A^n - B^n$.
2. On suppose N nilpotente. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible.
3. On suppose N nilpotente et $AN = NA$. Montrer que $A - N$ est inversible si et seulement si A est inversible.

1376 **Mines**

Soit $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice BA est diagonalisable.

1377 **Mines-Ponts MP**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ possédant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $|\lambda| < 1$

ii) La suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

iii) La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} M^k$ converge.

1378 **CCP MP**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $X^3 - X - 1$ admet une seule racine réelle et strictement positive.
3. En déduire que $\det(A) > 0$.

1379 **Mines-Télécom MP**

Soit p un nombre premier.
On note $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}_2[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant 2\}$.

1. Calculer $\mathrm{Card}(\mathbb{K}_2[X])$.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$ non scindés.
3. En déduire qu'il existe des matrices de $M_2(\mathbb{K})$ non trigonalisables.

1380 **Mines-Ponts PC**

Calculer, en fonction de n, le nombre de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et à coefficients entiers.

1381 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que n est pair.

1382 **CCP PSI 2005**

Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}.$$

1383 **Mines-Télécom 2019**

Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n de deux manières différentes.

1384 **X MP**

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. On pose $r = p + q - pq$. Montrer que r est un projecteur. Trouver son image et son noyau.

1385 **Mines**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

1386 **X PC/MP PSI 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\mathrm{Tr}(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}(A)\mathrm{Tr}(A^2)$.

1387 **CCINP MP 2023**

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) Il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que cf est un projecteur.
   ii) $f \circ f \neq 0$
   iii) $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$

1388 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation matricielle dans $M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} M^5 = M^2 \\ \mathrm{Tr}(M) = n \end{cases}$$

1389 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$ telle que $M^n = I_2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

1390 **CCP MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
On considère l'application

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Caractériser $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

1391 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1392 **Mines-Ponts PSI 2019**

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit V le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à V.

1393 **Mines-Ponts PSI**

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de V. Prouver que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

1394 **X PC 2016**

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant n < p$, $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.
Que dire de $\det(AB)$?

1395 **Mines-Ponts**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

1396 **CCINP MP**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base ordonnée de E.
Soit encore f l'application définie, pour tout $x \in E$, par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, que f est symétrique, bijective et que f admet des valeurs propres toutes strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (g(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

1397 **X PC 2020**

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux vecteurs non nuls de E. Montrer que

$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\max\left(\|x\|; \|\,y\|\right) \cdot \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

1398 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que la matrice A est nilpotente.

1399 **CCINP MP**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 3$.
Soit a et b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E.
Soit encore u l'application définie, pour tout $x \in E$, par :

$$u(x) = \langle x, a\rangle b + \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$.
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
4. Déterminer les extrema de $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{\langle x, a\rangle \cdot \langle x, b\rangle}{\|x\|^2}$.

1400 **Mines-Ponts MP**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que, pour tout $(A;B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $f(A) = 0$

ii) $A \notin GL_n(\mathbb{K})$

1401 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

1402 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant tous ses coefficients égaux à 1.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(A+tH)\det(A-tH) \leqslant \det(A^2)$.

1403 **Centrale PC 2010**

Soit $\mathcal{B} = (e_1;\dots;e_n)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$, où $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{R}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les composantes de u dans la base $\mathcal{B}$ pour que le n-uplet $(e_1+u;\dots;e_n+u)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

1404 **X PC 2015**

Soit f un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
On suppose que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Montrer que f est soit injectif, soit nul.

1405 **X PC 2020**

Soit G un sous-ensemble fini de $GL_n(\mathbb{R})$, non vide et stable par produit.

1. Montrer que $I_n \in G$. Soit $A \in G$. Montrer que $A^{-1} \in G$.
2. On pose $P = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(G)} \displaystyle\sum_{A \in G} A$.
   (a) Soit $A \in G$. Montrer que $AP = PA$ et que P est un projecteur.
   (b) Déterminer les ensembles G tels que $P = I_n$.

1406 **Centrale 2018**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite à *diagonale strictement dominante* lorsque :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible.

1407 **X PC 2020**

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leqslant n$ et $\mathbb{K}$ un corps. Soit encore $A \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$. On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

1. Calculer D.
2. Calculer BA.

1408 **Mines-Ponts MP/PSI**

Quel est le nombre minimal de coefficients à modifier sur une matrice inversible pour la rendre non inversible ?

1409 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

1410 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A + M)$.
   On pourra commencer par le cas où $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
4. Le résultat est-il toujours valable si A et M ne commutent pas ?

1411 **ENS**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que u admet un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables. Combien y en a-t-il ? Décrire ces sous-espaces.

1412 **X**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n. Montrer que u admet exactement $n + 1$ sous-espaces vectoriels stables, et que ce sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

1413 **Mines-Ponts**

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$. On suppose que le rang de u est fini. Montrer que le rang de u est pair.

1414 **X-ENS**

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en la matrice identité.

1415 **CCINP**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$ et α, β, γ non nuls.

1. Montrer que $\chi_B = \chi_{\gamma A} \cdot \chi_{-\beta A}$.
2. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.
3. Justifier que pour $\alpha = -1$, $\beta = 3$, la matrice B est diagonalisable, puis la diagonaliser.

1416 **Mines/Centrale**

Soit Φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini, pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, par $\Phi(A) = A^T$. Déterminer $\det(\Phi)$ et $\mathrm{Tr}(\Phi)$.

1417 **ENS PC 2024**

Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$:

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1418 **Centrale**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, g un endomorphisme de E de rang 1 et $f \in GL(E)$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $f + g \in GL(E)$

ii) $\mathrm{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$

1419 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.
Montrer que $p + \mathrm{rang}(I_n + AB) = n + \mathrm{rang}(I_p + BA)$.

1420 **Mines-Ponts 2019**

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : E \to E$ défini par $D(f) = f'$.
Existe-t-il un endomorphisme φ de E tel que $\varphi^2 = D$?

1421 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\Phi(M) = \alpha M + \beta M^T.$$

1. Montrer que Φ induit un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer le déterminant de Φ. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ appartienne à $GL(M_n(\mathbb{R}))$.
3. Déterminer sous réserve de sens Φ^{-1}.

1422 **X MP**

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f, g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{rang}(g) \leqslant \mathrm{rang}(f)$

ii) Il existe un automorphisme h de F et un endomorphisme k de E vérifiant l'égalité $h \circ g = f \circ k$.

1423 **X PC 2013**

Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

1424 **X PC**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que le déterminant de A est égal au déterminant de la matrice $(a_{ij} + \lambda)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$.

1425 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit u, v deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices u et v sont simultanément diagonales.
2. Plus généralement, soit $u_1, \ldots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

1426 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que u ne laisse stable aucun hyperplan de E.

1427 **Mines**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que n est pair et que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}_-$.

1428 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et $n_1, \ldots, n_r$ leur multiplicité.

1. Calculer la dimension de $\mathbb{K}[A]$ et celle du commutant de A noté $C(A)$.
2. Montrer que $\dim(C(A)) = n$ si et seulement si $r = n$ si et seulement si $C(A) = \mathbb{K}[A]$.

1429 **X-ENS**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que l'algèbre des endomorphismes de E est simple.

1430 **CCINP PSI 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A^TA)^2 = I_n$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que A est symétrique.
3. Montrer que $A = I_n$.

1431 **Mines-Télécom MP**

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $N \in M_2(\mathbb{C})$ non nulle, nilpotente et vérifiant $A = \alpha I_2 + N$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1432 **X PSI**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1\,; n-1]\!]$ et $u(e_n) = 0$.
Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u.

1433 **Mines-Ponts PSI 2018**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Soit $(t_0; t_1; \ldots; t_n)$ un $(n+1)$-uplet de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $(P(X+t_0); P(X+t_1); \ldots; P(X+t_n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

1434 **Mines-Ponts**

Soit un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Soit $n+1$ nombres réels distincts $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P(\alpha_0 X); P(\alpha_1 X); \ldots; P(\alpha_n X))$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1435 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout A et B appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge vers une matrice que l'on notera e^A.
2. Montrer que $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

1436 **X ESPCI 2024**

Montrer que l'espace vectoriel

$$\left\{ f \in D^1(]0\,; +\infty[, \mathbb{R}) \mid \forall x > 0,\ f(x) = x f'\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

est de dimension infinie.

1437 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel. Donner une base.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?
3. Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i;j) \in \{1;\dots;p\}^2$, $a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$.
   Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1438 **ENS PC 2019**

Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{e}^M = -I_n$.

1439 **X**

1. Soit $a_1, \dots, a_p$ des réels distincts deux à deux et $c_1, \dots, c_p$ des réels non tous nuls. On pose $f(t) = c_1\mathrm{e}^{a_1 t} + \dots + c_p\mathrm{e}^{a_p t}$. Montrer que f admet au plus $p-1$ zéros.
2. Soit $a_1 < \dots < a_p$ et $b_1 < \dots < b_p$ des réels.
   On pose $M = \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Montrer que $\det(M) > 0$.

1440 **X-ENS**

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit la suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ en posant $A_0 = A$ et pour tout $k \geqslant 1$:

$$A_k = A\left(A_{k-1} - \frac{1}{k}\mathrm{Tr}(A_{k-1})I_n\right).$$

Montrer que $A_n = 0$.

1441 **Centrale MP 2007**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux annule la matrice A.
2. En déduire que si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors A est diagonalisable. Que dire si $\mathrm{Tr}(A) = 0$?
3. Montrer que la matrice $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

1442 **X**

Soit E une espace vectoriel complexe de dimension supérieure ou égale à 1, et u un endomorphisme de E. Montrer l'existence d'un unique couple $(d;n)$ d'endomorphismes de E tel que :

- $u = d + n$,
- d et n commutent,
- d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

1443 **ENS Ulm MP**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et $X = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que λx_i est encore une composante de X de module maximal.
2. En déduire que λ est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité avec $m \leqslant n$.
3. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. Montrer que la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

1444 **Mines-Ponts PSI**

Soit la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ?

1445 **X MP 2022**

Soit Φ l'endomorphisme « *moyenne de Cesàro* » de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Déterminer le spectre, les sous-espaces propres et l'expression des vecteurs propres de l'endomorphisme Φ.

1446 **X MP 2006**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\text{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\text{sim}(A)}$.

1447 **Mines**

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ et on note :

$$P_A(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(A) X^{n-k}.$$

1. Rappeler l'expression de χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
2. Que valent $c_0(A)$ et $c_1(A)$?
3. Montrer que $c_2(A) = \dfrac{\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)}{2}$.

1448 **Mines-Ponts**

Cas particulier :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Soit encore $M = AB^T + BA^T$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de M.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 et montrer qu'il est orthogonal à $\mathrm{Vect}(\{A; B\})$. (L'espace est muni du produit scalaire canonique.)

Cas général :

Soit A et B appartenant à $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ linéairement indépendants.

1. Montrer que $M = AB^T + BA^T$ est diagonalisable.
2. Montrer que 0 est une valeur propre de M et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Donner une condition (suffisante) pour que $A+B$ soit un vecteur propre de M.

1449 **ENS MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{sim}(A)$ est fermée.

1450 **CCP MP**

1. Soit $P(X) = X^n - X + 1$. Montrer que le polynôme P admet n racines complexes distinctes $z_1, \ldots, z_n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que $\det(A) = 2 \cdot (-1)^n$.

1451 **Mines-Ponts MP**

Soit $(e_i)_{i\in\{1;\ldots;n\}}$ une famille libre dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On suppose que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, $\|e_i\| \leqslant 1$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, $\|e_i\| \geqslant 1$.
3. En déduire que $(e_i)_{i\in\{1;\ldots;n\}}$ est une base orthonormée de E.

1452 **Centrale PC 2024**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, on définit $G : E \to E$ par :

$$G(f)(x) = \int_0^1 \min(x;t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est bien défini et est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de G.
3. Déterminer les éléments propres de G.

1453 **CCP MP**

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x\rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On considère :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle \end{array}$$

   (a) Montrer que les dérivées partielles de g existent, et les calculer.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique z.
   (c) Montrer que g admet un minimum en z.

1454 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall (x;y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

1455 **Centrale MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $r \in [\![1\,;n]\!]$. Calculer $\mathrm{com}(\mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ un}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-r \text{ zéro}}))$.
2. Montrer que pour tout $(A;B) \in E^2$, $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$.
3. En déduire $\mathrm{rang}(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\mathrm{rang}(A)$.
4. Soit $\varphi : E \to E$, $A \mapsto \mathrm{rang}(A)$.
   L'application φ est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.

1456 **CCINP PC 2021**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle T, P\rangle = P(0)$.

1457 **CCP MP**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 3$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de M_a. Donner une valeur propre évidente de M_a et sa multiplicité.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.
   Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ en fonction de M.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M_a soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

1458 **X-ENS**

1. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det\Big((x_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) telle que $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrer que A est nilpotente.

1459 **CCINP MP 2023**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

1460 **Mines-Télécom PSI 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

1461 **X**

Trouver une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes périodiques.

1462 **X MP**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On dit qu'un endomorphisme u de E est un *opérateur positif* (ce que l'on note $u \geqslant 0$), si $u(f) \geqslant 0$ pour tout $f \geqslant 0$.

1. Soit u un endomorphisme positif de E. Montrer que u est continu.
2. Soit $f \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x;y) \in [0\,;1]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon + c(y-x)^2.$$
3. (*Théorème de Korovkin*)
Pour tout $\in \mathbb{N}$, on note e_k l'élément de E défini par $e_k : x \mapsto x^k$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs positifs de E.
On suppose que pour $k \in \{0;1;2\}$, la suite de fonctions $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e_k dans $(E, \|\cdot\|)$.
Montrer que pour tout $f \in E$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

1463 **X-ENS**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

1464 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

1. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda = 0$.
2. On suppose que A commute avec A^T. Montrer que A est la matrice nulle.

1465 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que A est *positive* (resp. *définie positive*) si
$$\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^TAX \geqslant 0 \quad (\text{resp. } X^TAX > 0)$$

1. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1466 **X ESPCI**

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) = \mathrm{rang}(f+g)$

ii) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$

1467 **CCINP 2023**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Trouver des endomorphismes diagonalisables f de E vérifiant $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0$.

1468 **X-ENS**

Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

1469 **X ESPCI 2023**

Soit $n \geqslant 3$ un naturel impair et $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Pour $(\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $M = \alpha A + \beta A^T$. Montrer que $\det(M)$ est un multiple de $\alpha + \beta$.

1470 **Mines**

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice A.

1471 **CCINP PC 2023**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = u^2$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u est un projecteur.

1472 **CCP MP**

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$.
Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
Soit g l'endomorphisme de E tel que $A^T = (g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

1. (a) Montrer que :
$$\forall (x; y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$
   (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Soit $y \in E$.
   (a) Si $f(y) = y$, montrer que $\|g(y) - y\|^2 = \|g(y)\|^2 - \|y\|^2$.
   (b) En déduire que $f(y) = y$ si et seulement si $g(y) = y$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)^{\perp}$.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \boxplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

1473 **Mines MP 2024**

Calculer $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Vect}(\mathbb{U}_5))$, où $\mathbb{U}_5 = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{5}} \mid 0 \leqslant k \leqslant 4 \right\}$.

1474 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $f \circ f = 0$. Montrer que $\operatorname{rang}(f) \leqslant 2$.

1475 **Mines**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire. Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que p et q ont une droite propre commune.

1476 **CCINP MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ appartenant à $\mathbb{C}$ et

$$M(a_0; \ldots ; a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $J = M(0; 1; 0; \ldots ; 0)$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J. Montrer que J est diagonalisable.
2. Montrer que $M(a_0; \ldots ; a_{n-1})$ est un polynôme en J. La matrice $M(a_0; \ldots ; a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ?
3. Soit $\mathcal{T} = \{M(a_0; \ldots ; a_{n-1}) \mid (a_0; \ldots ; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?

1477 **X PC 2020**

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1478 **Mines-Ponts**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. On suppose que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

1479 **Mines-Télécom MP**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $B \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telles que $AB = BA$.
La norme euclidienne sur $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est notée $\|\cdot\|$.

1. Soit $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(AX)^T BX = 0$, puis que :

$$\|(A + B)X\| = \|(A - B)X\|.$$

Pour la suite, on suppose en plus que $B \in GL_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $A + B$ et $A - B$ sont inversibles.
3. Montrer que $(A + B)(A - B)^{-1}$ est orthogonale.

1480 **Mines-Télécom MP**

Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E tel que, pour tout $(x; y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

1. Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.
2. Soit a une valeur propre de s et V_a l'espace propre associé.
   (a) Soit $x \in V_a \setminus \{O_E\}$. Montrer que $\langle s(x), x\rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$.
   (b) En déduire que $a < 0$.
   (c) Soit $F = \text{Vect}(\{x; f(x)\})$. Montrer que F et $F^\perp$ sont stables par f.
3. Montrer que $\dim(F) = 2$.

1481 **CCP MP**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un vecteur non nul de E. On pose $H = u^\perp$. Soit encore s la réflexion (la symétrie orthogonale) par rapport à H et $f \in O(E)$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie, et déterminer ses espaces propres caractéristiques.
2. Montrer que f et s commutent si et seulement si u est un vecteur propre de f.
3. En déduire l'ensemble $\mathcal{C} = \{f \in O(E) \mid \forall g \in O(E), f \circ g = g \circ f\}$.

1482 **CCP MP**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes, et g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g.
2. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que $P(f) = g$.

1483 **CCP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et soit $\mathcal{B} = \{e_1; \ldots; e_n\}$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Avec les données de l'énoncé, exprimer $\text{Tr}(f)$.

1484 **Centrale**

Trouver les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $MM^TM = I_n$.

1485 **Mines-Ponts**

Soit A et B deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ n'ayant pas de valeur propre commune.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = Y$.

1486 **Mines PSI 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que :
$$\mathrm{Im}(u) = F \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = G \iff \dim(F) + \dim(G) = n$$
2. Dans cette question $n = 3$, F est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}(\{(1; -1; 0)\})$. Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G.

1487 **X PC 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$

ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} O_p & I_p \\ O_p & O_p \end{pmatrix}$$
où O_p désigne la matrice nulle de $M_p(\mathbb{K})$.

1488 **ENS PSI 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0\,;\pi[$. On considère les deux matrices suivantes appartenant à $M_n(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \text{\huge 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\theta = 2\cos(\theta) I_n + A.$$

1. Montrer que $\det(B_\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
2. En déduire que la matrice A admet n valeurs propres distinctes. Calculer ces valeurs propres.

1489 **ENS MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, $\det(A + M) = 0$. Montrer que M est antisymétrique.

1490 **X PC 2012**

Soit $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des nombres complexes distincts et pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x}$. Montrer que $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

1491 **X PC 2012**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_p$ appartenant à $\mathbb{K}$ tels que

$$A^{-1} = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p.$$

Autrement dit, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

1492 **X PC 2014**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u et v deux projecteurs de E. On suppose que $\mathrm{Id}_E - u - v$ est inversible. Montrer que $\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(v)$.

1493 **X PC 2019**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Sous quelle condition la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

1494 **X PC 2019**

Soit $q \in \mathbb{R}^*$ et

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & q(q+1) \\ q(q-1) & -q \end{pmatrix}.$$

1. Soit p et q deux nombres réels non nuls et distincts. Les matrices $A(p)$ et $A(q)$ sont-elles semblables ?
2. Même question pour les matrices $B(q) = q^{-2}A(q)$.
3. On considère les matrices $C \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = (A(q))^2$. Combien parmi celles-ci ne sont pas semblables à $A(q)$?

1495 **X PC 2019**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g.$$

Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

1496 **X PC 2019**

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et u^2 soit non nul. Trouver l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u.

1497 **CCP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calcul, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1498 **CCP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $2A^3+3A^2+6A-I_n=0$. Justifier les propositions suivantes :

1. A est inversible ;
2. A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$;
3. $\det(A)>0$

1499 **CCP 2015**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A=0$.
Que peut-on dire du rang de A ?

1500 **CCP 2015**

Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$, de trace égale à 7 et vérifiant l'égalité $A^3-5A^2+6A=0$.

1501 **Mines-Ponts 2015**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E sans point fixe autre que le vecteur nul, tel que f^2-2f est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

1502 **X-ENS 2015**

Trouver toutes les racines carrées de $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1503 **Centrale 2015**

Résoudre dans $M_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^2+M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

1504 **Mines 2015**

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -6\\ 0 & 3 & 6 & 9\\ 7 & 3 & 13 & 9\\ 4 & 2 & 8 & 6\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Trouver $P, Q \in GL_4(\mathbb{R})$ telles que $PAQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1505 **Mines 2015**

À quelle(s) condition(s) la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & a & b & c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

1506 **Mines 2015**

Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1507 **CCP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $AM - MA$.
2. L'endomorphisme $f : M \mapsto AM - MA$ est-il diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

1508 **CCP 2015**

Montrer qu'une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ a un indice de nilpotence inférieur ou égal à n. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1509 **CCP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A + I_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \dim(E_1)$, où E_1 est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

1510 **CCP 2015**

On considère l'application f qui, à tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, fait correspondre le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Est-il diagonalisable ? injectif ?

1511 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé simple.

1. Montrer que la famille $\{I_n; A; \ldots; A^{n-1}\}$ est libre.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que B est une combinaison linéaire des matrices $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

1512 **CCP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une matrice R telle que $R^2 = A$. (On ne demande pas de calculer R.)
3. Montrer que toute matrice R appartenant à $M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ est diagonalisable.

1513 **Mines 2015**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[-1\,;1]$, à valeurs réelles. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f;g) & \longmapsto & f(0)g(0)+\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur E. Trouver une base orthonormée du sous-espace vectoriel $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(0)=0\}$.

1514 **CCP 2015**

On considère l'endomorphisme u de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ u(M)=\frac{1}{3}(2M-M^T).$$

1. Rechercher les éléments propres de u.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer $\mathrm{Tr}(u)$ et $\det(u)$.

1515 **Centrale 2015**

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace euclidien E. Soit $f:F\to G$ et $g:G\to F$ des applications linéaires telles que :

$$\forall(x;y)\in F\times G,\ \langle f(x),y\rangle=\langle x,g(y)\rangle.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(g)^{\perp}\cap F$.
2. Montrer que $F=\mathrm{Ker}(f)\boxplus\mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si g est surjective.
4. Montrer que g est injective si et seulement si f est surjective.

1516 **Centrale 2015**

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2\end{pmatrix}.$$

1517 **Centrale 2015**

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ et $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.

Montrer que A est une matrice de rotation si et seulement si il existe $h\in\left]0\,;\frac{4}{27}\right[$ tel que a,b et c soient les racines du polynôme X^3-X^2+h.

1518 **Centrale 2015**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix}$.

À quelle condition sur A, la matrice B est-elle diagonalisable ?
On pourra commencer par étudier le cas $n = 1$.

1519 **CCP 2015**

Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$. Soit encore $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On cherche à démontrer que M est semblable à A.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et donner son spectre. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1; j; j^2\}$.
   Montrer que j et j^2 ont la même multiplicité algébrique.
   En déduire les valeurs propres de M.
3. Montrer que M est semblable à A dans $M_3(\mathbb{C})$, puis dans $M_3(\mathbb{R})$.

1520 **Petites Mines 2015**

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ une base orthonormée de E. On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.
2. Déterminer la nature de f et ses caractéristiques géométriques.

1521 **Mines-Ponts 2015**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire

$$(P; Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \int_0^1 (t+x)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et qu'il est symétrique.

1522 **Centrale 2015**

On considère les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

$$u^2 = v^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \quad \text{et} \quad u \circ v = -v \circ u.$$

Montrer qu'il en existe une infinité si $n = 4$ et aucun si $n = 3$.

1523 **Mines-Ponts**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| < n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

1524 **X-ENS PC 2019**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer qu'il existe un élément v de E tel que $\{v; f(v); \ldots; f^{n-1}(v)\}$ soit une base si et seulement si f possède n valeurs propres distinctes.

1525 **X-ENS 2015**

Soit $(U_1; U_2; \ldots; U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Montrer que la matrice $A = (\langle U_i, U_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont strictement positives.

1526 **Centrale 2015**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On considère l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si A est nilpotente, f l'est aussi.
3. Montrer que si A est diagonalisable, f l'est aussi.

1527 **CCP MP**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f ;
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1528 **X MP 2021**

Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ semblables uniquement à elles-mêmes.

1529 CCP MP

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1 les éléments propres de B.

1530 CCP MP

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

1531 CCP MP

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le nombre réel 0 est-il valeur propre de la matrice A_n ?

1532 CCP MP

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\{I_2; A\})$.

1533 **CCP MP**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un vecteur unique y_0 tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

1534 **X MP 2021**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ dont toute valeur propre est de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(M^k)_{k \geqslant 0}$ converge vers 0.

1535 **CCP MP**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases},$$

   x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1 et en le justifiant, résoudre ce système.

1536 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base $(v_1; v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1537 **CCP MP**

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
   Soit u un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est une racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = M_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de E définie par
   $$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
   Soit u l'endomorphisme de E défini par :
   $$\forall M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A.$$
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1).

1538 **CCP MP**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire dans ℓ^2. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est un application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   (a) Déterminer $F^\perp$.
   (b) Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

1539 **Mines 2015**

Rechercher les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$, de trace nulle, telles que $M^2 + M^T = I_3$.

1540 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux;
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

1541 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on l'égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in C([a\,;b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a\,;b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

1542 **CCP MP**

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les endomorphismes u et v définis par
   $$u : P \longmapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v : P \longmapsto P'.$$
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

1543 **CCP MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1; X - a, (X - a)^2; \ldots; (X - a)^n)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   le nombre a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et pour tout $k \in [\![0\,; r - 1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
   (c) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

1544 **CCP MP**

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n \text{ avec } (u_0; u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

1545 **CCP MP**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

1546 **CCP MP**

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

1547 **Mines 2015**

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P(X)) = P(2-X)$. Déterminer les éléments propres de φ.

1548 **CCP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 - 7A^2 + 9A - 4I_n = 0$. Justifier les assertions suivantes :

1. A est inversible ;
2. A est diagonalisable ;
3. $\det(A) > 0$.

1549 **X MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $M \in M_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls et que les termes en dehors de la diagonale appartiennent à $\{-1; 1\}$. Montrer que la matrice M est inversible.

1550 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose, pour tout $(a; b) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$, où Tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

1551 **CCP MP**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   P polynôme annulateur de $u \implies PQ$ polynôme annulateur de u
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire le polynôme caractéristique de A.
   (b) En déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

1552 **CCP MP**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels.

1. La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
2. La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

1553 **CCP 2016**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f et g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que :

$$|\mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(g)| \leqslant \mathrm{rang}(f+g) \leqslant \mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g).$$

1554 **CCP MP**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

1555 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont des réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant :
$$\deg(P) \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0\,;n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0\,;n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que, pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

1556 **CCP MP**

On définit dans $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A; A') = \mathrm{Tr}(A^T A')$, où $\mathrm{Tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

1557 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

1558 **Mines PSI 2016**

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

1559 **CCP 2016**

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et U l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, U(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que U est un endomorphisme de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. L'endomorphisme U est-il surjectif ?
3. Déterminer le noyau de U.

1560 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

1561 **Petites Mines 2016**

Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie comme suit :

$$a_{ij} = \binom{j}{i} \text{ si } i \leqslant j \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

1562 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, π_A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

1563 **Mines PSI 2016**

Soit $A, B, M \in M_n(\mathbb{C})$, λ et μ deux nombres complexes non nuls et distincts tels que :

$$\begin{cases} A + B = I_n \\ \lambda A + \mu B = M \\ \lambda^2 A + \mu^2 B = M^2 \end{cases}$$

1. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

1564 **Mines 2016**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A^2 + A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

1565 **Mines 2016**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, G un sous-espace vectoriel de E. Déterminer la dimension de $W = \{u \in L(E, F) \mid G \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.

1566 **CCP 2016**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que :

$$H \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset H$$

2. Déterminer les sous-espaces de E stables par f, f étant un endomorphisme de E qui a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans une base $\mathcal{B}$.

1567 **CCP**

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $f(P)(X) = X(X+1)P'(X) - nXP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres de f.

1568 **CCP 2016**

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Déterminer la nature et les caractéristiques de f, endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1569 **Mines 2016**

On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions $S : x \mapsto \sin(x)$ et $C : x \mapsto \cos(x)$. On désigne par D l'application dérivation.

1. Montrer que F est stable pour D et qu'il existe un endomorphisme u de F tel que $u \circ u = \tilde{D}$, où $\tilde{D}$ est l'endomorphisme induit par D sur F.
2. Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = D$?

1570 **CCP**

Existe-t-il une base de $M_n(\mathbb{C})$ formée de matrices diagonalisables ?

1571 **CCP 2016**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. À quelle(s) condition(s) existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$?

1572 **ENSAM 2016**

Soit A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et $f : X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
3. Dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = -1$, trouver $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{rang}(f)$.
4. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Retrouver le résultat de la partie 2.

1573 **TPE/EIVP 2016**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1574 **TPE/EIVP 2016**

Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases}$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

1575 **Centrale 2016**

1. Écrire un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre inférieur ou égal à 4. Montrer que la matrice $I_n + N$ admet au moins une *racine carrée* dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = I_n + N$.

1576 **Centrale PSI 2016**

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme symétrique et est 1-lipschitzien.
2. On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux.
   (a) Prouver que le polynôme caractéristique de $p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme $p + q$ est-il nécessairement un projecteur ?
   (b) Montrer que les valeurs propres de $p + q$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;2]$.
3. Donner un exemple de problème faisant intervenir des projecteurs orthogonaux.

1577 **TPE/EIVP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est inversible et que $\det(A) > 0$.

1578 **CCP 2016**

On considère l'endomorphisme

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array}$$

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

1579 **CCINP 2024**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.
   Prouver que A est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset [0\,;+\infty[$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que A^2 est positive.
3. Soit A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose A symétrique et B symétrique positive. Montrer que :
   $$AB = BA \implies A^2B \text{ est symétrique positive}$$
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.
   Prouver qu'il existe une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, symétrique positive, telle que $A = B^2$.

1580 **CCINP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et de y, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que, pour tout $(x; y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.
   Autrement dit, $\mathcal{O}(E) = \{u \in L(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$.
   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit u un endomorphisme de E. Soit $e = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_1); u(e_2); \ldots; u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

1581 **X MP/PSI 2023**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
Montrer que $\det(A + B) \geqslant \max(\det(A); \det(B))$.

1582 **X MP/PSI**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

1583 **Mines-Télécom PC 2018**

Soit la matrice $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell \in \mathbb{R}$.

1584 **Mines-Télécom 2022**

On cherche à résoudre cet exercice avec le minimum de calculs possible.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Donner $\mathrm{rang}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
2. Soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Expliciter g.
3. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

1585 **Mines-Ponts 2022**

Soit $j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Combien de sous-espaces vectoriels stables par A existe-t-il ?
3. Étudier $C_A = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$.

1586 **ENSAM**

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et D l'application de dérivation :

$$D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
2. Montrer que D est nilpotent et calculer son indice de nilpotence.
3. On note I l'endomorphisme identité. Montrer que $I - D$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Résoudre dans E, puis dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'équation différentielle $y' - y = \frac{x^n}{n!}$.

1587 **X ESPCI**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$$

1588 **ENSIIE 2015**

On considère une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\det(A) = 10, \quad \mathrm{Tr}(A) = -6 \quad \text{et} \quad A - I_3 \text{ n'est pas inversible.}$$

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme de la matrice A.

1589 **CCINP**

Déterminer toutes les formes linéaires f de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A; B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

1590 **CCP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, non nulle.

1. Quel est le rang de la matrice A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général. On pose $B = 2A - \mathrm{Tr}(A)I_n$. Calculer le déterminant de B.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
5. Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

1591 **CCP 2017**

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant, pour A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
   Calculer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension.
4. Soit J la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à $\mathcal{H}$.

1592 **CCP 2017**

On considère une forme linéaire non nulle φ sur un espace vectoriel E et x_0 un vecteur non nul de E. On pose, pour tout $x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x)x_0$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Donner la dimension du sous-espace propre associé.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable. Indiquer alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

1593 **Petites Mines 2017**

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$$

Déterminer l'image de φ.

1594 **Mines-Ponts 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \text{ est symétrique} \iff A^T A = A^2$$

1595 **Centrale 2017**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, soit $X(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Soit $\omega_0 = 1$ et $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{èmes}}$ non réelles de l'unité.
   Montrer que la famille $\{X(\omega_0); \dots ; X(\omega_{n-1})\}$ est libre.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable.

1596 **Centrale 2017**

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel.
2. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de l'application dérivée $D : P \mapsto P'$ est composée seulement de 0 et 1.
3. (a) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.
   (b) Montrer que si $Q \geqslant 0$, alors $P \geqslant 0$.
   (c) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, alors Q l'est aussi.

1597 **Mines-Ponts 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$T : P \mapsto P(X+1) \quad \text{et} \quad S : P \mapsto P(1-X).$$

Trouver les vecteurs propres.

1598 **Mines 2017**

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et sa transposée sont semblables dans $M_3(\mathbb{R})$.

1599 **X-ENS PSI 2017**

1. Montrer que pour toutes matrices de $M_n(\mathbb{C})$, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
2. On considère deux endomorphismes inversibles f et g d'un espace vectoriel E. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$. On note E_λ le sous-espace propre de $f \circ g$ associé à la valeur propre λ et F_λ le sous-espace propre de $g \circ f$ associé à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.
   En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.
   (b) Montrer que si $f \circ g$ est inversible, $g \circ f$ l'est aussi.
3. Trouver deux matrices carrées X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX.

1600 **X ESPCI 2017**

1. Trouver une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq M$ et $M^2 = M^3 \neq 0$.
2. Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) > 0$ et $A^{-1} = A^T$.
   Montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = X$.

1601 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice réelle de taille 2 telle que $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
2. Montrer qu'il existe $k \in [\![0\,; 2n-1]\!]$ et P inversible dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}.$$

3. Montrer qu'il existe P pour la même relation, mais réelle.

1602 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $(a_0;\dots;a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ distincts deux à deux et $(A;B)\in M_n(\mathbb{C})^2$.
On définit :

$$\begin{array}{rccc}\Phi & : & \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}\\ & & P & \longmapsto & (P(a_0);\dots;P(a_n))\end{array}$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
   En déduire l'existence de polynômes $L_i\in\mathbb{C}_n[X]$ $(i\in[\![0\,;n]\!])$ tels que :
   $$\forall k\in[\![0\,;n]\!],\ k\neq i,\ L_i(a_k)=0 \text{ et } L_i(a_i)=1.$$
2. Exprimer le polynôme caractéristique de A en fonction des L_i.
3. Montrer que
   $$\begin{array}{rcccc}f & : & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n[X]\\ & & M & \longmapsto & \chi_M\end{array}$$
   est continue.
4. Montrer que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

1603 **ENSEA/ENSIIE PSI 2017**

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $p\in[\![1\,;n]\!]$ et $H_1,\dots,H_p$ des hyperplans vectoriels de E deux à deux distincts.
Montrer que $\dim\left(\bigcap\limits_{k=1}^{p}H_k\right)\geqslant n-p$.
Indication : considérer

$$\begin{array}{rcccc}\phi & : & H_1\times\cdots\times H_p & \longrightarrow & E^{p-1}\\ & & (x_1;\dots;x_p) & \longmapsto & (x_2-x_1;\dots;x_p-x_1)\end{array}.$$

1604 **CCP 2017**

Soit $A\in M_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3-3A^2+2A=0$, ainsi que $\operatorname{Tr}(A)=8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?
3. Donner une matrice diagonale semblable à A.
4. Déterminer le polynôme caractéristique et l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

1605 **CCP 2017**

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $M^2+M^T=I_n$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de M, et que M n'est pas inversible.
3. Montrer que M admet un polynôme annulateur de degré 2, que M est symétrique et de trace nulle.

1606 **X MP 2021**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

1607 **Mines-Ponts MP 2021**

Existe-t-il une norme N sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(A;B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$?

1608 **X PSI 2023**

Déterminer le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices orthogonales.

1609 **CCP 2012**

On considère trois nombres réels a, b, c et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Exprimer, suivant la parité de $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A ou de A^2.
   On pourra utiliser l'égalité $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
3. Montrer que $\exp(A) = I_3 + \dfrac{\sin(r)}{r}A + \dfrac{1 - \cos(r)}{r^2}A^2$.

1610 **Mines 2012**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \leqslant 0$.

1611 **Centrale 2012**

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = A^T$ et on pose $B = A^{n+1}$.

1. Montrer que B est symétrique et que ses valeurs propres sont positives.
2. (a) Calculer B^n.
   (b) En déduire les valeurs propres de B.
   (c) Quelle est la nature de B ? (On assimilera une matrice à son endomorphisme canoniquement associé.)
3. Montrer que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(B) + \mathrm{Im}(B)$ et que la somme est orthogonale.
4. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$ sont stables par A.
   (b) Montrer que l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Im}(B)$ est une isométrie.
   (c) Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Ker}(B)$?
5. Caractériser les matrices $A \in M_p(\mathbb{R})$ telles que $A^n = A^T$.

1612 **Centrale 2012**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que pour tout $P \in E$, il existe $Q \in E$, unique tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)Q(x) = \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t,$$
et que l'application f qui à P associe Q est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Trouver tous les endomorphismes de E tels que $g^2 = f$.

1613 **Mines-Ponts 2012**

Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si A admet un polynôme annulateur qui prend en 0 la valeur 1.

1614 **Mines 2012**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que si n est impair, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que si n est pair, alors $\det(A) \geqslant 0$. Sous quelle(s) condition(s) l'inégalité est-elle stricte ?

1615 **ENSEA/ENSIIE 2012**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2.
3. Donner les valeurs propres de A sans utiliser le polynôme caractéristique.

1616 **CCP 2012**

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ définie par blocs.

1. Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}$, puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi, et que ce n'est possible que si $A = 0$.

1617 **CCP 2012**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. À tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on associe $\Phi(P) : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(\Phi)$.

1618 **CCP 2017**

Soit $A \in \mathbb{R}^n$ une matrice colonne non nulle.

1. Montrer que $B = AA^T$ est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de B.
3. Calculer B^2.
4. Donner les éléments propres de A.
5. Calculer $\det(I_n + B)$ en fonction du vecteur A.

1619 **CCP 2017**

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1620 **CCP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Avec un minimum de calculs, déterminer les valeurs propres de A et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ semblable à A.
2. Montrer que si une matrice M commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

1621 **CCINP PSI 2021**

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E. Montrer que :

1. Si $\operatorname{rang}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si $\operatorname{rang}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1622 **ENS Rennes 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

1623 **CCP 2017**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

1. Que peut-on dire de u ?
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E solution de l'équation $(E) : g^2 = u$, alors tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de g.
3. Combien l'équation (E) admet-elle de solutions ?

1624 **Centrale PSI**

Soit $S : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.
2. L'application S est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s. L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

1625 **Centrale PSI**

Soit $M = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le polynôme minimal π_M de la matrice M.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ semblable à M.

1626 **Centrale PSI**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1627 **CCP**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

À quelle(s) condition(s) portant sur a et b, la matrice A est-elle diagonalisable ?

1628 **CCP PC**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

1629 **Petites Mines PC**

Soit $n \geqslant 2$ un entier, un nombre réel m et la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = 1$ si $(i;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;n-1]\!]$ et $a_{in} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. On suppose que $m \neq 1-n$. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $m = 1-n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{12} = 1$.

1630 **TPE/EIVP PC**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\Phi_A = 0$.
2. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.
3. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

1631 **CCP PC**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de E de rang r et $(e_1;\dots;e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$.

1632 **Centrale PSI**

Soit p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E. Soit encore $u = p + q$.

1. Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x, p(x)\rangle$ et $\langle x, q(x)\rangle$. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0\,;2]$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

1633 **TPE/EIVP PSI**

Soit S une matrice symétrique réelle et D une matrice diagonale dont tous les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose que S et D sont semblables. Calculer $\mathrm{Tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

1634 **CCP 2017**

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, non nul, tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que f n'est pas inversible.
2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(f)$, $(f(x); f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Calculer la trace de f.

1635 **TPE/EIVP PSI**

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$.

1636 **X**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$.

Étudier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.

1637 **CCP**

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?
3. Étudier la diagonalisabilité de A_m en général.

1638 **X ESPCI**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) = 0$ si et seulement s'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

1639 **Mines-Ponts PSI**

Soit E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E et f un sous-espace vectoriel de E stable par u. On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

1640 **CCP**

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère une matrice A symétrique réelle telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$. Étudier les valeur propres et la diagonalisabilité de A. Que peut-on en conclure ?

1641 **CCP**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Reconnaître f et donner ses caractéristiques géométriques.

1642 **CCP**

On définit l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A qui représente φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que A est inversible, et calculer A^{-1}.

1643 **CCP PSI**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E \iff \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$$

1644 **Mines-Ponts PSI**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe un endomorphisme g de E tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

1645 **X MP MPI**

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que :

1. l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;
2. $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q) + (\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p))$;
3. l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;
4. le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0\,;1]$.

1646 **Mines-Ponts**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant de taille n :

$$\Delta_n(a; b; c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que l'application $x \mapsto \Delta_n(a + x; b + x; c + x)$ est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Calculer $\Delta_n(a; b; c)$ en fonction de a, b, c et n.

1647 **Centrale PSI**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

1648 **Centrale PSI 2021**

Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?
2. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim(F) \leqslant n$.

1649 **TPE/EIVP PSI**

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (x-a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

1650 **Mines-Ponts PSI**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_n(\mathbb{R}), (\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(A^T A)\}$.
2. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(A^T A)\}$.

1651 **Mines-Ponts PC**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques.
Montrer que $2\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A^2) + \mathrm{Tr}(B^2)$.

1652 **CCP PC**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \mathrm{i}X$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

1653 **CCP PSI**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1654 **Centrale PC**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit g un endomorphisme de E autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
2. Soit g un endomorphisme de E autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

1655 **Mines-Ponts PSI**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leur polynôme caractéristique respectif.

1. Montrer que si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tels que $AUV^T = UV^T B$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.
3. À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

1656 **CCP PSI**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. On note $(\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$ le spectre ordonné par ordre croissant de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

1657 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)^2 \leqslant \mathrm{rang}(M)\mathrm{Tr}(M^2)$.
2. Caractériser par leurs valeurs propres les matrices symétriques réelles vérifiant le cas d'égalité.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive.
   (a) Montrer que M est inversible et que pour tous X et Y dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$:
   $$\langle MX, X\rangle\langle M^{-1}Y, Y\rangle \geqslant \langle X, Y\rangle^2.$$
   (b) En déduire $\inf\{\langle MX, X\rangle \cdot \langle M^{-1}X, X\rangle \mid \|X\| = 1\}$.

1658 **CCP PC**

1. On définit l'endomorphisme φ de $M_n(\mathbb{R})$ par :
   $$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = 2M + M^T.$$
   Déterminer un polynôme annulateur de φ. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et
   $$\varphi_{a,b} : M \longmapsto aM + bM^T.$$
   Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

1659 **ENSAM PSI**

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice J est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

1660 **TPE/EIVP PSI**

Discuter, dans $M_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}.$$

1661 **Centrale PSI**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id}_E - p$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

1662 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & & & \vdots \\ \vdots & 2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $\det(A + mI_n)$ pour chaque entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$.
2. Montrer que χ_A est un polynôme scindé.
3. Montrer que, pour toute valeur propre λ de A,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1.$$

4. Calculer la somme et le produit des valeurs propres de A.

1663 **ENS MPI 2025**

Soit A et B deux matrices appartenant à $S_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \leqslant B$ si $B - A$ appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$. On considère l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

Montrer que f est décroissante.

1664 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $(f;g) \in E^2$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0\,;1], f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$.
3. Que vaut $F + F^\perp$?

1665 **X-ENS**

Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

1666 **X**

Soit $V_1, \dots, V_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de réunion égale à $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'un des V_i est égal à $\mathbb{R}^n$.

1667 **X**

Donner deux modes de description d'un plan de $\mathbb{R}^4$.

1668 **X**

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

1669 **X**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $(S; H) \in S_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = SH$.

1670 **X MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Toutes les valeurs propres (complexes) de A sont égales à 1.
   ii) $A = \mathrm{Id} + N$ où $N^n = 0$.
2. On suppose A à coefficients rationnels. Montrer qu'il existe une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{Q})$ telle que $A = B^2$.
   Indication : on peut commencer par le cas réel.

1671 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Montrer que $P_{n+1}(X) = (X-n)P_n(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(-1)^{n-k}P_n(k) > 0$.
3. En déduire que chaque intervalle $]0\,;1[$, $]1\,;2[$, …, $]n-1\,;+\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

1672 **ENS Ulm**

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & M_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_3(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & A^3 \end{array}$$

Déterminer l'image de Φ.

1673 **ENS**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B, C trois matrices de $M_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un triplet $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.

1674 **Mines-Ponts PC**

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

1675 **Mines-Ponts PC**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.
2. On considère l'équation
$$(E) : X^2 - 3X = A,$$
en la matrice inconnue X de $M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que toute solution de (E) commute avec A.
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Calculer A^n où $n \geqslant 2$.

1676 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de rotation R autour de la droite D d'équation $x - y + z = x + y + z = 0$ et telle que $R(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

1677 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $\mathrm{rang}(f \circ g) = 2$.
Calculer $\mathrm{rang}(f)$ et $\mathrm{rang}(g)$.

1678 **Mines-Télécom MP 2024**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-m \\ m-2 & 0 & 1 \\ 2m & m-2 & m-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de A en fonction de m.
2. Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2y + (2-m)z = 2-m \\ (m-2)x + z = 1 \\ 2mx + (m-2)y + (m-2)z = m-2 \end{cases}$$

1679 **X FUF 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N_1, \dots, N_n$ dans $M_n(\mathbb{C})$ nilpotentes qui commutent.
Montrer que $N_1 \cdots N_n = 0$.

1680 **CCINP MP 2021**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$, un entier $n \geqslant 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & 0 & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{rang}(A) = 2$.
2. On suppose que $\operatorname{rang}(A) = 2$.
   (a) Montrer que $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$.
   (b) Donner les expressions des valeurs propres de A.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur a, b et c) pour que A soit diagonalisable.

1681 **X FUF 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit encore p et q dans $\mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q \leqslant 0$. Montrer que $\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0$.

1682 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2023} = A^{2024}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \operatorname{rang}(A)$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

1683 **CCINP MP 2024**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_n telle que $(A + I_n)^3 = 0$.

1. Montrer que A est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit p un entier naturel. Exprimer A^p en fonction de A^2, de A et de I_n.

1684 **CCINP MP 2019**

1. Montrer que le polynôme $P = X^5 + 2X + 1$ admet une unique racine réelle strictement négative.
2. Soit $A \in M_{15}(\mathbb{R})$ telle que P soit annulateur de A. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ? Montrer que $\det(A) < 0$.

1685 **CCINP MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les deux matrices suivantes de $M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Écrire A, puis A^2 sous forme de combinaisons linéaires de J et I.
2. En déduire un polynôme annulateur de A. Donner son polynôme minimal π_A et ses valeurs propres possibles.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit E un espace euclidien de dimension n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $(e_1; \ldots; e_n)$ une famille de vecteurs de E tels que, pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et pour tout $(i; j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, avec $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$.
   Montrer que $(e_1; \ldots; e_n)$ est une base de E.

1686 **Mines-Ponts MP 2021**

Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

1687 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$.

Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

1688 **Mines-Télécom MPI 2024**

1. Montrer que
   $$(P; Q) \longmapsto \varphi(P; Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\varphi(X^p; X^q)$ pour tout $(p; q)$ dans $\mathbb{N}^2$.
3. Orthonormaliser la base $(1; X; X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1689 **CCINP MP 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = I_n$ et telle que la famille $\{I_n; A; A^2; \dots; A^{n-1}\}$ est libre. Démontrer que la trace de A est nulle.

1690 **Mines-Ponts MP**

Soit
$$\Delta = \inf_{(x_1;\dots;x_n)\in\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t\right).$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \displaystyle\int_0^1 A(t)B(t)\,\mathrm{d}t$.

On note Q la projection de orthogonale de 1 sur $\mathrm{Vect}(\{X; \dots; X^n\})$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de $(q_1; \dots; q_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_k X^k$ et montrer que
$$\Delta = \int_0^1 (1 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t.$$
2. On pose :
$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{q_1}{X+2} + \cdots + \frac{q_n}{X+n+1}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $F(k) = 0$.
   (b) En déduire que $F(0) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. Calculer Δ et $(q_1; \dots; q_n)$.

1691 **CCINP MP**

Soit Φ une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même telle que
$$\Phi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'.$$

1. Vérifier que Φ stabilise $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. On admet que Φ est linéaire. Donner la matrice représentative de Φ dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
4. Supposons λ une valeur propre de Φ associée au vecteur propre P telle que $\lambda \neq 1$. Montrer que 1 est une racine de P et donner sa multiplicité.

1692 **CCINP MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\overline{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. (a) Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
   (b) On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.
3. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

1693 **CCINP PSI 2021**

Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(a_0; a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

1. Calculer $\chi_C(X)$.
2. Soit φ un endomorphisme de E, où $\dim(E) = n+1$. On dit que φ est *cyclique* s'il existe $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $(x; \varphi(x); \varphi^2(x); \ldots; \varphi^n(x))$ soit une base de E. Montrer que si φ est cyclique, alors sa matrice est de la forme de C.

1694 **CCINP MP 2019**

On se place dans l'espace $E = C([-1\,;1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\Phi : (f; g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On appelle $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace vectoriel des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire.
3. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.
4. Déterminer l'image de f par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

1695 **Centrale-Supélec MP 2022**

Le but de l'exercice est de montrer que toute matrice carrée réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit à éléments diagonaux nuls.
2. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme de E. On suppose que u admet deux valeurs propres λ et μ telles que $\lambda\mu < 0$. On considère deux vecteurs propres de u, x et y, unitaires, orthogonaux et respectivement associés à λ et μ. Montrer qu'il existe z unitaire tel que $z \in \mathrm{Vect}(\{x; y\})$ et $\langle u(z), z \rangle = 0$.
3. Montrer le résultat souhaité pour une matrice symétrique réelle.
4. Montrer le résultat souhaité pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1696 **Mines-Ponts MP 2021**

On note :

- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle ;
- $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel engendré pas les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
2. Montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.
3. A-t-on $\mathcal{N} = \mathcal{H}$?

1697 **CCINP MP 2018**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit encore U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer $\det(A(-1))$.
2. On note $P(x) = \det(A(a)+xU)$. Montrer que P est polynomial de degré inférieur ou égal à 1.
3. Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det(A(a))$.
4. Étudier la continuité de $a \mapsto \det(A(a))$ et retrouver la valeur de $\det(A(-1))$.

1698 **CCINP MP 2025**

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On note $C_n = \det(A_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$C_{n+2} = (1+x^2)C_{n+1} - x^2 C_n.$$
2. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2, puis déterminer C_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Discuter le résultat obtenu en fonction de x.
3. Étudier l'inversibilité de la matrice A_n en fonction de la valeur de x.

1699 **Mines-Télécom 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$MM^TMM^TM = I_n.$$

1700 **CCINP PSI 2025**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_a de M_a.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $3\chi_a$ par χ_a'.
   (c) La matrice M_a est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
2. On suppose que λ est une valeur propre complexe de M_a telle que $|\lambda| > 1$.
   (a) Montrer que $|a| > \dfrac{|\lambda|}{1+|\lambda|} > \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la suite $((M_a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle pour a suffisamment petit.

1701 **CCINP MP 2025**

Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\overline{z}.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution $z \in \mathbb{C}$ non nulle si et seulement si $|a| = |b|$.

   On suppose maintenant que $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Déterminer α et β tels que f soit diagonalisable.

1702 **TPE/EIVP PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $T(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que le spectre de T est $\{0\}$. Déterminer le sous-espace propre associé. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $T^{n+1} = 0$. (On pourra comparer les degrés de $T(P)$ et P pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.)
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) = 0.$$

   (Utiliser l'endomorphisme $D = T + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.)

1703 **Mines-Ponts MPI 2024**

Soit B et M deux matrices de $M_3(\mathbb{C})$ telles que $M^3 = B$. Que dire sur B et M ?

1704 **CCINP PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$. On suppose que $P = X^p$ est un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que P est annulateur de $A^T A$.
2. En déduire que $A = 0$.

1705 **Mines-Ponts PSI 2022**

Soit $(a_0; a_1; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer χ_A.
2. Montrer que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \chi_A \text{ est scindé à racines simples.}$$

   Pour le sens direct, on montrera l'implication par deux méthodes différentes.

1706 **CCINP PSI**

On note $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. On définit sur E le produit scalaire :

$$\forall (f;g) \in E^2,\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note :

- $\mathcal{V} = \{f \in E \mid f'' = f\}$,
- $\mathcal{W} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$,
- $\mathcal{H} = \{f \in E \mid f(0) = \cosh(1) \text{ et } f(1) = 0\}$.

1. Montrer que $\{\cosh; \sinh\}$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Montrer que, pour tout $(f;g) \in \mathcal{F} \times E$:

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0).$$

   Calculer $\langle \cosh, \sinh \rangle$, $\|\cosh\|^2$ et $\|\sinh\|^2$.
3. Montrer que pour tout $(f;g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, $\langle f, g \rangle = 0$.
4. Soit $f \in \mathcal{H}$.
   Calculer $\langle f, \cosh \rangle$ et $\langle f, \sinh \rangle$.
   En déduire les composantes dans la base $(\cosh; \sinh)$ de la projection orthogonale $\prod_{\mathcal{V}}(f)$ sur $\mathcal{V}$.
5. Calculer :

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} \int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

1707 **ENSEA/ENSIIE MP 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Calculer $\exp(A)$.

1708 **Mines-Ponts PC 2025**

Soit $(A; B) \in M_n(\mathbb{C})^2$.
On suppose qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $AB = \alpha A + \beta B$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

1709 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que A^2 est diagonalisable. Montrer que ses valeurs propres sont négatives ou nulles. En déduire des informations sur A.
2. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale des zéros et des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1710 **Mines-Ponts MP 2024**

Déterminer la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les racines cinquièmes de l'unité.

1711 **CCINP PC 2022**

Pour toute matrice M de $M_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\|_\infty = \max \{|m_{ij}| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant d\}.$$

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2, puis les autres puissances de N.
3. Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_d(\mathbb{C})$.
5. Pour tout couple $(M; N)$ de matrices de $M_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d\|M\|_\infty \|N\|_\infty.$$

6. On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

1712 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer qu'il existe $p \leqslant 4$ entier tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
2. On suppose que $p = 4$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1713 **CCINP MP 2021**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit encore u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
2. On suppose $n \geqslant 2$, où n est tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une base e de E telle que la matrice A de u dans la base e est de la forme
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Résoudre l'équation $X^2 = A$, avec $X \in M_n(\mathbb{K})$.

1714 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\det(\lambda A^2 + I_n) \geqslant 0$.
2. On suppose maintenant que A est antisymétrique.
   Montrer que le résultat précédent est alors valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

1715 **CCINP MP 2022**

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.
2. (a) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\text{rang}(M) = 4$.
   (b) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\text{rang}(M) = 2$.
3. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de M ?
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

1716 **CCINP PC 2017**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1. Calculer M^2.
2. Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

1717 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

1718 **CCINP MP 2017**

Considérons l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Démontrer que E est un espace vectoriel. Trouver la dimension de E. (On pourra utiliser l'application $u \mapsto (u_0; u_1; u_2)$.)
2. Déterminer les solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. En déduire une base de E.
3. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{2}{3}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}2^n \\ \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{4}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}2^n \end{pmatrix}.$$

4. On fixe $(u_0; u_1; u_2) \in \mathbb{R}^3$, définissant une suite u de E.

   Calculer $A \cdot U_0$, où $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

   En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que de u_0, u_1 et u_2.

1719 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \neq 0$.

1720 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$. Montrer que $A = B$. Est-ce toujours vrai si A et B ne sont pas diagonalisables ?

1721 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Soit F un plan vectoriel stable par f. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

1722 **ENSAE MP 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme n'ayant que E et $\{0\}$ pour seuls sous-espaces vectoriels stables.

1. Montrer que u ne possède pas de valeur propre.
2. En déduire que $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, la famille $(x; u(x); u^2(x); \dots; u^{n-1}(x))$ est une base de E.
4. Comment est la matrice de u dans cette base ?

1723 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E et $P = \chi_f$.

1. Montrer que si P est irréductible, alors les seuls sous-espaces stables par f sont E et $\{0_E\}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

1724 **CCINP PSI 2024**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P admet n racines. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

1725 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k).$$

1. Les matrices A et B sont-elles nécessairement semblables ?
2. Traduire par une condition sur les valeurs propres de A et B l'hypothèse de l'exercice.
3. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

1726 **Mines-Télécom MP 2019**

On note P_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0; 1\}$, telles qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que toute matrice P_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

1727 **CCINP PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rang}(u) = n$.
   Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle u a pour matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rang}(u) = 2n$.
   Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle u a pour matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

1728 **CCINP MP 2022**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha - 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A_2^n et A_1^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1729 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E, alors il existe une forme linéaire φ non nulle de E telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.
2. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

1730 **Centrale-Supélec MP 2021**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente.
   Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente.
   Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.
   Montrer que $\operatorname{Tr}(M) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

1731 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det(AB - I_n) = \det(BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
   Indication : on pourra considérer la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par $A_p = A - \frac{1}{p} I_p$.

1732 **Mines-Ponts MP 2022**

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \geqslant 2$, calculer le déterminant $n \times n$:

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z - \frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z - \frac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z - \frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

1733 **CCINP PC 2023**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \longmapsto & \frac{1}{2}(P(X) - P(1-X)) \end{array}$$

1. Calculer φ^2.
2. Démontrer que :

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\left(\left\{X - \tfrac{1}{2}; \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^3\right\}\right) \text{ et } \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}\left(\left\{1; \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2\right\}\right).$$

3. Montrer que φ est un projecteur et en identifier les éléments géométriques.

1734 **CCINP PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p et q deux endomorphismes de E tels que :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \operatorname{rang}(p) + \operatorname{rang}(q) \leqslant n.$$

Montrer que p et q sont des projecteurs.

1735 **CCINP PSI 2024**

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. On suppose que $A \in M_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

1736 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation $x + 2y + z = 0$.
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

1737 **CCINP PC 2023**

1. On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, stable par produit. Donner la dimension de F.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 ne contenant pas I_n et stable par produit.
   (a) Rappeler la valeur de $E_{ij} \cdot E_{kl}$ avec $i, j, k, l \in [\![1\,;n]\!]$.
   (On rappelle que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice $(i;j)$ qui vaut 1.)
   (b) Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(\{I_n\})$.
3. (a) Soit $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$ et $p : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ le projecteur sur $\text{Vect}(\{I_n\})$ parallèlement à F.
   Montrer que $p(MM') = p(M)p(M')$.
   (b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.
4. Déduire des questions précédentes que $E_{ij} \in F$ pour tout $(i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, puis conclure.
5. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1. Est-il stable par produit ?

1738 **TPE/EIVP MP 2018**

Calculer le déterminant de la matrice $A = \Big(\sin(i+j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1739 **Mines-Télécom PC 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Trouver les éléments propres de A.
Indication : calculer $\text{Tr}(A^2)$.

1740 **Centrale-Supélec TSI 2021**

Soit P le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$. Déterminer les endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\text{Im}(f) = P$ et $\text{Ker}(f) \subset P$.

1741 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^3 + f = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1742 **CCINP PSI 2022**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E tel que la matrice de f dans toute base de E soit égale à une même matrice A.

1. Montrer que, pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $PA = AP$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $AB = BA$.
   (c) Montrer que f est une homothétie.

1743 **CCINP PC 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J.
2. Montrer qu'il n'existe pas de forme linéaire φ de $M_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{C})$, le nombre $\varphi(M)$ est une valeur propre de M.

1744 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^T A$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

1745 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons une application linéaire f de E dans F.

1. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
   Démontrer que ce sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f)$ est réduit à $\{0_E\}$.

1746 **CCINP TSI 2019**

Soit A_{2n} la matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_{2n} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } j = 2n + 1 - i \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner A_2 et A_4.
2. On note $\Delta_{2n} = \det(A_{2n})$.
   Calculer Δ_2 et Δ_4.
3. Calculer Δ_{2n} si $a = 0$.
4. Calculer Δ_{2n} si $a \neq 0$.

1747 **CCINP PC 2017**

Soit $M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a;b;c) \mid (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0;1;0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a;b;c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a;b;c)$. Donner des conditions portant sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur. Donner alors son image et son noyau.

1748 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{pmatrix}.$$

1749 **CCINP MP 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$.

1. À quelles conditions sur $(a;b;c)$, la matrice M est-elle la matrice d'une isométrie vectorielle directe ?
2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ab + ac + bc$, et on donne l'identité suivante :

   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 2(ab + ac + bc)(a + b + c)^2.$$

   Traduire le système de la question 1 avec α et β.
3. Montrer l'équivalence suivante :
   La matrice M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $k \in \left[0\,; \frac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c soient les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.
4. On suppose que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ et que $M \neq I_3$. La matrice M est donc la matrice canoniquement associée à une rotation de l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté, notée r. Déterminer l'axe D de la rotation r.
5. Orienter l'axe D et déterminer l'angle de r.

1750 **ENS MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A + A^T = I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

1751 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \Big(|a_i - a_j|\Big)_{(i;j)\in[\![1\,;n]\!]} \in M_n(\mathbb{R})$.
Calculer $\det(A)$.

1752 **ENSEA/ENSIIE MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique scindé et P un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que la matrice $P'(A)^2 - P(A)P''(A)$ est inversible.

1753 **CCINP PC 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

1. Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff S = \pm 1$ et $\sigma = 0$.
2. Préciser une condition pour A appartienne à SO_3.

1754 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit M la matrice carrée antidiagonale réelle de taille $2n$, d'éléments antidiagonaux $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

1755 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

1756 **Mines-Ponts PC 2023**

On fixe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

1. Trouver un nombre réel θ tel que $M^3 = -\theta M$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $M^{2n} = (-\theta)^{n-1} M^2$.
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée S_∞.
4. Trouver deux nombres réels α et β tels que $S_\infty = I_3 + \alpha M + \beta M^2$.

1757 **CCINP PSI 2023**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$, $A \neq I_2$ et A inversible.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Montrer que A est une matrice orthogonale.
4. Calculer $\det(A)$.
5. Déterminer les matrices A.

1758 **Mines-Ponts PC 2018**

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? dans $M_2(\mathbb{C})$? Déterminer ses éléments propres.
2. On pose $z_n = 1 + \dfrac{\mathrm{i}\alpha}{n}$ et $u_n = (z_n)^n$.
   (a) Montrer que z_n possède un argument θ_n dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Trouver un équivalent de θ_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1759 **Centrale-Supélec PC 2022**

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

1760 **Mines-Ponts MP 2018**

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et on prend $M \in M_n(\mathbb{C})$. A-t-on l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) M est diagonalisable ;

ii) $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(M) \in \mathcal{N} \implies P(M) = 0$?

1761 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer sans calculs :
   (a) l'image et le noyau de A (exhiber une base) ;
   (b) les espaces propres de A (trouver les valeurs propres et une base pour chaque sous-espace).
2. Diagonaliser la matrice A.

1762 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \|A^n\|_\infty \leqslant M.$$

Montrer que A est diagonalisable.

1763 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -a & 4+a & -(1+a) \\ 4+a & 1+a & a \\ 1+a & -a & -(4+a) \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A appartienne à $SO_3(\mathbb{R})$.
2. Quel est l'endomorphisme associé à A dans ce cas ?

1764 **CCINP PSI 2017**

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments deux à deux distincts d'un corps (commutatif) $\mathbb{K}$.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $M = P(D)$.

1765 **CCINP PSI 2016**

Une *matrice à diagonale propre* est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note ε_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.
2. Soit la matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   Est-ce que A est une matrice à diagonale propre ?
3. Soit A appartenant à ε_n antisymétrique.
   (a) Donner les valeurs propres de A.
   (b) Montrer qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.
   (c) Calculer $(A^T A)^p$ et en remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$.
   (d) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
   (e) Soit F un sous-espace vectoriel de ε_n. Montrer que $\dim(F) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

1766 **ENS MP 2024**

Déterminer les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables à $2M$.

1767 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$\begin{array}{rcll} \varphi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & -A + \operatorname{Tr}(A) I_n \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le spectre de φ.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Est-ce que φ est diagonalisable ?

1768 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est une matrice de projection.
2. Montrer que $BA = I_2$.

1769 **X MP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda \leqslant \mu$ les valeurs propres de A.

Montrer que $\lambda \leqslant a \leqslant \mu$.

1770 **CCINP PSI 2024**

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^T = M^T M$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable.
2. Montrer que $\operatorname{Sp}(M^T M) \subset \{-2; 2\}$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(M^T M)$, $\lambda \geqslant 0$. En déduire $\operatorname{Sp}(M^T M)$.
4. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M$ est orthogonale.
5. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M$ est la matrice d'une rotation d'angle θ à déterminer.
6. Déterminer toutes les matrices M possibles.

1771 **Mines-Télécom MP 2021**

On note $E = C([0\,;1])$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $H = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal sur H de la fonction $g : x \mapsto x$.

1772 **Mines-Ponts PC 2019**

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, expliciter $\Delta^p(u)$.

1773 **CCINP MP 2017**

1. Démontrer que l'application $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\phi(P;Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
est un produit scalaire.
2. Calculer $\phi(X^p;X^q)$ pour tous p et q entiers naturels.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1774 **Mines-Télécom PC 2021**

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.
Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau de M.
2. Toujours sans calcul, diagonaliser la matrice M.

1775 **X MP 2016**

On définit sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel un « pseudo produit scalaire » par
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i.$$
Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer alors l'équivalence des propriétés suivantes :

i) M est diagonalisable dans une base « pseudo orthonormée » ;

ii) $\exists(y;z) \in \mathbb{C}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in]0\,;2\pi[$ tels que
$$M \text{ est diagonale ou } M = \begin{pmatrix} y & z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & y+\mu z \end{pmatrix};$$

iii) $\overline{M^T}M = M\overline{M^T}$.

1776 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit A une matrice symétrique réelle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.
Montrer que $A^2 = I_n$.

1777 **CCINP MP 2021**

Soit m un entier supérieur ou égal à 3. On définit le produit scalaire suivant : si $X, Y \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y\rangle = X^T Y$. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ est dite de *type* n lorsque $A^T = A^n$.

1. Comment appelle-t-on une matrice de type 1 ?
   Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $N(x)$ suivante :

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que pour tout $k > 0$, $N(x)^k = N(kx)$.
   (b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $N(x)$ est une matrice de type n.
   Pour la suite, on prendra $m = 3$.
   Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice de type n. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = A^{n+1}$.
   (c) Montrer que $A^{n^2} = A$.
   (d) Montrer que $B^n = B$ puis que B est symétrique. Quelles sont les valeurs possibles de B ?
   (e) Montrer que -1 ne peut pas être valeur propre.

1778 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Soit $a > 0$.
   On définit une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.
   Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives). Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1779 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f un endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Tr}(f(I_2)) = 0$ et pour toute matrice N nilpotente, $f(N) = 0$. Montrer que f est nilpotente.

1780 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ un matrice de projection. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & PM + MP \end{array}$$

1. Démontrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$f^2(M) = PM + 2PMP + MP.$$

2. Démontrer que f est diagonalisable.
3. Déterminer la trace de f en fonction de n et du rang de P.

1781 **CCINP PSI 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et le système (S) $\begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \mathrm{Tr}(M) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que si M vérifie (S), alors les valeurs propres de M sont les racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.
2. Déterminer toutes les matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient (S).

1782 **Mines-Télécom MP 2022**

On considère l'application

$$u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{array}$$

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et exprimer son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

1783 **Mines-Ponts MP 2014**

Déterminer toutes les matrices A et B telles que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AMB) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(M)\,?$$

Indication : commencer par le cas $B = I_n$.

1784 **CCINP MP 2024**

Soit u l'application de $M_3(\mathbb{C})$ qui à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$ associe la matrice $\begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres associés à l'endomorphisme u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de u.

1785 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$T \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Déterminer les éléments propres de T.

1786 **Mines-Ponts MP 2019**

On note $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0_n\}$.

1. L'ensemble A est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$, contenu dans A ?
3. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}$? On s'intéressera surtout au cas $n = 2$.

1787 **CCINP MP 2017**

Considérons l'application $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $T(M) = M^T$.

1. Étudier le rang de T.
2. Donner la matrice de T.
3. Déterminer le déterminant de T et sa trace.
4. Étudier la diagonalisabilité de T.
5. Que peut-on dire de la matrice $M + M^T - 2I_n$ si $M \in M_n(\mathbb{R})$?

1788 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{com}(A)$ sa comatrice. On suppose que A est inversible. Déterminer le spectre de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.

1789 **Mines-Ponts MP 2025**

Montrer que pour tout $A \in \mathbb{C}$,

$$A^2 = A \iff \mathrm{rang}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{rang}(I_n - A) \leqslant \mathrm{Tr}(I_n - A).$$

1790 **Centrale-Supélec 2017**

1. Rappeler le théorème du rang.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que l'on ait $f^{n-1} = 0$ et $f^{n-2} \neq 0$.
   Montrer que, pour tout $0 < k < n$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) = k + 1$.
3. Montrer qu'il existe une base de E telle que l'écriture matricielle de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$.

1791 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

1792 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ tel que :

- $f(N) = 0$ pour toute matrice nilpotente N ;
- $\mathrm{Tr}(f(I_2)) = 0$.

Montrer que $f \circ f = 0$.

1793 **CCINP MP 2021**

1. (a) Déterminer trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   - $A(-1) = 1$, $A(0) = 0$, $A(1) = 0$,
   - $B(-1) = 0$, $B(0) = 1$, $B(1) = 0$,
   - $C(-1) = 0$, $C(0) = 0$, $C(1) = 1$.

   (b) Montrer que $(A; B; C)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ v(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C.$$

   (a) Montrer que $\operatorname{rang}(v) \leqslant 3$. Qu'en déduit-on sur $\operatorname{Ker}(v)$?

   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(v)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

1794 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On définit une application $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ u(P)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n.$$

1. Montrer que u est bien définie et que u est un automorphisme.
2. Donner les valeurs propres de u.

1795 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $S = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre n.

1. Pour tout $(x_1; \dots; x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$, montrer que :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

2. En déduire que :

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{\operatorname{Tr}(S)}{n}\right)^n.$$

3. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} > 0$.
4. On note $D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$ et $A = DSD$.

   (a) Montrer que A est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que $\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1796 **Centrale-Supélec MP 2017**

Soit G l'ensemble des matrices $M(a)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ réel.}$$

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?
2. Qu'est-ce que $M(0)$ géométriquement. Déterminer $\mathrm{Ker}(M(0))$ et $\mathrm{Im}(M(0))$.
3. Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1797 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A^2 = -I_n \implies \det(A) = 1.$$

1798 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } AB = BA = 0.$$

2. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{N}^*, (A+B)^k = A^k + B^k.$$

1799 **CCINP MP 2021**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\varphi : (f; g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (P(t))^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}.$$

1800 **CCINP PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{rang}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$.
2. Quelles déductions peut-on faire sur les valeurs propres de A ?

1801 **CCINP PC 2024**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $a, b \in E$.
On pose :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \langle a, x \rangle b \end{array}$$

Montrer que f est bijective si et seulement si $\langle a, b \rangle \neq 0$.

1802 **CCINP PC 2024**

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On suppose que A et B sont des matrices réelles symétriques telles que $A^2 = B^2$. On admet que, pour toute matrice diagonale, $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$. L'objectif de l'exercice est de montrer l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $PA = B$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T AX = (BX)^T BX.$$
2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Montrer que A est inversible. Montrer alors que BA^{-1} est orthogonale.
   (b) Conclure.
3. On suppose maintenant que 0 est valeur propre de A, du multiplicité p.
   (a) Montrer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^2)$. En déduire que $\text{Im}(A) = \text{Im}((B)$.
   (b) Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ et en déduire que 0 est valeur propre de B. Préciser sa multiplicité.

1803 **CCINP MPI 2025**

On note T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - 5X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de $T(X^n)$ pour tout entier naturel n. Calculer $T(X^k)$ pour $k = 0, \ldots, 4$.
2. Montrer que si P est colinéaire à $T(P)$, alors P est de degré 3.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?
4. Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_3[X]$, notée T_1, définit un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de T_1 dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de T_1 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1804 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit $a > 0$ fixé. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que M admet une unique valeur propre réelle r.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \mathrm{Tr}(M^n)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{r^n}$.

1805 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

1806 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et F une matrice réelle symétrique de taille n. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha\,;\alpha],\ \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}\mathrm{Tr}\Big(F^k\Big)\right) = \det\Big((I_n - tF)^{-1}\Big).$$

1807 **ENS MP 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ est de rang 1. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

1808 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que, pour tout $k \in [\![0\,;2n]\!]$, $A+kB \in GL_n(\mathbb{Z})$. Quelle est la valeur de $|\det(A)|$? de $\det(B)$?

1809 **CCINP PC 2017**

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Les matrices A_n sont-elles inversibles pour tout $n \geqslant 1$?

1810 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On définit $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & B & A \\ A & B & B \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M.
2. Calculer M^{-1}, lorsqu'elle existe, en fonction de A^{-1} et de $(B-A)^{-1}$.

1811 **Mines-Ponts PC 2022**

On considère une famille $\mathcal{F} = \{F_1; \ldots; F_p\}$ d'éléments de $M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ et une famille $\mathcal{G} = \{G_1; \ldots; G_n\}$ d'éléments de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
Pour tout $i \in \{1; \ldots; p\}$ et pour tout $j \in \{1; \ldots; n\}$, on pose $M_{ij} = F_i \times G_j^T$.

1. Montrer que la famille $\{M_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de $M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}$ est une base de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
2. Soit un entier $r \leqslant \min(p; n)$. Déterminer le rang de la matrice $\sum\limits_{k=1}^{r} M_{kk}$.

1812 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?

1813 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{Tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

1814 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0\,;1]$ à valeurs réelles. On pose $\phi : f \mapsto F$, avec

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour } x \neq 0$$

et $F(0) = f(0)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

1815 **Mines 2023**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

1816 **Mines**

On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que C est diagonalisable.

1817 **Mines 2024**

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}(A) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

1818 **Mines 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^{p+2} = M^2$ et que $\mathrm{Tr}(M) = n$. Déterminer M.

1819 **Mines 2024**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A, χ_{A^2} et χ_{-A}.

1820 **Mines 2024**

Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
Quel est le rang de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

1821 **Mines 2022**

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |b_{ij}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rang}(B)}.$$

1822 **CCP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T A$.

1. Montrer que, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathrm{Ker}(A^2 - \mu^2 I_n) = \mathrm{Ker}(A - \mu I_n) \oplus \mathrm{Ker}(A + \mu I_n).$$

2. En déduire le polynôme caractéristique de A, et discuter le caractère diagonalisable de A.

1823 **Centrale 2022**

On note $N_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in N_n(\mathbb{C})$, on désigne par $d(M)$ l'indice de nilpotence de M. On note enfin $\mathbb{C}[M]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en M.

1. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathbb{C}[N]$ est un espace vectoriel de dimension $d(N)$.
2. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N + I_n \in GL_n(\mathbb{C})$, puis que $N^2 + 2N \in N_n(\mathbb{C})$ avec $d(N^2 + 2N) = d(N)$.
3. Montrer que $\phi : N \mapsto N^2 + 2N$ réalise une injection de $N_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

1824 **Mines 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un endomorphisme de E est une transvection lorsque :

$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n + \lambda E_{ij}$$

pour une certaine base $\mathcal{B}$ de E, un certain $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in \{1; \ldots; n\}$ distincts.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) u est une transvection ;

ii) $\operatorname{rang}(u - \mathrm{Id}) = 1$ et $(u - \mathrm{Id})^2 = 0$.

1825 **Mines 2024**

On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$ ainsi que :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors il en est de même pour :

$$C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}.$$

1826 **ENS 2023**

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A : M \mapsto AM$.

1. Montrer que $|||\varphi_A||| \leqslant \|A\|_2$.
2. Donner une sous-algèbre stricte de $M_n(\mathbb{R})$ stable par transposition.
3. On définit la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (M_1; M_2) \in M_p(\mathbb{R}) \times M_q(\mathbb{R}),\ p + q = n \right\}.$$

   On admet que $B = \{\varphi_A \mid A \in \mathcal{S}\}$ est une sous-algèbre de $L(M_n(\mathbb{R}))$. Décrire l'ensemble des endomorphismes de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les éléments de B.

1827 **CCP 2023**

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\exp(A)$.
4. Montrer que A est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Trouver une autre méthode pour calculer A^n.

1828 **CCP 2023**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer le polynôme minimal et les valeurs propres de A. En déduire le polynôme caractéristique de A.

1829 **Centrale 2022**

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ et $\tau_A : M \mapsto MA - AM$.

1. On suppose que A est nilpotente. Montrer que $\mathrm{Ker}(\tau_A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.
2. On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A = BA - AB$.
   Calculer $BP(A) - P(A)B$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que A est nilpotente.
3. Caractériser les hyperplans H de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Im}(\tau_A) \subset H$. En déduire l'existence de $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = BA - AB$.
4. Montrer que $A \exp(I_n + B) = \exp(B)A$.

1830 **Mines 2024**

Soit $n \geqslant 1$ entier. On considère le produit scalaire suivant sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On se donne $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et pour $P \in E$, on pose :

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} \Pi(x+t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est auto-adjoint et bijectif.
2. On considère une base orthonormée $(P_0; \dots; P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, chaque P_i étant associé à la valeur propre λ_i. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\Pi(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)P_k(y).$$

1831 **Mines 2024**

1. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$?
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$?
3. Même question que la première avec une semi-norme.

1832 **Mines 2023**

Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.
On considère $b \in \mathbb{C}$ vérifiant $|b| < 1$, et $f : P \mapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est continue pour $\|\cdot\|$.
3. Déterminer $|||f|||$ sous réserve d'existence.

1833 **Mines 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $x \in E$:

$$N(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right|}{\sum_{k=1}^{n} t^{2k-2}}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer N et $\|\cdot\|_2$.

1834 **Centrale 2022**

1. Montrer que si $U \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors U admet une unique racine carrée.
2. Montrer que si $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}(UV) \geqslant 0$.
3. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
   On considère une fonction dérivable $f : I \to M_n(\mathbb{R})$ ainsi que $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathrm{Tr} \circ P \circ f$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

1835 **Mines 2024**

Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$:

$$f(v) \in S \quad \text{et} \quad v - f(v) \in S^\perp.$$

Montrer que S est un espace vectoriel et que f est la projection orthogonale sur S.

1836 **Centrale 2023**

Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme de E.

1. Établir l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.
2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   i) $\exists c \geqslant 0,\ \forall x, y \in E,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$;
   ii) $\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.
3. Trouver tous les endomorphismes u de E tels que $u(V^\perp) \subset u(v)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

1837 **CCP 2023**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f \neq 0$ et $f^3 = -f$. On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.
2. Soit $v \in G \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que $(v; f(v))$ est une base de G.
3. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1838 **Mines 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. On pose :

$$G = \{u \in L(E) \mid u \circ f = f \circ u,\ u^2 \circ f = f,\ \exists p \in \mathbb{N}, f^{p+1} \circ u = f^p\}.$$

1. Soit $u \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $u^{k+1} \circ f^k = u$.
2. Soit $u, v \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $u^k \circ f^{k+1} \circ v$ et $v \circ f^{k+1} \circ u^k$.
3. En déduire que G possède au plus un élément.

1839 **CCP 2024**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On considère $f, g \in L(E)$ telles que :

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

L'objectif est de montrer que f est nilpotente de trois manières différentes.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
   (b) Conclure en étudiant l'application :

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ h & \longmapsto & h \circ g - g \circ h \end{array}$$

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P(f)$, puis conclure.
3. (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$.
   (b) Montrer que f ne possède qu'une seule valeur propre, puis conclure.

1840 **Mines 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $p < n$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in GL_p(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que l'application $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto Y$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(M)$ vers $\mathrm{Ker}(D - CA^{-1}B)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{rang}(M) = p$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On pose $p = \max\limits_{M \in V} \mathrm{rang}(M)$.
   On souhaite majorer $\dim(V)$.
   (a) Montrer que l'on peut supposer $J_p \in V$, condition que l'on supposera vérifiée pour la suite.
   (b) On pose $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \,\middle|\, (B; D) \in M_{n-p \times p}(\mathbb{R}) \times M_{n-p \times n-p}(\mathbb{R}) \right\}$.
   Étudier $V \cap W$.

1841 **Mines 2022**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $f : x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale et donner son degré.

1842 **Mines 2024**

Soit $\alpha > 0$ et $u \in L(\mathbb{C}^n)$. Montrer qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tous $i, j \in \{1; \ldots ; n\}$:

$$i \neq j \implies \left| \left((u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)_{ij} \right| \leqslant \alpha.$$

1843 **Mines 2022**

Trouver une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - M = I_n$. Montrer que M vérifie nécessairement $\det(M) > 0$.

1844 **X 2022**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) B est nilpotente et $BA = 0$

ii) $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM} = \chi_{AM+B}$

1845 **X 2023**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
On considère $a, b \in L(E)$ et on pose $[a\,, b] = ab - ba$. On suppose que $[a\,, b] = f \circ v$, où $f \in L(\mathbb{C}, E)$ et $v \in L(E, \mathbb{C})$ vérifient $v \circ f = 0$.

1. Calculer $\det([a\,, b])$.
2. Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

1846 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit E un espace euclidien et x, y deux vecteurs non nuls de E. Quelle(s) condition(s) y a-t-il sur x et y pour que le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(\{y\})$ soit égal au projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(\{x\})$?

1847 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On étudie l'application qui à une suite u associe la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + (n+1)u_n}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que si u converge, alors $f(u)$ converge également. Préciser sa limite.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
4. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites bornées. On le munit de la norme infinie. Montrer que F est stable par f, que f est continue pour la norme considérée et préciser sa norme subordonnée.

1848 **Mines-Télécom MP 2023**

On pose $E = C([0\,;1])$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose :

$$\forall f \in E,\ u(f)(x) = \int_0^1 \inf(x;t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|||u|||$.

1849 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Résoudre $B^3 = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$, puis dans $M_2(\mathbb{C})$.
3. Résoudre $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1850 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1851 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

1852 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme orthogonal de E (i.e. tel que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$). On considère $v = \mathrm{Id}_E - u$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^\perp$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont des supplémentaires orthogonaux.
2. Soit p le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Ker}(v)$.
   (a) Montrer que $p \circ u = u \circ p = p$.
   (b) Pour tout $x \in E$, montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $p(x) = x + u(y) - y$.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \in E,\ p(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \right).$$

1853 **Mines-Télécom MP 2018**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; \ldots ; a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(b_1; \ldots ; b_n) \in \mathbb{C}^n$.
On pose : $A = (a_i b_j)_{(i;j)\in\{1;\ldots;j\}^2} \in M_n(\mathbb{C})$.
Dans quels cas la matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer alors ses éléments propres.

1854 **CCINP MP 2018**

On cherche à déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^4 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

1. Montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.
2. Conclure.

1855 **Mines-télécom MP 2018**

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(A)$.

1856 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^3.

1857 **CCINP MP 2025**

Soit E un espace vectoriel de dimension 4.

1. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
2. Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme minimal s'écrive : $P(X) = (X^2+1)(X^2+4)$. Montrer qu'il existe x, y non nuls dans E tels que $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. Montrer que la famille $(x; f(x); y; f(y))$ est une base de E.
4. Exprimer la matrice canoniquement associée à f dans cette base.

1858 **Mines-Ponts MPI 2025**

1. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $M^3 + M + I_n = 0$.

1859 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha\,;\alpha],\ \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \mathrm{Tr}\Big(F^k\Big)\right) = \det\Big((I_n - tF)^{-1}\Big).$$

1860 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

1861 **CCINP MP 2025**

On définit les deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi que $C(N) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid NM = MN\}$.

1. Montrer que $C(N)$ est un espace vectoriel. Déterminer-le.
2. Montrer que N est un polynôme de degré 2 en T.

   On définit $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid M^8 = T\}$.
3. Montrer que pour tout $M \in E$, M est un polynôme en N.
4. Déterminer E.

1862 **CCINP MPI 2025**

On note T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de $T(X^n)$ pour tout en entier naturel n. Calculer $T(x^k)$ pour $k = 0, \dots, 4$.
2. Montrer que si P est colinéaire à $T(P)$, alors P est de degré 3.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?
4. Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_3[X]$, notée T_1, est un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de T_1 dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de T_1 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1863 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on nécessairement $BABA = 0$?

1864 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Montrer qu'il existe deux matrices nilpotentes N_1 et N_2 telles que $A = N_1 + N_2$.

1865 **Mines-Télécom MP 2021**

On note $(e_1; \dots; e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in S_n$, on note f^σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f^\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Enfin, on pose :

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f^\sigma.$$

1. Soit $(\sigma; \tau) \in S_n^2$. Calculer $f^\sigma \circ f^\tau$.
2. Montrer que l'application $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection de S_n.
3. Montrer que p est un projecteur.

1866 **X ESPCI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition existe-t-il deux matrices A et B diagonalisables, de rang 1, telles que $M = A + B$?

1867 **CCINP MP 2021**

Résoudre le système suivant d'inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m :

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$

1868 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent. On suppose qu'il existe $n+1$ réels deux à deux distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ tels que, pour tout i entre 1 et $n+1$, la matrice $C_i = A + t_i B$ soit nilpotente. Montrer que les matrices A et B sont nilpotentes.

1869 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(M) \text{ est nilpotent}\}$.
Déterminer I.

1870 **CCINP PSI 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$
3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

1871 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$.
Montrer que A et $-A$ sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

1872 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. On pose :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \cdot A - \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \cdot P.$$

1. Montrer que $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

1873 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $\dim(E) = 2$, montrer qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
2. On revient au cas général et on suppose l'existence d'un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que f n'admet pas de valeur propre et que $\dim(E)$ est paire.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(\{x; f(x)\})$ est stable par f.
   (c) En posant $\dim(E) = 2p$, montrer qu'il existe une famille de vecteurs de E, $\{e_1; \ldots; e_p\}$, telle que $\{e_1; f(e_1); \ldots; e_p; f(e_p)\}$ soit une base de E.

1874 **Mines-Télécom MP 2018**

On donne les deux matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont-elles semblables ?

1875 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1; \ldots; e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que, pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $i \neq j$, $\|e_i - e_j\|$=1. Démontrer que $(e_1; \ldots; e_n)$ est une base de E.

1876 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit r et s deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que si les axes de r et s sont identiques, alors r et s commutent.
2. Montrer que si r et s sont des rotations d'angles π et d'axes orthogonaux, alors r et s commutent.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que r et s commutent.

1877 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

Soit M une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4 = 0$. Montrer que $M^3 = 0$.

1878 **CCINP MP 2023**

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs x et y de E, $\langle x, y\rangle$. On fixe deux vecteurs non nuls u et v de E.

1. Pour tout vecteur x de E, on pose : $(u \otimes v)(x) = \langle v, x\rangle u$.
   (a) Justifier que $u \otimes v$ est linéaire et donner son rang.
   (b) Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$.
   (c) L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.
3. Soit g un endomorphisme de E. On note $g^\star$ son adjoint. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^\star(v) = \alpha v$.

1879 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Rappeler le théorème spectral.
2. On munit $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $A + A^T$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

1880 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \forall j \in [\![1\,;n]\!],\ a_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Étudier la diagonalisabilité de A et donner ses éléments propres.

1881 **CCINP MP 2023**

Soit a, b, c, d, e, f des réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est trigonalisable.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour la matrice A soit diagonalisable.
3. Dans ce cas, trouver une base de vecteurs propres.

1882 **CCINP PSI 2024**

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour tout k entier naturel compris entre 1 et n, on pose $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $\{f_1; \dots; f_n\}$ est libre.
3. Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β, γ.
4. Résoudre le système suivant, composé de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$$

1883 **Mines-Ponts MPI 2023**

Soit $n \geqslant 2$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$. Notons :

$$\mathcal{E} = \{\|X\| \mid X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Tr}(X^T S X) = 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un maximum si et seulement si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le maximum de $\mathcal{E}$ si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1884 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ admettant une unique valeur propre λ.

1. Montrer que $A - \lambda I_n$ est nilpotente.
2. Soit le système différentiel (E) : $Y' = AY$. Montrer que les solutions de (E) sont bornées si et seulement si $A = \lambda I_n$ et $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

1885 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in L(E)$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f^2(x)\| \geqslant C\|f(x)\|$ pour tout $x \in E$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

1886 **Mines-Télécom 2024**

Soit $\mathcal{E}$ une partie de $M_n(\mathbb{R})$. On appelle *centre* de $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices commutant avec tous les éléments de $\mathcal{E}$.

1. Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathrm{Vect}(GL_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$. En déduire le centre de $GL_n(\mathbb{R})$.

1887 **Mines-Télécom 2025**

On étudie les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_{kk}) \quad (1),$$

c'est-à-dire les matrices pour lesquelles les valeurs propres sont réelles et sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice.

1. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Les matrices M_1 et M_2 vérifient-elles la condition (1) ?
2. Soit $(u; v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$.

   À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $M_{u,v}$ vérifie-t-elle la condition (1) ?
3. Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition (1) ?

1888 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall k \in [\![1\,;n-1]\!], \mathrm{Tr}(A^k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(A^n) \neq 0.$$

Montrer que A est diagonalisable.

1889 **CCINP 2025**

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Trouver les matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$.
   On souhaite résoudre le système différentiel suivant :
   $$(S) : \begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$$
3. On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$.
   Trouver un système d'équations vérifié par $U(t)$ et effectuer la résolution de ce système.
   On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant :
   $$(S') : \begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$$
4. On pose $V(t) = P^{-1}X(t)$.
   Trouver un système d'équations vérifié par $V(t)$.
5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de (S') est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?

1890 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. Montrer que :
   $$\forall x \in E,\ f(x) = x \implies f^\star(x) = x,$$
   où $f^\star$ est l'adjoint de f.
2. Étudier la suite u de $L(E)^{\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k.$$

1891 **CCINP TSI 2019**

Soit φ définie pour tout $(P;Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ par $\varphi(P;Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée $(Q_0;Q_1;Q_2;Q_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Soit $M_i = \sup_{t\in[-1;1]} |Q_i(t)|$, $i \in [\![0\,;3]\!]$. Montrer que $M_i = Q_i(1)$.

1892 **CCINP MP 2025**

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|.$$

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = E$ ou $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
2. Supposons E de dimension finie n. Soit $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E.
   (a) Montrer que les $\|f(e_i)\|$ sont tous égaux à un même entier $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
   (b) Montrer qu'il existe un entier k tel que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|.$$

3. Montrer que le résultat précédent reste valable en dimension infinie.
4. Montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle.$$

1893 **MP ENS 2025**

Une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est dite de *Bourdeaud* si tous ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdeaud si et seulement si elle est trigonalisable.
2. Existe-t-il une matrice complexe, symétrique et de Bourdeaud qui ne soit pas diagonalisable ?
3. Une matrice est dite *normale* si elle commute avec sa transposée. Quelles sont les matrices réelles, symétriques et normales de Bourdeaud ?

1894 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $f \in L(E)$ par :

$$\forall P \in E,\ f(P) = (X-3)(X+1)P' - XP.$$

Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

1895 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E un espace euclidien. Soit $\{e_1;\dots;e_n\}$ une famille liée génératrice de vecteurs unitaires de E, deux à deux distincts, pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i,j \in [\![1\,;n]\!],\ i \neq j \implies \langle e_i, e_j\rangle = \alpha.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ et $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$.
2. Montrer que $\dim(E) = n-1$.

1896 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note :

$$\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle = 0\}.$$

1. Dans cette question, on prend $n=3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A$.
2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $\mathcal{C}_A = \mathrm{Ker}(A)$;
   ii) $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
   iii) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ou $-A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

1897 **CCINP MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U_n la matrice carrée réelle de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Sans calculer le déterminant, trouver les valeurs propres de U_n avec leur multiplicité.
2. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{R}^n$. On définit :

   $$\forall i \in [\![2\,;n]\!],\ f_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{i-1} e_k - e_i.$$

   Montrer que $(f_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de U_n, pour le produit scalaire canonique.
3. En déduire une base orthonormée formée de vecteurs propres de U_n. Donner la formule de diagonalisation de U_n.

1898 **Mines-Ponts PC 2023**

Trouver tous les couples $(u;v)$ d'isométries qui anticommutent dans un espace euclidien de dimension 2.

1899 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \frac{1}{a} & 0 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition sur a, b et c afin que A soit diagonalisable.
2. Soit f l'endomorphisme associé à A. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

1900 **Mines-Télécom PSI 2019**

On considère :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P; Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=-2017}^{2017} P(k)Q(k) \end{array}$$

Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles φ est un produit scalaire ?

1901 **CCINP MP 2018**

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Calculer χ_C et π_C.
2. Montrer qu'il existe A et B dans $M_5(\mathbb{R})$ telles que :

$$C = A + B, \quad A^2 = A, \quad B^2 = 3B \quad \text{et} \quad AB = BA = 0.$$

3. Déterminer le rang de A et le rang de B.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C^n s'écrit comme une combinaison linéaire de A et B dont on déterminera les coefficients.

1902 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A une matrice réelle symétrique, B une matrice réelle antisymétrique et M une matrice réelle inversible telle que $A = M^{-1}BM$. Montrer que $A = B = 0$.

1903 **X MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et λ_1, λ_2 ses valeurs propres.
Trouver le lieu de $(a; c)$ sachant que les deux valeurs propres de A sont fixées.

1904 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ entier. Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$:

$$M^2 - \operatorname{Tr}(M)M + \det(M)I_n = 0.$$

1905 **CCINP MP 2018**

Soit x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
2. Trouver α réel tel que, si $x < \alpha$, alors $M \in E_x$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Ici, $x = -2$. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_x. Quel est son cardinal ?

1906 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer la distance entre le polynôme X^2 et le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

1907 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & X & \longmapsto & X^T - X \end{array}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1908 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $A \in M_{3n}(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 = 0$ et que $\operatorname{rang}(A) = 2n$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_{3n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

1909 **CCINP PSI 2022**

Soit f, g des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que $f = g \circ g$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Soit e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3. Montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3.
3. Montrer que e_1 et e_3 sont aussi des vecteurs propres de g.
4. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
5. Quelles sont les valeurs propres possibles de g ?

1910 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier les classes de similitude de $M_3(\mathbb{R})$.

1911 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et a un vecteur normé de E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$, endomorphisme de E.

1. Montrer que :
$$\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$
2. Déterminer les α tels que f_α soit bijectif.
3. Trouver les valeurs propres de f_α.

1912 **CCINP PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie la relation :

$$A^3 + 9A = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0; 3\mathrm{i}; -3\mathrm{i}\}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?
4. On suppose n impair. Montrer que A n'est pas inversible.
5. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation (1).

1913 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et u l'application qui à f de E associe $x \mapsto f(px+q)$, avec $p \in]0\,;1[$ et $q = 1 - p$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $]-1\,;1]$.
3. Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
4. Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

1914 **CCINP MP 2023**

Soit
$$\begin{array}{rccc} f : & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Redéfinir la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Donner les éléments propres de f.
4. L'application f est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de f dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, définir f^n.

1915 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E_n l'ensemble des $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_n.
3. Donner une base de E_n.

1916 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $\mathcal{F} \subset M_n(\mathbb{C})$ une partie non vide stable par produit.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \in \{0; \dots ; n\}$.

1917 **Centrale-Supélec PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A admet une valeur propre simple notée b et une valeur propre double notée a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que :
$$P(b) = f(b), \quad P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$
On note P_f ce polynôme.
3. Donner P_f dans le cas où f est l'application $x \mapsto \dfrac{x}{2}$, puis $x \mapsto \dfrac{x}{3}$.

1918 **CCINP MP 2023**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ou bien $ab > 0$, ou bien $a = b = 0$.
2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $(e_1; \dots ; e_n)$, de taille n, est :
$$\begin{pmatrix} & 0 & & & a_n \\ & & & \iddots & \\ & & \iddots & & \\ & \iddots & & 0 & \\ a_1 & & & & \end{pmatrix}$$
avec n pair.
   (a) Donner les sous-espaces vectoriels u-stables de dimension 2.
   (b) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si
$$a_i = a_{n+1-i} = 0 \ \text{ ou } \ a_i a_{n+1-i} > 0 \ \text{ pour tout } i \in [\![1\,; n]\!].$$

1919 **CCINP MP 2021**

On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{b2} \end{pmatrix}.$$

On pose également :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}I_2 & a_{12}I_2 \\ a_{21}I_2 & a_{22}I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}.$$

On suppose A et B diagonalisables. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ un vecteur propre de B, on pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de $\tilde{A}$ et que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de $\tilde{B}$.
2. Montrer que $W = x_1V_1 + x_2V_2$ est vecteur propre de $\tilde{A}$ et de $\tilde{B}$.
3. Comment former une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs propres communs à $\tilde{A}$ et à $\tilde{B}$?
4. La matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$?

1920 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$T(P) = (-3X+8)P + 5(X^2+X)P' - 2(X^3 - X^2)P''.$$

1. Soit $P \in E$ de degré n. Déterminer le coefficient de X^{n+1} de $T(P)$. En déduire que les vecteurs propres éventuels de T sont tous de même degré.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T. On note alors T_3 l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{C}_3[X]$. Déterminer la matrice de T_3 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
3. La matrice T_3 est-elle diagonalisable ? inversible ?
4. On note :
$$(E) : 2(x^3 - x^2)y'' - 5(x^2+x)y' + (3x+14)y = 0.$$
   (a) Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Comment peut-on trouver des solutions non polynomiales de (E) sur $]0\,;1[$?

1921 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale non nulle. Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

1922 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f, g \in L(\mathbb{C}^n)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ soit bijective.
Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) = n$.

1923 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & M \mapsto \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

1924 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \longmapsto & (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1) \end{array}$$

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Trouver les éléments propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1925 **CCINP PC 2016**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls.
On considère :

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & x - \langle a, x \rangle b \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $\langle a, x \rangle \neq 1$.
2. Si f est bijective, calculer f^{-1}.

1926 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(a + bX + cX^2) = (2a + c)(1 - X^2) + (a + b + c)X.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle inversible ?
3. Trouver les vecteurs propres de A.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

1927 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2014} = A^{2016}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \mathrm{rang}(A)$.
2. Ce résultat demeure-t-il vrai si A est seulement diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

1928 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $P \in \mathbb{C}[X]$. On note π_u le polynôme minimal de u.

1. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et π_u sont premiers entre eux.
2. Montrer que si $P(u)$ est inversible, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{C}[u]$.

1929 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $t \in \mathbb{R}$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1-t \\ 1-t & 1 & 1-t \\ t-1 & t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.
2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + (1-t)y(t) + (1-t)z(t) \\ y'(t) = (1-t)x(t) + y(t) + (1-t)z(t) \\ z'(t) = (t-1)x(t) + (t-1)y(t) + (2t-1)z(t) \end{cases}$$

1930 **Centrale-Supélec MP 2017**

1. On note $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x+3y & -6x+6y \\ x-y & 3x-2y \end{pmatrix} \,\middle|\, (x;y) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

   Montrer que $\mathcal{E}$ est un plan vectoriel d'éléments tous diagonalisables.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq \beta$.

   On suppose que pour tout nombre complexe t, $B + tA$ est diagonalisable.

   Montrer que $b = c = 0$.
3. Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont diagonalisables. Calculer $d_2(\mathbb{C})$, puis $d_n(\mathbb{R})$.

1931 **CCINP PSI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Soit D la matrice diagonale portant les valeurs propres de A. Montrer que si une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Soit $P(X) = X^7 + 4X^3 + 1$. Trouver toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.

1932 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p+q$ admet des vecteurs propres.
2. Montrer que E peut se décomposer en somme directe de plans ou de droites stables par p et q.

1933 **CCINP MP 2019**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit f un endomorphisme symétrique de E. On note a la plus petite valeur propre de f, b la plus grande.

1. Montrer que :
$$a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2.$$
2. Montrer que s'il existe un réel r tels que, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \leqslant r\|x\|^2$, alors $r \geqslant b$.
3. Soit k un réel fixé. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$
Montrer que $b \leqslant k+2$.

1934 **CCINP MP 2019**

Soit
$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P(X) + 2X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

1935 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Montrer que l'ensemble E des suites
$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = 2a\}$$
est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $\Psi : u \mapsto (a; u_0; u_1)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que les suites $n \mapsto 1$, $n \mapsto \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $n \mapsto \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ forment une base de E.

1936 **CCINP MP PSI 2019**

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(I_n + 2M) \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Mx, x\rangle = \|x\|^2$.
2. Conclure sur M.

1937 **Mines-Ponts MP 2019**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$, où $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$.

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Trouver $F^\perp$ et vérifier que l'on n'a pas $F \oplus F^\perp = E$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $\mathrm{dist}(1; F) = \|1 - P\|$.
   Indication : on pourra s'aider des polynômes définis par $P_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{n}$.

1938 **ENS MP 2012**

Soit p un nombre premier. Est-ce que toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est trigonalisable ?

1939 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit deux formes linéaires indépendantes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux vecteurs x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_2) = 0$, $f_2(x_1) = 0$, $f_2(x_2) = 1$.

1940 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit M une matrice de $GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T = -M^2$. Que peut-on dire de M ?

1941 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \longmapsto & (X^2+1)P'' - 2XP' \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique.
2. Prouver qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de Φ.
3. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\, T_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall \theta \in]0\,;\pi[,\ T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de Φ.

1942 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A+B) > 0$.
Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p + B^p) > 0$.

1943 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1, et que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Trouver des conditions sur n et α.

1944 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \cos(\beta) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ 1 & \cos(\gamma) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix}.$$

1945 **X PC 2023**

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B) > 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{A+B}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B)$.

1946 **Centrale-Supélec PSI 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M$ est inversible et symétrique, de spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega S$.
3. Trouver Ω et S telles que $M = \Omega S$ lorsque :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω' et une matrice triangulaire T à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega' T$.
5. Trouver Ω' et T telles que $M = \Omega' T$ lorsque :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1947 **Mines-Ponts MP 2014**

On considère le système :

$$\begin{cases} M^2 + I_n = 0 \\ MM^T = M^T M \end{cases}$$

1. Résoudre le système dans $M_n(\mathbb{R})$ pour n impair.
2. Résoudre le système dans $M_n(\mathbb{R})$ pour n pair.

1948 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

1. Existe-t-il un polynôme P tel que $P(A^2) = A$?
2. Que dire pour $P(A^k) = A$, avec k impair ?

1949 **CCINP MP 2016**

Soit $n \geqslant 2$ entier, $a \in \mathbb{R}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à a.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Le polynôme $X^n - (na)^{n-1}X$ est-il un polynôme annulateur de A ?
4. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

1950 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit M une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives. Montrer que :

$$\sqrt[n]{\det(I_n + M)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\det(M)}.$$

1951 **Mines-Télécom MP 2016**

On considère l'endomorphisme

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(1)X + P(2)X^2 \end{array}$$

Trouver les éléments propres de u.

1952 **Mines-Télécom MP 2016**

Trouver toutes les matrices $M \in M_4(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1953 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA^2$. En supposant que A admet des valeurs propres de module différent de 1, montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

1954 **TPE/EIVP PSI 2017**

Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$C = A + B, \quad C^2 = 2A + 3B, \quad C^3 = 5A + 6B.$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

1955 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1. On se place dans $\mathbb{C}$. Déterminer si A est diagonalisable ou non.
2. Même question si on se place dans $\mathbb{R}$.
3. Refaire les deux premières questions pour la matrice B.

1956 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \dfrac{X^T BX}{X^T AX}$ admet un maximum M et un minimum m.
2. Montrer qu'il existe V tel que $A = V^2$.
3. Montrer que la matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable.

1957 **CCINP MP 2022**

On considère dans $\mathbb{R}^n$ deux vecteurs non colinéaires $(a_1; \dots; a_n)$ et $(b_1; \dots; b_n)$.

1. Montrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

   où $(x_1; \cdots; x_n)$ est un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$, définit un espace vectoriel noté F. Donner sa dimension.

2. *Application :*

   Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note $e = (e_1; \dots; e_4)$ la base canonique. Soit le système :

$$\begin{cases} x - y + z + tx = 0 \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner une base orthonormale de F.

   (b) Calculer $\operatorname{dist}(u; F)$ lorsque $u = e_1 - e_3 + 2e_4$.

1958 **ENS MP 2018**

Soit σ une permutation de S_n et P_σ la matrice de permutation associée. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P_σ soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

1959 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit s une symétrie d'un espace vectoriel réel E. On considère :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) \end{array}$$

Déterminer les éléments propres de Φ.

1960 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et S_A l'ensemble des matrices semblables à A. Trouver l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que S_A soit fini.

1961 **CCINP TSI 2022**

Reconnaître l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice suivante :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1962 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = A + B$.
Montrer que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

1963 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit N un opérateur nilpotent. Comparer $\mathrm{Ker}(N)$ et $\mathrm{Ker}(\exp(N) - \mathrm{Id})$.

1964 **X MP 2015**

Soit L un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre qui conserve la transposée si et seulement s'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $L(X) = U^T X U$.

1965 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

1966 **CCINP MP 2025**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? dans $M_n(\mathbb{C})$?
3. Trouver une matrice triangulaire T semblable à A.
4. Quelle est la limite de $\frac{A^n}{n!}$ quand $n \to +\infty$?

1967 **Mines-Télécom MP 2025**

Résoudre l'équation matricielle suivante d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{R})$:

$$M(M^T M)^2 = I_n.$$

1968 **Mines-Télécom MP 2025**

On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Soit $\varphi : u \mapsto v$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Que peut-on dire de son spectre ?
2. Déterminer les valeurs propres de φ.

1969 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\|^2$ est égal à la somme des carrés des valeurs propres de A.

1970 **CCINP MP 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = AA^T$ et $A^2 = -I_n$.

1. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que $(A^T A)^2 = I_n$.
3. Montrer que $A^T A$ est symétrique, et en déduire que A est orthogonale.

1971 **CCINP MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.
2. Montrer que la réciproque est fausse à l'aide la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir un polynôme annulateur pour que A soit diagonalisable.
4. On suppose que A et A^2 sont diagonalisables. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.
5. On suppose que A^2 possède n valeurs propres distinctes. Montrer que A est diagonalisable.
6. On suppose que A^2 est diagonalisable et que A est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

1972 **ENS MP 2017**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une base $(e_1; \ldots; e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et une permutation σ de S_n telles que :

- A soit triangulaire dans la base $(e_1; \ldots; e_n)$;
- B soit triangulaire dans la base $(e_{\sigma(1)}; \ldots; e_{\sigma(n)})$.

1973 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une *involution* de $L(E)$ est un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que :

$$f \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

1. Soit a et b deux automorphismes de $L(E)$ vérifiant :

$$a \circ b \circ a = b \quad \text{et} \quad b \circ a \circ b = a.$$

   Montrer que $a^2 = b^2$ et que a^2 est une involution.

2. On suppose maintenant que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2.
   Soit a et b deux involutions de $L(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a) = \mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b).$$

1974 **Mines-Ponts MP 2014**

On définit le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$

On pose $M(P) = \sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$.

1. Montrer que $(1; X; \ldots; X^n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
2. Soit $Q = X^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k X^k$. Calculer $\|Q\|$ et montrer que $M(Q) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Q tel que $M(Q) = 1$.
3. Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
   Montrer que $M(P) \geqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

1975 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Démontrer que :

$$\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X.$$

1976 **Mines-Ponts MPI 2023**

On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs, de diagonale nulle, et telle que :

$$\forall i, j \in [\![1\,;n]\!],\ i \neq j \implies a_{ij} + a_{ji} = 1.$$

1. Exprimer $A + A^T$ en fonction de J et I_n.
2. Évaluer $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(J)$.
3. En déduire que $\mathrm{rang}(A) \geqslant n - 1$.
4. Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toute matrice vérifiant les propriétés de A soit inversible ?

1977 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. On considère l'application

$$W \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & W(t) \end{array}$$

telle que $W' = AW$.

Exprimer W en fonction de t et d'autres paramètres que l'on précisera.

1978 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre :

i) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(AB) \leqslant \min(f(A); f(B))$;

ii) $\exists \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f = \varphi \circ \mathrm{rang}$.

1979 **CCINP PSI 2024**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, soit $A = (\alpha^{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?

1980 **Mines-Ponts PSI 2023**

Pour tout $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$, on définit :

$$f_{a,b,c} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} b\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\mathrm{e}^t \\ a + c\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $F = \{f_{a,b,c} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. Déterminer $B \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $f \in F$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = Bf(t)$.

1981 **Mines-Ponts PSI 2022**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de *famille obtusangle* de $n+2$ vecteurs, c'est-à-dire une famille $\{u_1; \dots ; u_{n+2}\}$ telle que :

$$\forall (i; j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i \neq j \implies \langle u_i, u_j\rangle < 0.$$

1. Étudier les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Établir la propriété par récurrence pour tout n.
3. Montrer qu'il existe une famille obtusangle de $n + 1$ vecteurs.

1982 **Mines-Ponts PSI 2022**

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et $\wedge$ le produit vectoriel.
Soit

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & \omega \wedge x \end{array}$$

où ω est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On pose $P = \mathrm{Vect}(\{\omega\})^\perp$. On rappelle que la formule du double produit vectoriel n'est pas au programme et est donc à proscrire.

1. (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme g induit par la restriction de f à P.
   (b) Montrer que $\det(g) > 0$.
2. (a) Trouver tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$, unitaires de degré 3, annulateurs de f.
   (b) Sans faire de calculs, exprimer χ_f, le polynôme caractéristique de f.
3. (a) Redémontrer la propriété du cours suivante pour $\varphi \in L(E)$: le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par φ divise χ_φ.
   (b) Montrer-le dans le cas de f et g.

1983 **X ESPCI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X) \in \mathrm{Vect}(\{X^n\}).$$

1984 **X ESPCI 2018**

Pour tout couple $(P;Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que cette intégrale existe et qu'on a défini ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer l'existence d'une base orthonormale $\{P_0;\ldots;P_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire telle que pour chaque $i \in \{0;\ldots;n\}$, la famille $\{P_0;\ldots;P_i\}$ soit une base de $\mathbb{R}_i[X]$.
3. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que le polynôme P_i est scindé, à racines simples, et que toutes ses racines sont dans $[-1\,;1]$.

1985 **X ESPCI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$.
On suppose que $\det(A)$ est impair. On considère $(\varepsilon_1;\varepsilon_2;\varepsilon_3;\varepsilon_4) \in \{-1;1\}^4$ et on pose $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} a\varepsilon_1 & b\varepsilon_2 \\ c\varepsilon_3 & d\varepsilon_4 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A_ε est inversible.

1986 **X ESPCI 2015**

Soit A est une matrice carrée réelle. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, quelle que soit P orthogonale, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

1987 **CCINP PC 2024**

Soit la matrice $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Donner une valeur propre de M.

1988 **Mines-Ponts**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut écrire M sous la forme $M = A + S + cI_n$, avec $A \in A_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(S) = 0$, et $c \in \mathbb{R}$. Montrer, de plus, que :

$$\mathrm{Tr}(M^2) = \mathrm{Tr}(A^2) + \mathrm{Tr}(S^2) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)^2.$$

1989 **CCINP PSI 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, alors les valeurs propres de M sont forcément racines de P.
2. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}(M)\det(M) \neq 0$.
3. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 ne fait pas partie de son spectre.

1990 **CCINP MP 2022**

Soit A et B deux matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

1. Que peut-on dire de $A + B$, de AB et de $\mathrm{com}(A)$?
2. On suppose de plus que $\dfrac{A+B}{2}$ est orthogonale.
   Calculer $A^TB + B^TA$. Montrer que toute matrice du segment $[A\,;B]$ est orthogonale.

1991 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :
$$E = \bigcup_{k=1}^{p} F_k.$$
Montrer qu'il existe $k_0 \in [\![1\,;p]\!]$ tel que $F_{k_0} = E$.

1992 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$.
2. Montrer que $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1})^2 = S^{-1}$.
3. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ on a :
$$\langle X, X\rangle \leqslant \langle SX, X\rangle \langle S^{-1}X, X\rangle.$$
4. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

1993 **Mines-ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Soit encore $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$ et :
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$
Calculer $\det(A\Omega)$ et en déduire la valeur de $\det(A)$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer :
$$\Delta_n(\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cdots & \cos(n\theta) \\ \cos(n\theta) & \cos(\theta) & \cdots & \cos((n-1)\theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cdots & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1994 **CCINP TSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^n.

1995 **CCINP MP 2022**

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. Soit F et G deux polynômes de degré $n+1$. On considère f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. L'application f est-elle un automorphisme ? (Discuter selon que F et G sont premiers entre eux ou pas.)
3. Supposons que $F \wedge G = 1$ et que G soit scindé à racines simples. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1996 **Centrale-Supélec MP 2021**

1. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence de $d = \min\{p \in \mathbb{N} \mid N^p = 0\}$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de M.
3. On suppose maintenant que $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie :
$$M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0.$$
Montrer que $|\mathrm{Tr}(M)| \leqslant n$. Étudier les cas d'égalité.

1997 **Centrale PC 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

1998 **CCINP MP 2023**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1; \ldots; x_n)$ et $y = (y_1; \ldots; y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Soit $F = \{x = (x_1; \ldots; x_n) \mid x_1 = x_n\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F.
3. Déterminer $F^\perp$.
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $\mathrm{dist}(e_1; F)$.

1999 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) p est orthogonal ;

ii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

2000 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{R}^3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & P & \longmapsto & (P(0); P'(0); P(-1); P'(-1)) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$. L'application ϕ est-elle bijective ?
3. Exprimer M, matrice de ϕ dans la base canonique.
4. (a) Montrer que M est diagonalisable.
   (b) Donner un polynôme annulateur de M.
   (c) La matrice M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $\phi(Q) = (0; 1; 0; 1)$.
   (b) Déterminer Q.
   (c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

2001 **X MP MPI 2024**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$?

2002 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $MM^T = M^T M$.

Montrer que $\dfrac{1}{2}M \in O_2(\mathbb{R})$ et en déduire M.

2003 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que l'on ait $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^4)$. Le résultat est-il toujours vrai en dimension infinie ?

2004 **CCINP MP 2025**

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d, e, f pour que A soit diagonalisable. Dans l'hypothèse où A est diagonalisable, diagonaliser A.

2005 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que toute matrice symétrique réelle admet des sous-espaces propres orthogonaux. Énoncer le théorème spectral.
   (b) Justifier que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0\,;4]$.
3. Lister les éléments de $\mathrm{Sp}(A)$.

2006 **CCINP MP 2024**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit u un vecteur unitaire de E et pour a dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$f_a : x \longmapsto x + a\langle x, u\rangle u.$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique $a' \in \mathbb{R}^*$ tel que :
   $$\forall x \in E,\ \|f_{a'}(x)\| = \|x\|.$$
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{a'} + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f_{a'} + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
3. On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de f_a.

2007 **CCINP MP 2024**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $M = CL$, où C une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rang}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

2008 **ENS MP 2024**

Soit $n \geqslant 1$ entier et $\mathcal{I}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{I}_n$, alors pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP \in \mathcal{I}_n$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{I}_n$. Montrer que :
   $$A \text{ semblable à } B \iff \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) \text{ et } \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B).$$

2009 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E.

1. Ici, $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soit
$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 Px)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
   (b) Montrer que $\overline{F} \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
2. Soit $F = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.
3. Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ avec comme produit scalaire :
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Soit F l'ensemble des fonctions de E qui sont nulles sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$. Montrer que $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

2010 **CCINP MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. On cherche des vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ avec,
pour tout $i \in \{2; 3; 4\}$, $|\varepsilon_i| = 1$ et $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$.
Donner les éléments propres de A.
2. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?
3. Donner χ_A.
4. Si $a = b = c = 1$, donner π_A.
5. Si $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, donner π_A.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(\pi_A) = 4$.
7. Donner une condition sur a, b et c pour que $\deg(\pi_A) = 3$.

2011 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit A et B deux matrices de $M_4(\mathbb{C})$ telles que $A^4 = B^4 = I_4$ et $AB + BA = 0$.

1. Montrer que A et B sont diagonalisables.
2. Donner $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(B)$.
3. Donner les valeurs propres de A et B avec leur ordre de multiplicité.
4. Montrer que $C = \mathrm{i}AB$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

2012 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice conjuguée de A. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

Indication : on pourra, pour une des implications, prendre $\omega \in \mathbb{C}$ bien choisi et poser $S = \omega A + \overline{\omega} I_n$.

2013 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'ordre p.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. On suppose que $\dim(E) = n$ et que $p = n$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0; f(x_0); \ldots; f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? On note A cette matrice.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On choisit $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Donner un exemple de f dans $L(E)$ nilpotent d'ordre n, et d'une base telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice A.
4. (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(t(I_n + A))$.
   (b) Résoudre :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) + AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2014 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $E = \{f \in C^2([0\,;1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et F l'ensemble des fonctions continues sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que $\phi : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de E dans F.
2. Soit $g \in F$. On pose :

$$\forall x \in [0\,;1],\ G(x) = \int_0^1 |x - t| g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que G est de classe C^2 et calculer G''.
3. Déterminer une fonction continue k telle que :

$$\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x;t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Étudier l'existence et la valeur de $\sup\limits_{\|g\|_\infty \leqslant 1} \|\phi^{-1}(g)\|_\infty$.

2015 **CCINP PSI 2024**

Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, puis de $N = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

2016 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur.
2. Déterminer $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(B)$.
3. En déduire que $BA = I_2$.

2017 **Centrale-Supélec MP 2016**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il toujours $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il toujours $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?
3. Soit $P = X^3 + X + 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $P(M) = 0$.

2018 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

2019 **Mines-Ponts MP 2017**

Trouver dans $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ les implications entre les propositions suivantes :

i) Les matrices A et B sont diagonalisables et $AB = BA$;

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $A + \lambda B$ est diagonalisable.

2020 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel. On définit un *système générateur positif* sur E par le fait qu'il génère tous les éléments de E et que tous les éléments de E peuvent être générés par ce système en utilisant uniquement des coefficients positifs. Montrer que si $\dim(E) = n$, le cardinal d'un système générateur positif est supérieur ou égal à $n + 1$.

2021 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme.
2. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

2022 **Centrale-Supélec MP 2017**

On note L l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. On introduit l'endomorphisme $D : L \to L$ qui réalise un décalage d'indexation : $D(u)_n = u_{n+1}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}(P(D))$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_d[X]$ fixé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ker}(P(D))$. Soit $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;2d]\!]$, $Q(D)(u)_i = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ker}(Q(D))$.
3. Connaissant $(u_1; \ldots; u_{2d})$, proposer une méthode pour retrouver P.

2023 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Attention, ce n'est pas un déterminant de Vandermonde, il n'y a pas de colonne avec des puissances $n-1$.

2024 **Centrale-Supélec MP 2017**

On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que toute matrice carrée d'ordre $n > 0$ réelle inversible $A = (a_{ij})$, la matrice $A = (f(a_{ij}))$ soit également inversible.

1. Montrer que pour tous réels distincts x, y la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que f est injective.
2. On suppose que f est surjective. En considérant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ pour x, y, z réels avec $z \neq x + y$, montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
3. Montrer que f est surjective. Conclure quant à f.

2025 **ENS MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit le spectre de A contient un nombre complexe de module supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ soit nilpotente.

2026 **CCINP PC 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$ et $A^T = A$.

1. Montrer que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rang}(A)}$.

2027 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et A sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$.

1. Donner la définition de u est diagonalisable et donner la version matricielle de cette définition.
2. Donner une caractérisation de u diagonalisable.
3. On suppose $E = \mathbb{R}^n$, u diagonalisable et $u^4 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie vectorielle.
4. On donne $\mathrm{Tr}(u) = n - 2$. Préciser le résultat précédent.

2028 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et u une isométrie vectorielle.

1. Définir une isométrie vectorielle.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Justifier.
3. L'isométrie u admet-elle nécessairement une ou plusieurs valeurs propres réelles ? Justifier.
4. La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Caractériser géométriquement u.

2029 **ENSEA/ENSIIE MP 2013**

Soit K la matrice définie de la façon suivante : pour tout $(p;q) \in [\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient $K_{p,q}$ vaut $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pq}$. On définit K' la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de K.

1. Calculer KK'.
2. Montrer que K est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $|\det(K)|$.

2030 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit A et B deux matrices non nulles de $M_3(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A est semblable à B. Est-ce vrai en dimension 4 ?

2031 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent exclusivement 1 ou -1.

1. Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.
2. Calculer $\det(A)$ pour A comprenant -1 dans la diagonale et 1 partout ailleurs.

2032 **CCINP PC 2014**

Soit $n \geqslant 3$ entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A - I_n$ non inversible. Quel est le spectre de A ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

2033 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x;y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \iff \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

1. Montrer que f est inversible.
2. Montrer que l'image d'un plan est un plan.
3. Montrer que l'image d'une sphère est une sphère.
4. Montrer que pour tout $(x;y) \in E^2$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x, y\rangle = k\langle f(x), f(y)\rangle$.

2034 **Mines-Ponts 2016 PC**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de A.

2035 **CCINP PC 2014**

On considère l'ensemble

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ est semblable à un élément de A_2.

Dans tout l'exercice, on considère un élément M de $M_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

1. Démontrer la propriété attendue dans le cas où M est diagonalisable.
2. Dans cette question, on prend $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que M n'est pas diagonalisable.
   (b) Trouver un vecteur e_1 qui n'est pas dans le noyau de f.
   On pose $e_2 = f(e_1) - e_1$.
   (c) Vérifier que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (d) Trouver une matrice de A_2 semblable à M.
3. On se place dans le cas général où M n'est pas diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de $\mathbb{R}^2$ tel que le couple $(e_1; f(e_1))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que la matrice de f relativement à cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ pour un certain couple $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que le coefficient a est forcément négatif.
   (d) Si a est nul, montrer que b l'est forcément aussi. Conclure dans ce cas.
   (e) Traiter enfin le cas où a est strictement négatif.

2036 **Mines-Ponts PSI 2014**

1. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que $A^q = I_n$. Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{Tr}(A^k).$$

2037 **CCINP MP 2016**

Soit E un espace vectoriel, $u \in L(E)$ et P un polynôme admettant une racine simple, tel que $P(u) = 0$. Montrer de deux manières différentes que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$, dont une utilisant le théorème de Bézout.

2038 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $(a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = a_i a_j$ pour $i, j \in \{1; \ldots; n\}$.

1. Montrer que A est la matrice d'un projecteur orthogonal.
2. Montrer que $I_n - 2A$ est la matrice d'une symétrique orthogonale.

2039 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $a \in \mathbb{K}^*$ tel que :

$$f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0.$$

Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

2040 **X MP 2016**

Définissons pour $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A \star B = (a_{ij} \cdot b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Montrer que si A et B appartiennent à $S_n^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient aussi à $S_n^+(\mathbb{R})$.

2041 **CCINP PSI 2016**

Montrer que les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2042 **Mines-Télécom MP 2017**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? La réduire.
2. Résoudre l'équation $\exp(M) = A$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$.

2043 **Mines-Télécom MP 2017**

Considérons $H = \{AB - BA \mid (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2\}$.

1. Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle.
2. Notons $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{ij}E_{k\ell}$.
3. Démontrer que pour tout $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = H$.
4. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Démontrer que $\{\varphi; \mathrm{Tr}\}$ est liée.

5. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

2044 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A.
2. On cherche les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ solutions de l'équation :

$$(E) : M^2 + M = A.$$

(a) Si M est solution de (E), montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-3; -2; 1; 2\}$ et que M est diagonalisable.

(b) Trouver toutes les solutions de (E).

2045 **Centrale-Supélec PC 2017**

Soit $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. On pose $B = AA^T$ et $C = A^TA$. Soit λ un réel non nul. Montrer que si λ est valeur propre de B, alors elle est valeur propre de C avec la même multiplicité.

2046 **X ESPCI 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $(v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}(\{v_i - v_j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\})) \leqslant n - 1$.

2047 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A et B des matrices symétriques réelles d'ordre n. On suppose que pour tout X appartenant à $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^TBX > 0$. Montrer que $A + \mathrm{i}B$ est inversible.

2048 **ENSEA/ENSIIE MP 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset.$$

Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'équivalence est-elle conservée ?

2049 **Mines-Ponts MP 2017**

On se place dans un espace préhilbertien réel. On définit, pour des vecteurs quelconques $e_1, \dots, e_n$, la matrice M des produits scalaires $\langle e_i, e_j \rangle$.

1. Montrer que :
$$\det(M) \neq 0 \iff \{e_1; \dots; e_n\} \text{ est libre.}$$
2. Montrer que :
$$0 \leqslant \det(M) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$
3. Étudier les cas d'égalité.

2050 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1; \dots; b_{n-1}) \in (\mathbb{R}^*)^{n-1}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A admet n valeurs propres distinctes.

2051 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u.
2. Soit F un tel sous-espace vectoriel. Que dire de la matrice de u dans une base adaptée à $E = F \oplus G$ (G étant bien évidemment un supplémentaire de F) ?

2052 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit M et N deux matrices de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$. On suppose que MN est nulle et que $M + M^T$ est inversible. Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

2053 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit
$$\begin{array}{rccc} M & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & t & \longmapsto & M(t) \end{array}$$

On suppose que M est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M^2(t) = M(0) = I_n$.

1. Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t.
2. Montrer que $MM' = -M'M$ et $M' = -MM'M$.
3. Montrer que l'application $\Phi : t \mapsto \mathrm{Tr}(M(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $M(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

2054 **CCINP PSI 2019**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

2055 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer les puissances de A.
2. Trouver B telle que $A = B^2$.

2056 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit P_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0; 1\}$, telles qu'il n'y ait qu'un seul 1 par ligne et un seul 1 par colonne. Montrer que les matrices de cet ensemble sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

2057 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

2058 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f, g \in L(E)$.

1. On suppose qu'il existe $h \in L(E)$ de rang $r \geqslant 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r.
2. La réciproque est-elle vraie ?

2059 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace préhilbertien. Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E telle qu'il existe une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \langle e_i, e_j \rangle = f(|i - j|).$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

1. Montrer que M_n est inversible si, et seulement si, la famille $\{e_1; \ldots; e_n\}$ est libre.
2. On suppose M_n inversible et M_{n+1} non inversible.
   Montrer que la famille $\{e_1; \ldots; e_r\}$ est liée pour tout $r \geqslant n + 1$.
3. On suppose M_n inversible et M_{n+1} non inversible.
   Montrer que $e_r \in \mathrm{Vect}(\{e_1; \ldots; e_{r-1}\})$ pour tout $r \geqslant n + 1$.
4. On suppose $f(0) \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.
   Montrer que M_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2060 **CCINP MP 2019**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme associé.

1. Quel est le rang de M ?
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur l'image de f.

2061 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2+A-I_n$. On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

2062 **CCINP PC 2018**

On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit un produit scalaire dans E par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Sur E on définit également :

$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X.$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) On admet que f_α est un endomorphisme de E. Pour cette question, on suppose $n = 3$. Donner la matrice A_α de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Donner le spectre de f_α. En déduire si f_α est bijectif ou non. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

   On définit l'endomorphisme g_α sur E par $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.
2. (a) Donner le rang de φ. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.
   (b) Donner le spectre de g_α. L'endomorphisme g_α est-il diagonalisable ? bijectif ?
   (c) Montrer que $\|g_\alpha(P)\| \leqslant (1 + 2|\alpha|)\|P\|$.
   (d) En déduire qu'il existe M tel que :

$$M = \sup_{P\in E, P\neq 0} \left(\frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|}\right).$$

   Donner la valeur de M.

2063 **Mines-Ponts MP 2018**

On note N l'ensemble des matrices complexes nilpotentes et T l'ensemble des matrices complexes de trace nulle.

1. A-t-on $\mathrm{Vect}(N) = N$?
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(N) \subset T$.
3. A-t-on l'inclusion réciproque ?

2064 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & p \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E.

1. Déterminer une condition sur p telle que l'on ait :
$$\forall X \in M_3(\mathbb{R}),\ \|AX\|_2 \leqslant \|X\|_2.$$
2. Soit $x \in E$. Déterminer la limite éventuelle de $\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

2065 **Mines-Télécom PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2066 **Mines-Ponts MP 2018**

On identifie $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par la relation :
$$f(X) = X^T A X - 2B^T X.$$

1. Donner l'expression du gradient de f.
2. Montrer que f admet un minimum. Calculer ce minimum.

2067 **Mines**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et
$$M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
2. Si M est inversible, calculer M^{-1}.

2068 **CCINP PC 2018**

Soit une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$, $M = (C_1 \mid C_2 \mid C_3 \mid C_4)$ (C_i étant la $i^{\text{ème}}$ colonne de M). Montrer que :

$$\det((C_1 + C_3 \mid C_2 + C_4 \mid C_1 - C_3 \mid C_2 - C_4)) = 4\det(M).$$

2069 **CCINP PC 2018**

On munit $M_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(x) - 1 & 4 \\ -2 & \sinh(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cosh(x) & 3 \\ 6 & -\sinh(x) \end{pmatrix}.$$

1. A-t-on $\langle A, B\rangle = 0$?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de A à l'espace vectoriel des matrices symétriques.

2070 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

2071 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté et u un vecteur unitaire de E. On définit l'application f de E dans E par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que f est symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

2072 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Montrer que $\dim(E) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Quelle est la dimension maximale de E ?

2073 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. On suppose que $u^3 = u^2$. Montrer que u^2 est diagonalisable et que $u - u^2$ est nilpotent.
2. On suppose $u^{k+1} = u^k$ pour $k > 0$. Montrer qu'il existe un entier p tel que u^p est diagonalisable et que $u - u^p$ est nilpotent.
3. Conclure.

2074 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A = \left\{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(A)$.
2. Soit $B = \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_2\}$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(B)$.

2075 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et $J = (1) \in M_n(\mathbb{R})$.

On définit $P(x) = \det(A + XJ)$.

1. Majorer « fortement » le degré de P.
2. Que vaut $\det(A)$? (On distinguera les cas $c \neq 1$ et $c = 1$.)

2076 **CCINP MP 2012**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4, f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \neq \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_E)^2)$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Tr}(f) = 4$.

1. Montrer que 0 et 1 sont valeurs propres de f et que f n'est pas diagonalisable.
2. Montrer l'existence d'un vecteur $x_0 \in \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_E)^2) \setminus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ tel que $F = \mathrm{Vect}(\{x_0; f(x_0)\})$ soit un plan de E.
3. Montrer que 1 est valeur propre de multiplicité 2.
4. Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2077 **Centrale-Supélec MP 2015**

On considère l'ensemble

$$U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^T M = I_n\}.$$

1. Soit u et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que tout espace propre de l'un est stable pour l'autre.
2. Soit $M \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $M^T = M$. Montrer qu'il existe U et V symétriques réelles telles que :
   - $M = U + \mathrm{i}V$
   - $UV = VU$
   - $U^2 + V^2 = I_n$
3. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $M = \exp(\mathrm{i}S)$.
4. Montrer que $M \in U_n(\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe P orthogonale (réelle), S symétrique réelle telle que $M = P\exp(\mathrm{i}S)$.

2078 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée. On note :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A & : & S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & & S & \longmapsto & ASA^T \end{array}$$

Montrer que $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$.

2079 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $\mathrm{rang}(A) = 2$ et $A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

2080 **CCINP PC 2017**

Soit A une matrice réelle symétrique telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
3. En déduire que $A = 0$.

2081 **CCINP PSI 2022**

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Soit encore $z \in E$.

1. Montrer que $\min\limits_{x \in E} \|f(x) - z\|$ existe et expliquer la méthode de calcul.
2. Calculer $\min\limits_{X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})} \|AX + B\|$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2082 **Mines-Ponts MP 2016**

On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, et e le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes dans la base canonique sont égales à 1. Soit M une matrice carrée symétrique de taille n telle que :

- Sur chacune de ses lignes, d coefficients sont égaux à 1 et les autres sont nuls.
- Ses coefficients diagonaux sont tous nuls.
- Pour tout $i \neq j$: si $m_{ij} = 0$, alors il existe un unique k tel que $m_{ki} = m_{kj} = 1$ et si $m_{ij} = 1$, alors il n'existe pas de tel k.

1. Quelles sont les valeurs propres de J ?
2. Écrire MJ, JM et M^2 comme combinaison linéaire de M, J et I_n.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(M - dI_n) = \mathrm{Im}(J)$. En déduire une relation entre d et n.
4. Montrer que les valeurs propres de M autres que d sont racines du polynôme $X^2 + X + 1 - d$.

2083 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur le segment $[0\,;1]$, muni de la norme uniforme. Soit u l'application définie sur E par :

$$u(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer que $\sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{|u(f)|}{\|f\|} = 1$, mais que cette valeur n'est pas atteinte.

2084 **ENSEA/ENSIIE MP 2016**

Soit $P_1 = X^3 - 12X - 12$ et $P_2 = X^3 + 12X - 12$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler ce que signifie « α est racine de multiplicité n de P » et donner une condition nécessaire et suffisante pour que α soit racine de multiplicité n de P.
2. (a) Combien de racines réelles admet P_1 ? Donner leur ordre de multiplicité.
   (b) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P_1(M) = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P_2(M) = 0$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M est une matrice scalaire.

2085 **CCINP PC 2017**

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.

1. Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\operatorname{Ker}(f)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
4. Prouver que f est surjectif.
5. Trouver tous les polynômes P tels que :
$$P(X+1) - P(X) = X^2.$$
6. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

2086 **X ESPCI**

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas la somme de deux carrés de $M_n(\mathbb{R})$.

2087 **Mines-Ponts MP**

1. Soit E_1, E_2, E_3 des espaces vectoriels de dimension finie.
   Soit $f \in L(E_1, E_2)$, $g \in L(E_1, E_3)$ tels que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
   Montrer qu'il existe $h \in L(E_2, E_3)$ tel que $g = h \circ f$.
2. On suppose ici $E = M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit ϕ une forme linéaire de E. Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que :
   $$\forall M \in E,\, \phi(M) = \mathrm{Tr}(CM).$$
   (b) Soit A une matrice nilpotente de E. Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que :
   $$\forall M \in E,\, \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(C(AM - MA)).$$
   En déduire que $A = CA - AC$.

2088 **Centrale-Supélec PSI 2025**

Soit E un espace euclidien, $f \in L(E)$ bijective vérifiant pour tous $x, y \in E$:
$$\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$
On définit $s = f \circ f$.

1. Montrer que s est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit λ une valeur propre de s. Montrer que $\lambda < 0$. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Soit x un vecteur non nul appartenant au sous-espace propre relatif à λ. On pose $F = \mathrm{Vect}(\{x; f(x)\})$. Montrer que F est un plan vectoriel stable par f et que $F^\perp$ est stable par f.
4. Montrer alors que dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ bien choisie, $(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

2089 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ et
$$\Delta : M \in M_p(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $M_p(\mathbb{R})$ et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall (M; N) \in M_p(\mathbb{R})^2,\, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(M)\Delta^{n-k}(N).$$
2. Soit $H \in M_p(\mathbb{R})$. On suppose que $B = \Delta(H)$ commute avec A. Montrer que $\Delta^2(H) = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$.
3. Montrer que $\Delta^n(H^n) = n!B^n$.
4. En déduire que B est nilpotente.

2090 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$ des matrices réelles.

1. Calculer U^2. Déterminer les éléments propres de U.
2. Déterminer les éléments propres de V et W.
3. Montrer que l'on peut trouver une base de vecteurs propres commune à U, V et W.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quels sont les éléments propres de A ? À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle inversible ?

2091 **Mines-ponts MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = A - I_n$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec N.
2. Soit $(E) : A = X^2$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si X est solution de (E), alors il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que :
   $$X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \alpha_1 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer qu'il existe au plus deux solutions de (E).
3. (a) Donner le développement limité au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ à la précision $o(x^n)$.
   (b) Résoudre (E).

2092 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in S_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$ et si $M^T M = M M^T$.

2093 **CCINP PC 2024**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de A.

2094 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

La matrice A est-elle inversible ?

2095 **CCINP PSI 2016**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que K est diagonalisable.
2. Montrer que M s'écrit en fonction de puissances de K.
3. Diagonaliser M.
4. En déduire M^n.

2096 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. Supposons que $\text{rang}(f) = 2$. Exprimer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\text{Tr}(f)$ et $\text{Tr}(f^2)$.
2. Supposons que $\text{rang}(f) = 3$. Exprimer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\text{Tr}(f)$, $\text{Tr}(f^2)$ et $\text{Tr}(f^3)$.

2097 **Centrale-Supélec PSI 2016**

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Énoncer le théorème spectral.
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer alors qu'il existe O orthogonale et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

2098 **ENS 2025**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. Montrer que :

$$u \text{ est simple} \iff \chi_u \text{ est irréductible dans } \mathbb{K}[X].$$

2099 **CCINP PC 2015**

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E, A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique. On étudie la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur $x = (x_1; \dots ; x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x)\rangle - 2\langle x, u\rangle$.

1. Ici $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = (5; 1)$. Vérifier que :

$$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2.$$

   Montrer que $X_0 = (2; 1)$ est un point critique de f.
2. Avec les conditions de la question 1, soit $h = (h_1; h_2)$. Montrer que

$$f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2,$$

   où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0.
3. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E, $\langle x, \varphi(x)\rangle > 0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ, montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

2100 **CCINP PC 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \quad \text{et} \quad \rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

1. Déterminer la norme de $\|A\|$ et $\rho(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
3. (a) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrer que :

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j|$$

   pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

   (b) En déduire que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
4. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle dans $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.
5. Montrer que $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2101 **CCINP PSI 2021**

Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice H est-elle diagonalisable ?
2. Si $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :
$$R(a;b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix},$$
notée plus simplement R.
Exprimer R en fonction de H et I_3. La matrice R est-elle diagonalisable ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}(H^n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières et diverge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \mathrm{Tr}(R^n)$. Peut-on trouver a et b tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

2102 **CCINP PSI 2021**

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit :
$$A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_m.
2. Donner, si existence, les valeurs de m telles que A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable, déterminer la matrice de passage P.

2103 **CCINP MP 2015**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Comparer $\det(A)$ et $\det(-A)$.
2. (a) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Discuter de la parité du polynôme caractéristique de B.
(b) Retrouver le fait que si n est impair et $B \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det(B) = 0$.

2104 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que 0 est la seule matrice qui vérifie $AM = MB$. Montrer que toute matrice s'écrit de façon unique comme $AN - NB$.
2. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que la seule matrice qui vérifie $AM = MB$ est la matrice nulle.
3. Est-ce encore le cas dans $M_n(\mathbb{R})$?

2105 **Centrale-Supélec MP 2016**

1. Donner le polynôme caractéristique de $A \in M_2(\mathbb{R})$ en fonction de sa trace et de son déterminant.
2. Soit E l'ensemble des nombres premiers p tels que :
$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}),\ A^p + \cdots + A = pI_2.$$
Montrer à l'aide de $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ que $\{2\,;3\} \subset E$.
3. Montrer que pour tout $p \in E$ et A associé, $X^{p+1} - (p+1)X + p$ annule A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que 1 est sa seule valeur propre réelle.

2106 **Centrale-Supélec MP 2017**

On se donne un espace vectoriel de dimension finie E et $u \in L(E)$. On considère les deux propositions :

- (P_1) : Il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.
- (P_2) : Il existe a et b des endomorphismes de E tels que $u = a+b$ et $a^2 = b^2 = 0$.

1. Montrer que (P_1) implique (P_2).
2. On suppose ici que u est un automorphisme. Montrer que si (P_2) est vérifiée alors $E = \operatorname{Ker}(a) \oplus \operatorname{Ker}(b) = \operatorname{Im}(a) \oplus \operatorname{Im}(b)$.
3. Montrer que (P_2) implique (P_1) dans chacun des cas suivants :
   (a) u est un automorphisme ;
   (b) u est nilpotent.

2107 **CCINP PSI 2017**

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$. On définit le produit scalaire :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
3. Que vaut $\operatorname{dist}(1; E)$?

2108 **CCINP MP 2017**

Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est orthogonale.
2. Étudier la nature de A et ses éléments caractéristiques.

2109 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Déterminer une condition sur λ réel tel qu'il existe A une matrice antisymétrique réelle vérifiant $A^2 = \lambda I_n$.
2. Déterminer les matrices B symétriques réelles telles qu'il existe A une matrice antisymétrique réelle vérifiant $A^2 = B$.

2110 **Mines-Ponts MP 2019**

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^A = I_n$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.

2111 **Mines-Télécom PSI 2018**

L'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée d'un espace euclidien. Déterminer la nature de f.

2112 **CCINP PC 2022**

Soit $(p;q) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation (E) suivante :

$$M^2 + pM + qI_n = 0$$

d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On pose $\Delta = p^2 - 4q$. Vérifier l'identité :

$$M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2} I_n\right)^2 - \frac{\Delta}{4} I_n.$$

   On suppose désormais que $\Delta > 0$.
2. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre l'équation $Y^2 = I_n$, d'inconnue $Y \in M_n(\mathbb{R})$.
3. Élever la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ au carré. En déduire une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs mais pas diagonale, solution de $Y^2 = I_n$.

   On considère une solution de (E), notée A, et on suppose que A n'est pas colinéaire à I_n.
4. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M = \alpha A + \beta I_n$.
   (a) Montrer que l'égalité $M^2 = M$ équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha(2\beta - \alpha p - 1) = 0 \\ \beta^2 - \beta - \alpha^2 q = 0 \end{cases}$$

   (b) Montrer que ce problème a exactement quatre solutions.
   Les matrices correspondantes différentes de 0 et de I_n sont notées U et V.
   (c) Calculer les produits UV et VU. Commenter.

2113 **Mines-Ponts MP 2024**

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in M_n(\mathbb{R})$ pour qu'il existe $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S^2 + S + I_n$.
2. Déterminer $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une unique matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S^2 + S + I_n$.

2114 **CCINP PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Pour quelles valeurs de a la famille $\{A; A^2\}$ est-elle liée ?
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

2115 **CCINP PC 2018**

Soit E un espace vectoriel tel que $\dim(E) = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Soit encore $f \in L(E)$.

1. Si λ est une valeur propre et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?
2. Supposons $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_E$. Justifier que f admet au moins une valeur propre réelle et la donner.

2116 **Centrale-Supélec PC 2022**

Pour tout $(\alpha; \beta) \in [0\,;1]^2$, on définit la matrice

$$A(\alpha;\beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(A(\alpha;\beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
2. Dans le cas de convergence, déterminer le rang de la matrice limite.

2117 **CCINP PC 2022**

Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b; c; d)$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

2118 **CCINP PSI 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' = -x + 3y - 2z \\ y'' = -3x + 5y - 2z \\ z'' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

2119 **Mines-Ponts**

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini à q éléments. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

2120 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $u \in L(E)$.

1. Montrer que si u est de rang r, alors son polynôme minimal a un degré inférieur ou égal à $r+1$.
2. Dans le cas général, peut-on améliorer cette majoration ?

2121 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit $P = X^2 + \alpha X + \beta$ un polynôme n'ayant pas de racine réelle, E un espace vectoriel réel de dimension n, et $f \in L(E)$ telle que $P(f) = 0$.
On cherche à prouver qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

1. Montrer que n est pair et que f n'admet pas de valeur propre.
2. Soit $x \in E$ et $y = f(x) + \alpha x$. On pose $H_x = \mathrm{Vect}(\{x; y\})$. Montrer que H_x est stable par f.
3. Démontrer le résultat annoncé.

2122 **Mines-Ponts MP 2019**

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) & \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) & \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \end{pmatrix}^n .$$

2123 **CCINP MP 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $f \in L(E)$ de rang 1.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si f est non diagonalisable.
2. Donner un exemple concret d'une matrice à coefficients réels de taille 3×3 de rang 1 qui ne soit pas diagonalisable. Justifier par une autre méthode qu'elle n'est pas diagonalisable.

2124 **Mines-Ponts PC 2019**

On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $a_2 \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique et noté χ_n.

1. Déterminer χ_2 et χ_3.
2. Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2}.
3. On pose $b_n = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$. Montrer alors que $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$.
4. Selon que b_n est nul ou non, étudier la diagonalisabilité de A_n.

2125 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver les éléments propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que A est semblable à la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Calculer T^n puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2126 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note E_T l'ensemble des suites réelles T-périodiques. On note σ l'endomorphisme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de E_T. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

2127 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable.

2128 **ENS MP 2019**

Soit $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(XYXY) \leqslant \mathrm{Tr}(X^2Y^2)$.

2129 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Étudier la réciproque.

2130 **ENSEA/ENSIIE PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs propres de la matrice B.

2131 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A ne peut pas avoir de valeurs propres réelles.
2. Montrer que n est nécessairement pair.
3. Trouver le déterminant et la trace de A.

2132 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Rappeler la forme des solutions de $au_{n-2} + bu_{n-1} + cu_n = 0$ pour $a \neq 0$.
2. Étudier l'inversibilité de A_n.
3. Étudier la diagonalisabilité de A_n dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

2133 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $(X-1)^2(X+1)$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que M est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2134 **Mines-Ponts MP 2015**

Trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

2135 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit n un entier supérieur à 3 et $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer les éléments propres de A_n.

2136 **CCINP MP 2015**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et p un entier naturel, avec $p \geqslant 2$. Soit $e_1, \dots, e_p$ p vecteurs de E tels que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant p$, si $i \neq j$, alors $\langle e_i, e_j \rangle < 0$.

1. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant p$, comparer $\lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle$ et $|\lambda_i||\lambda_j|\langle e_i, e_j \rangle$.
2. Comparer $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k \right\|^2$ et $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \right\|^2$.

   Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0_E \implies \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0_E$.
3. Montrer que toute sous-famille de $p-1$ vecteurs extraite de $\{e_1; \dots; e_p\}$ est libre.

2137 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(u; v) \in L(E)^2$, on note $[u, v] = uv - vu$. soit $f, g \in L(E)^2$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f, g] = \alpha f$.
   (a) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $[f^p, g]$ et en déduire que f est nilpotente.
   (b) Montrer que f et g sont trigonalisables dans la même base.
2. On suppose qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^{*2}$ tel que $[f, g] = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g sont trigonalisables dans une même base.

2138 **X MP 2017**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et deux polynômes $A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$f(P) = AP'' + BP'.$$

On suppose de plus que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_2 + \beta_1 \neq 0.$$

Montrer que f est diagonalisable.

2139 **X PC 2008**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{C})$ l'équation :

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2140 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de E.
On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_n)$ la base $\mathcal{B}$ orthonormalisée selon le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Rappeler le procédé de Schmidt ainsi que l'expression des ε_i en fonction de e_i.
2. Prouver que $(\mathrm{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \prod_{i=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_i \rangle$.
3. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}''$ orthonormale de E, on a :

$$\left| \det((\mathrm{Id}_E))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} \right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\| \quad (*)$$

4. Prouver que $(*)$ devient une égalité si et seulement si $(\mathrm{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est diagonale.

2141 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs tels que :

$$\forall (i; j) \in [\![1\,; 3]\!]^2,\ a_{ij} a_{ji} = 1.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. On suppose que A n'est pas inversible. Étudier la réduction de A.
3. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.
   Montrer que dans cette condition, A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. L'est-elle dans $\mathbb{C}$?

2142 **Centrale-Supélec PSI 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -8 & \frac{13}{3} & -\frac{14}{3} \\ -4 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (u; v; w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2143 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $p \in]0\,;1[$. On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$u(f) : x \longmapsto f(p(x-1)+1).$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

2144 **ENSAM PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

2145 **ENSAM PSI 2015**

Soit m et p deux entiers tels que $m \geqslant p \geqslant 1$ et $\Delta(m;p)$ le déterminant suivant :

$$\Delta(m;p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+1}{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \cdots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Déterminer $\Delta(m;p+1)$.

2146 **Mines-Télécom PC 2022**

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.
2. Soit $A \in M_7(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\}$.
   Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de A et le déterminant de A.

2147 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, d'indice p, et telle que $M^TM = MM^T$.

1. Déterminer M^TM.
2. Déterminer M.

2148 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. La matrice $M = A+I_n$ est-elle inversible ?

2149 **CCINP PSI 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rang}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

2150 **CCINP PSI 2015**

Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls et H une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr}(HD) \leqslant \operatorname{Tr}(D)$.

2151 **CCINP PSI 2015**

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Trouver une majoration de la somme de ses coefficients meilleure que n^2.

2152 **ENSAM PSI 2015**

Étant donné un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on note $\alpha = \|\vec{u}\|$. On considère

$$f : \vec{x} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$$

endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$. Calculer $f \circ f$.
   On rappelle que :
   $$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$
2. Déterminer la matrice A de f et A^2 dans la base canonique.
3. Déterminer f^n en fonction de α, f et f^2.
4. Déterminer l'endomorphisme suivant :
   $$\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

2153 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien et $(y_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs telle qu'il existe $A, B > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice de E.
2. On considère dans cette question uniquement :
   $$E = \mathbb{R}^2 \text{ et } y_1 = (1; 0),\ y_2 = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}; -\tfrac{1}{2}\right),\ y_3 = y_2.$$
   Montrer que cette famille convient.
3. On suppose ici que $A = B = 1$ et que, pour tout $j \in J$, $\|y_j\| = 1$. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est une base orthogonale de E.
4. On suppose seulement $A = B$. Montrer que :
   $$\forall x \in E,\ x = \tfrac{1}{A} \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j.$$

2154 **Centrale-Supélec PSI 2022**

On note $I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $E = C(I, \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $f \in E$, on définit deux fonctions $A(f)$ et $B(f)$ sur I en posant :

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que :
$$\forall (f; g) \in E^2,\ \langle A(f), g\rangle = \langle f, B(g)\rangle.$$
En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont toutes positives.
2. Montrer que :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ (A(f)(x))^2 \leqslant x \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
En déduire l'existence d'un réel K indépendant de f tel que $\|A(f)\| \leqslant K\|f\|$.
3. Montrer que A est un endomorphisme continu de E.

2155 **TPE/EIVP PC 2017**

Soit dans un espace vectoriel euclidien f telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple de vecteurs x, y, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que f conserve la norme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire.
3. Montrer que f est linéaire.
4. Que peut-on conclure sur f ?

2156 **Central-Supélec MP 2019**

1. Montrer que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que B et B^T ont les mêmes valeurs propres. On suppose que A et B ont une valeur propre commune. Montrer qu'il existe $C \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.
   (b) On suppose maintenant que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que la seule matrice complexe C telle que $AC = CB$ est $C = 0$.

2157 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

2158 **CCINP MP 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que :

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n.$$

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.
   (b) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
   (c) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
   (d) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1} = \widetilde{P^{-1}}$.
2. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.
   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que si A est diagonalisable, $\widetilde{A}$ l'est aussi.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

2159 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent et B est nilpotente.

1. Démontrer que $\det(I_n + B) = 1$.
2. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

2160 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit E l'ensemble des fonctions de classe infinie sur $\mathbb{R}$ et D l'opérateur de dérivation sur E. On définit les quatre fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cosh(x), \quad f_2(x) = \sinh(x), \quad f_3(x) = x\cosh(x), \quad f_4(x) = x\sinh(x).$$

Soit $B = (f_1; f_2; f_3; f_4)$ et $F = \mathrm{Vect}(B)$.

1. Montrer que B est une base de F.
2. Montrer que D induit un endomorphisme d sur F.
3. Écrire la matrice A de d dans B.
4. Calculer A^4 et trouver un polynôme annulateur de d.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2161 **Mines-Ponts PC 2014**

Soit A une matrice non nulle de $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est la matrice nulle.

1. Que vaut la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$?
2. Déterminer la dimension de $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$.

2162 **Mines-Ponts PC 2016**

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et A^T sont semblables.

2163 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit a un nombre réel différent de 0, 1 et -1. On suppose que M et aM sont semblables.

1. Montrer que si x est une valeur propre de M, alors pour tout naturel k non nul, xa^k est une valeur propre de M.
2. En déduire que M est nilpotente.

2164 **ENSEA/ENSIIE**

Trouver l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation $A^3 + A = 2I_n$.

2165 **ENS MP 2018**

Soit $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = I_n$. Montrer que $BA = I_n$.

2166 **Mines-Télécom MP 2016**

1. Donner le théorème du rang.

   Soit f et g des endomorphismes de E.
2. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) \leqslant n$.
3. On suppose que $g + f$ est bijective. Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) \geqslant n$.

2167 **X MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A^3 = A^2$. Calculer $\exp(A)$.
2. On suppose $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Calculer $\exp(A)$.

2168 **CCINP MP 2016**

1. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A(X)$ son polynôme caractéristique.

   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_A(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_A(x)$ et $\chi_A(0)$.
3. On suppose $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

2169 **Mines-Ponts MP 2015**

Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} (A + I_n)^7 - (A^7 + I_n) = 0 \\ \mathrm{Tr}(A) = 0 \end{cases}$$

2170 **CCINP PSI 2021**

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^T M$.
   La matrice M est-elle inversible ?
2. On pose $N = (M^{-1})^T M$.
   Montrer que $N \in O_{n+1}(\mathbb{R})$.

2171 **Mines-Télécom PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2.
2. Calculer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

2172 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit

$$\phi(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & \text{\huge 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le déterminant de $\phi(a;b)$.
2. Déterminer, pour $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 = yz$, le déterminant de

$$M = \begin{pmatrix} 2x & z & & & & \\ y & 2x & z & & \text{\huge 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & y & 2x & z \\ & & & & y & 2x \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

2173 **CCINP PSI 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in L(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

2174 **CCINP PSI 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$.

1. On suppose f surjective. L'application f^2 est-elle surjective ?
2. On suppose $f^3 = f$. Montrer que si f est injective, f est surjective.

2175 **Mines-Ponts PSI 2015**

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E' l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in E$, on note :

$$T(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T(f)$ appartient à E, puis que T est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres de $T|_{E'}$.
   Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?

2176 **X**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$ sont des multiples de 3.

2177 **X-ENS/Mines/Centrale**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} f & : & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & & M & \longmapsto & AM + MB \end{array}$$

Quel est le spectre de f ?

2178 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit $M \in M_3(\mathbb{C})$ semblable à $\mathrm{i}M$.

1. Soit λ une valeur propre de M. Montrer que $\mathrm{i}\lambda$ est aussi une valeur propre de la matrice M.
2. Montrer que M est nilpotente (i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$).

2179 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\lambda = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

1. Prouver l'existence de λ, puis le calculer.
2. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer de deux manières que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \lambda = 0$.

2180 **Mines-Télécom PSI 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente telle que $AA^T = A^T A$. Montrer que $A = 0$.

2181 **Mines-Télécom PSI 2016**

On considère l'endomorphisme :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' + P \end{array}$$

Déterminer $\det(f)$.

2182 **CCINP PSI 2016**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ et $A \neq 0$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. On suppose que 0 appartient au spectre de A. Déterminer ce spectre.
3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

2183 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle classe de A l'ensemble :

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

On suppose que la classe de A est bornée.

1. On appelle *matrice de dilatation* toute matrice de la forme $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que A est diagonale en utilisant les matrices de dilatation. Montrer que toutes les matrices appartenant à la classe de A sont diagonales.
2. En utilisant les matrices $M_i = I_n + E_{i,i+1}$, montrer que A est une matrice scalaire.

2184 **TPE/EIVP PC 2015**

Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Soit les propositions suivantes :
   (P_1) $f \circ g \circ f = f$
   (P_2) $g \circ f \circ g = g$
   (P_3) $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(g)$
   (a) Montrer que (P_1) et (P_2) entraînent (P_3).
   (b) Montrer que (P_3) et (P_1) entraînent (P_2).

2185 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
2. On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer que $f \circ g$ est aussi diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R}\backslash]0\,;4]$.

2186 **ENSEA/ENSIIE PC 2014**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel normé euclidien de dimension n. Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E telle que :

$$\forall (i; j) \in [\![1\,; p]\!]^2,\ i \neq j,\ \langle u_i, u_j \rangle = -1.$$

On considère pour tout $(u; v) \in E^2$ et pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle\langle (u; x), (v; y) \rangle\rangle = \langle u, v \rangle + xy.$$

1. Montrer que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est un produit scalaire.
2. Que peut-on dire de la famille $((u_i; 1))_{1 \leqslant i \leqslant p}$? En déduire une inégalité entre p et $n + 1$.

2187 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Établir l'équivalence :

$$M \text{ non diagonalisable} \iff M = D + T \text{ avec } D \text{ scalaire et } T \text{ nilpotente non nulle}$$

Étudier les matrices $X \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2188 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit $\hat{f}$ par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\phi : f \mapsto \hat{f}$ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de ϕ.
3. L'endomorphisme ϕ_n induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

2189 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \geqslant 2$ entier et α réel. On considère la matrice suivante :

$$A = \left(\alpha^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

2190 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G ont même dimension si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = F \oplus H$ et $E = G \oplus H$, c'est-à-dire s'ils ont un supplémentaire commun H.

2191 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit f et g des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) = \operatorname{rang}(f) - \operatorname{rang}(g \circ f).$$

2192 **Mines-Ponts Pc 2015**

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Trouver la relation entre $\dim(\operatorname{Ker}(AB))$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \dim(\operatorname{Ker}(B))$. Étudier le cas d'égalité.

2193 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi(X;Y) = \begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2194 **Mines-Ponts PSI 2013**

On considère le déterminant suivant :

$$\det(A + xB)$$

avec A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Quel type de fonction est-ce ? (sinus, exponentielle,...)
2. Déterminer le degré de ce déterminant.

2195 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée. On considère :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & S & \longmapsto & ASA^T \end{array}$$

Montrer que $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$.

2196 **ENS**

Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \geqslant n,\ A + A^k = A^T.$$

2197 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_2(\mathbb{C})$.

Trouver le rayon de la convergence de la série entière $\sum \|A^n\| z^n$.

2198 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$(f - \mathrm{Id})^3 \circ (f - 2\mathrm{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\mathrm{Id}) \neq 0.$$

L'application f est-elle diagonalisable ?

2199 **Mines-Ponts MP 2014**

On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par M.

2200 **X MP 2014**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé. On note :

$$\mu(E) = \sup_{(x;y) \in E^2 \setminus \{(0;0)\}} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Montrer que $1 \leqslant \mu(E) \leqslant 2$.
2. Montrer que E est euclidien si et seulement si $\mu(E) = 1$.

2201 **X-ENS Cachan PSI 2016**

On considère une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note :

$$p(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

1. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(A^k) = p(A)^k$.
2. Montrer que l'application $A \mapsto p(A)$ définit une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
   (a) Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$.
4. Soit $\|\cdot\|$ une norme vérifiant :

$$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}),\, AB = BA \implies \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\| \quad (1)$$

   Montrer que, pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\| \geqslant p(A)$.
   (Autrement dit, p est la plus petite norme vérifiant la propriété (1).)

2202 **Centrale-Supélec MP 2014**

Soit E un espace euclidien de dimension n. Trouver tous les vecteurs $x \in E$ tels qu'il existe une base orthonormée $(e_1; \dots; e_n)$ de E telle que $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

2203 **Mines-Ponts PSI 2015**

On se donne deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ et on considère l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi : M \longmapsto AMB.$$

1. Montrer que :
$$\varphi = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$
2. Montrer que :
$$\varphi \text{ est nilpotente} \iff A \text{ ou } B \text{ est nilpotente.}$$
3. Montrer que :
$$\varphi \text{ est diagonalisable} \implies A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}$$
4. Qu'en est-il de la réciproque ?

2204 **Mines-Ponts PSI 2025**

Soit $\varphi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$
2. Montrer que
$$(P; Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle H_n, P \rangle = \langle H_{n-1}, P' \rangle.$$
   (b) Montrer que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale.
   (c) Calculer $\|H_n\|^2$.
4. On considère la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

   Étudier la nature de cette série et sa valeur éventuelle.

2205 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, M^p est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^p)$.

2206 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{rang}(M) = 2n$ et $M^3 = 0$.

Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0 \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

2207 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $S = A^T A$.

1. Quelle est la particularité de S ? Quelle(s) conséquence(s) ?
2. Montrer que les valeurs propres de S sont positives.
3. Quel est le lien entre les noyaux de A et S ? En déduire un lien sur d'autres sous-espaces particuliers.
4. On suppose $A^2 = A$. Montrer que les valeurs propres de S non nulles sont supérieures à 1.

2208 **Mines-Ponts MP 2025**

Trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}),\ P(A) \in O_n(\mathbb{R}).$$

2209 **CCINP PC 2016**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f_1, \ldots, f_k$ des endomorphismes non nuls de E vérifiant :

$$\text{Pour tous } i \text{ et } j \text{ distincts dans } [\![1\,;k]\!],$$
$$f_i \circ f_j = 0 \text{ et } f_1 + \cdots + f_k = \mathrm{Id}_E.$$

1. Pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, calculer $f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k)$.
   En déduire que f_i est un projecteur.
2. (a) Justifier que le somme $\mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$ est directe.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_k)$.

   Dans toute la suite, $\mathcal{B}$ désigne une base de E adaptée à cette décomposition.
3. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des complexes deux à deux distincts et soit $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$.
   (a) Montrer que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de f^p en fonctions de p, des f_i et des α_i.
4. (a) Montrer que la famille $\{f_1; \ldots; f_k\}$ est libre.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, la famille $\{f_i; \mathrm{Id}_E; f; \ldots; f^{k-1}\}$ est liée.
   (c) Montrer que la famille $\{\mathrm{Id}_E; f; \ldots; f^{k-1}\}$ est libre.

2210 **Centrale-Supélec MP 2015**

1. Soit f et g deux formes linéaires non nulles d'un espace vectoriel E. Montrer que f et g sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.

   Soit $f_1, \dots, f_n, f$ des formes linaires d'un espace vectoriel réel E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f_1(x) \geqslant 0, \dots, f_n(x) \geqslant 0$ implique $f(x) \geqslant 0$. On veut montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.
2. Montrer cette propriété pour $n = 1$.
3. Établir le cas général. (On pourra restreindre $f_1, \dots, f_n$ à $\mathrm{Ker}(f_n)$).

2211 **Mines-Ponts MP 2017**

On considère un espace euclidien E, ainsi qu'une base $(e_1; \dots; e_n)$ de E orthonormale.

1. Soit f un endomorphisme de E. Vérifier que :
$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(e_k), e_k \rangle.$$
2. Soit f et g deux endomorphismes symétriques de E ayant leurs valeurs propres positives. Montrer que :
$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(f \circ g) \leqslant \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g).$$
3. On suppose de plus que f est inversible.
   Dans quel cas a-t-on $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$? Et $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g)$?

2212 **X MP 2017**

Soit ρ une matrice symétrique positive. On dit que ρ est *un état* si $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. On note Π_V la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\{V\})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(\Pi_V A) = \langle V, AV \rangle$.
2. Soit ρ un état. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $\rho = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Pi_{V_i}$.
3. Soit ρ un état. On dit que ρ est *un état pur* si, et seulement si, tous les λ_i sont nuls sauf un. Montrer qu'un état ρ est pur si, et seulement s'il existe P un projecteur orthogonal de rang 1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Tr}(\rho P) = 1$.
4. Montrer qu'un état ρ est pur si et seulement si $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$.
5. Dans le cas $n = 2$, montrer que les états purs sont exactement les matrices
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 1 - \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
   avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

2213 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$A_n = \left(\omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n}.$$

Calculer $A_n \overline{A_n}$. En déduire $|\det(A_n)|$, puis l'inversibilité de A_n et A_n^{-1}.

2. Quels sont les $\theta \in \mathbb{C}$ tels que

$$A_n(\theta) = \left(\theta^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$$

soit inversible ?

2214 **X ESPCI 2017**

Soit p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.
2. Montrer que $p_1 + p_2$ est une symétrie si et seulement si $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.

2215 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ij} \in]0\,;1[\text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que $|\det(A)| \leqslant 1$.
2. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
3. Montrer que

$$b \in \mathrm{Sp}(A) \implies |b| \leqslant 1$$

puis que

$$|b| = 1 \implies b = 1.$$

2216 **CCINP PSI 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulles. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\Phi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$$

et

$$\Psi(M) = M + \mathrm{Tr}(AM)B.$$

1. Montrer que Φ est linéaire et donner la dimension de son noyau et de son image.
2. Montrer que si λ est valeur propre de Ψ différente de 1, alors toute matrice propre associée M est colinéaire à B.
3. Trouver les autres valeurs propres de Ψ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Ψ soit diagonalisable.

2217 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On suppose que pour tout X dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T BX > 0$. Montrer que $A + \mathrm{i}B$ est inversible.

2218 **Mines-Ponts MP 2018**

On considère un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Soit f et g deux endomorphismes symétriques tels que :

$$\forall x \in E,\ |\langle x, f(x)\rangle| \leqslant \langle x, g(x)\rangle.$$

Montrer que $|\det(f)| \leqslant \det(g)$.

2219 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f_A \in L(M_n(\mathbb{R}))$ définie par $f_A(M) = AM$.
Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

2220 **CCINP PC 2018**

Soit $E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum x_n^2 \text{ converge}\}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

1. Calculer $(|a| - |b|)^2$ et montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.
2. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \end{array}$$
   Montrer que φ est bien définie sur $E \times E$ et que φ est un produit scalaire sur E. En déduire que
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$$
   est une norme sur E.
4. On suppose que E est muni de cette norme. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, alors la suite $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi dans E.
5. Soit $g : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; ((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E \times E$:
$$\|g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) - g((y_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \leqslant k\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|.$$

2221 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice H dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = H^3 + H$.

2222 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit
$$H = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax+by+cz+dt=0\}$$
et
$$H' = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid a'x+b'y+c'z+d't=0\}.$$

1. Montrer que $H \cap H'$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de l'intersection.

2223 **CCINP PC 2018**

Soit $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne $n+1$ et de la colonne $n+1$ qui valent tous 1. Montrer que M est diagonalisable, puis trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

2224 **Mines-Télécom PSI 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler les propriétés du déterminant, en particulier $\det(M^T)$ et $\det(\lambda M)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que M est antisymétrique.
   (a) Montrer que, si n est impair, M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que, si $n=2$ et $M \neq 0$, alors M est inversible.
   (c) Peut-on affirmer que M est inversible ou non inversible si $n=4$ et $M \neq 0$?

2225 **ENS MP 2018**

Soit A et B dans $S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \leqslant \mathrm{Tr}((B-A)^2).$$

2226 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de E. On pose $s_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} e_k$ et $s_0 = 0$. Soit $u \in L(E)$ telle que :
$$\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ u(e_k) = 2s_n - s_k - e_k.$$

1. Justifier que l'on définit une unique application linéaire et donner la matrice $A = (u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Déterminer le spectre complexe de A et montrer qu'il est contenu dans un cercle.

2227 **X MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Caractériser les formes bilinéaires B sur E vérifiant :
$$\forall (x;y) \in E^2, \quad B(x;y) = 0 \implies B(y;x) = 0.$$

2228 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et φ un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\forall (A; B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

1. Déterminer $\varphi(I_n)$.
2. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\varphi(E_{ii})$ est un projecteur de rang 1.
3. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit A_i un élément non nul de $\mathrm{Im}(\varphi(E_{ii}))$.
   Montrer que $\{A_1; \dots; A_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

2229 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et I un intervalle non vide et non réduit à un singleton. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall t \in I,\ \mathrm{e}^{tA} \in O_n(\mathbb{R}) \iff A \in A_n(\mathbb{R}).$$

2230 **CCINP MP 2021**

Soit $M \in M_p(\mathbb{C})$ et λ, μ deux nombres complexes distincts non nuls. On suppose trouvées deux matrices non nulles $A, B \in M_p(\mathbb{C})$ vérifiant $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse. (On pourra utiliser $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).)
2. (a) Exprimer A en fonction de I_p et M.
   (b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

2231 **CCINP MP 2021**

Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension n, u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier naturel impair.
   (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme de symétrique v tel que $v^p = u$. (On pensera à la matrice représentative de u.)
   (b) Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que u.
   (c) Montrer que v est l'unique endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$.
2. Soit p un entier naturel pair et non nul.
   (a) A-t-on les mêmes résultats ?
   (b) Que peut-on dire si u est positif ? (C'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.)
   (c) Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

2232 **CCINP MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. On suppose que $\det(f^2) \neq 0$ et que f^2 est diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
2. On suppose que $\det(f^2) = 0$ et que f^2 est diagonalisable. On suppose de plus que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

2233 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$, et $\alpha \geqslant 0$.

1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?
2. Montrer que $I_n + \alpha A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$ est symétrique.

2234 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0_n\}$.

1. L'ensemble A est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$, contenu dans A ?
3. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}$? On s'intéressera surtout au cas $n = 2$.

2235 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace préhilbertien et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive, non nécessairement définie positive, et telle que :

$$\exists C > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,\ |\phi(x;y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

On note $(*)$ la proposition :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ |\phi(x;x)| \geqslant \|\alpha\|^2.$$

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors :

$$(*) \iff \phi \text{ est définie positive.}$$

2. On suppose que E est de dimension infinie et qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale totale de E.
   (a) Construire ϕ bilinéaire symétrique définie positive telle que :

   $$\exists C > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,\ |\phi(x;y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$$

   mais qui ne vérifie pas $(*)$.
   (b) Conclure que la boule unité fermée n'est pas compacte.

2236 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des *endomorphismes antisymétriques*, c'est-à-dire :

$$u \in \mathcal{A}(E) \iff \forall (x;y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle.$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0 \iff u \in \mathcal{A}(E).$$
Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
On suppose maintenant que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.
4. (a) Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique.
Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\{x; u(x)\})$ est un sous-espace vectoriel stable par u.
(b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix},$$
avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ réels non nuls.

2237 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère u un endomorphisme de E. On note χ le polynôme caractéristique de u.

1. Soit V et W deux sous-espaces de E stables par u et tels que $E = V \oplus W$. En notant χ' (respectivement χ'') le polynôme caractéristique de $u|_V$ (respectivement $u|_W$), montrer que $\chi = \chi'\chi''$.
2. On note $\chi = \prod_i P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de χ. Montrer que pour tout i, $\dim(\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i})(u)) = \alpha_i \deg(P_i)$.
3. Si le polynôme minimal de u est χ, montrer que :
$$\forall k \leqslant \alpha_i,\ \dim(\mathrm{Ker}(P_i^k(u))) = k \deg(P_i).$$

2238 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $1, \dots, n$. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $DM = MD$.

2239 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A est inversible et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que A^N soit symétrique réelle. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que A^N soit symétrique réelle. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. Que se passe-t-il si $\dim(\mathrm{Ker}(A)) > 1$?

2240 **Mines-Télécom PSI 2018**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. La fonction f est-elle une symétrie vectorielle ?
2. La fonction f est-elle une isométrie vectorielle ?

2241 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit A une matrice complexe carrée de taille n à coefficients complexes. Montrer l'équivalence entre :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) il existe une matrice S complexe inversible telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

2242 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme symétrique de E tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ soient égaux.

2243 **Mines 2015**

On considère deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$, deux applications linéaires, $u \in L(E, F)$, $v \in L(F, E)$ telles que $v \circ u \in GL(E)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) = F$.

2244 **Mines 2012**

Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

2245 **CCINP 2016**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et pour tout $i \leqslant p$, U_i un endomorphisme symétrique de E tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rang}(U_i) = \dim(E)$ et tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle U_i(x), x\rangle = \|x\|^2$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} U_i = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que U_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(U_i)$.

2246 **CCP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
2. Donner un élément de $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $g \in L(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.
   Que peut-on en déduire ?

2247 **CCP 2017**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. On suppose que $a > 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a < 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Il sera essentiel au cours de la discussion de préciser le corps de référence, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2248 **Mines-Ponts MP 2022**

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ qui à la matrice de terme $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ associe la matrice de terme $(a_{n+1-j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Vérifier que u est linéaire.
2. Déterminer son spectre et les dimensions des sous-espaces propres.
3. L'application u est-elle diagonalisable ?

2249 **CCINP MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. On suppose que f^2 est diagonalisable et que f est inversible.
   (a) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2. Montrer que le polynôme
   $$\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \lambda_p)$$
   est un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

2250 **Centrale-Supélec MP 2018**

Pour tout j entier compris entre 0 et $2n$, on note :

$$f_j : t \longmapsto (\sinh(t))^j (\cosh(t))^{2n-j}.$$

On pose :

$$\mathcal{F} = \{f_0; \ldots; f_{2n}\} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de F.
2. Soit d l'application de F dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à f associe f'.
   (a) Montrer que d définit un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer ses espaces propres.

2251 **Mines 2016**

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un nombre réel α racine à la fois de χ_A et de son dérivé χ'_A. Montrer que pour tout $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, la famille $\{v; Av; A^2v; \ldots; A^{n-1}v\}$ est liée.

2252 **CCINP MP 2023**

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

2253 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que leur spectre soient disjoints.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A évalué en B est inversible.
2. Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB$ si et seulement si $X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

2254 **Mines-Ponts MP 202**

Soit E l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $[0\,;1]$ que l'on munit du produit scalaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f;g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Soit v l'application de E dans lui-même qui à toute fonction $f \in E$ associe sa primitive nulle en 0.

1. Montrer que v est un endomorphisme.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme w tel que pour tout couple $(f;g)$ d'éléments de E, $\langle v(f), g\rangle = \langle f, w(g)\rangle$.
3. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de $v \circ w$?

2255 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
Soit T défini pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres.

2256 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $(a_1; a_2; \ldots; a_n) \in \mathbb{C}^n$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique et le déterminant de la matrice M.

2257 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Soit x_0 un vecteur de E tel que $\mathcal{B} = \{x_0; f(x_0); f^2(x_0); \ldots; f^{n-1}(x_0)\}$ soit une famille libre de E.

1. Minorer le rang de f.
2. Déterminer $C(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

2258 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alos p est un endomorphisme symétrique.
2. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux.
   (a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.
   (b) Montrer que $(\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.
   (c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

2259 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit :

$$\forall f \in E,\, \forall x \in \mathbb{R}^*,\, \phi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \phi(f)(0) = f(0).$$

1. Démontrer que la fonction ϕ ainsi définie est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ et les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ et déterminer les sous-espaces propres induits. (On confondra ici fonctions polynomiales et polynômes.)

2260 **CCINP PC 2022**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$x + y + t = 0 \quad \text{et} \quad z = 0 \quad \text{où } (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4.$$

Déterminer une base orthonormée de F.

2261 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit A et B deux matrices carrées de dimension n telles que AB admette n valeurs propres deux à deux distinctes. La matrice BA est-elle diagonalisable ?

2262 **Centrale-Supélec MP 2025**

1. Donner une caractérisation des applications linéaires injectives et la démontrer.
2. Soit $x \in [0\,;1[$. On note :

$$K_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de $[0\,;1[$ à valeurs réelles. Pour $x \in [0\,;1[$ et $f \in E$, on note :

$$\phi(x) = \int_0^1 K_n(xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que 0 est une valeur propre de ϕ.

2263 **X MP 2017**

Soit S l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{N}^2,\, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty.$$

Soit $\ell : S \to S$ une application linéaire telle que :

$$\forall f \in S,\, \ell(f') = (\ell(f))'$$

et en notant $h : x \to x$:

$$\ell(hf) = h\ell(f).$$

Montrer que $\ell = \lambda \mathrm{Id}_S$ pour un λ réel.

2264 **ENS MP 2013**

Soit $\sigma \in S_n$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui à $x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n$ associe $a_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}; \dots; x_{\sigma(n)})$.

1. Quel est le spectre de a_σ ?
2. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les a_σ ?

2265 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A un polynôme de degré au plus n. On considère l'application :

$$\phi : P \longmapsto (AP)^{(n)}$$

pour tout polynôme P de degré inférieur à n.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit bijective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable.

2266 **X MP 2019**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$. Quelle est l'image par f d'un cercle de centre 0 et de rayon 1 ?

2267 **CCINP PC 2013**

Soit $(M_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de $M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout j, $M_j^2 = -I_n$ et pour $j \neq k$, $M_j M_k = -M_k M_j$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M_j. En déduire que la matrice est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(M_j)$ est inclus dans $\{-\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.
   (b) Montrer que M_j est inversible et que n est pair.
   (c) Montrer que i et $-$i sont effectivement valeurs propres.
3. Montrer que les dimensions des sous-espaces propres de M_j sont égales et donner $\det(M_j)$.
4. Trouver un tel couple de matrices pour $n = 2$, puis pour $n = 4$.

2268 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$.

2269 **CCINP MP 2024**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est trigonalisable mais non diagonalisable.
2. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   (a) Justifier que M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont $-1, 0$ et 1.
   (c) Montrer que la dimension des sous-espaces propres de M est égale à 1.
3. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

2270 **Centrale-Supélec PSI 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ possédant $p \geqslant 2$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On suppose que :

$$\forall i \in [\![2\,;p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1| \quad (*)$$

1. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Tr}(A^k) \neq 0$, $t_k = \dfrac{\mathrm{Tr}(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}(A^k)}$.

   Montrer que la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.

2. Justifier que si l'hypothèse $(*)$ n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut-être faux.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer la limite de $\frac{A^k}{k}$ quand k tend vers $+\infty$.

2271 **Centrale-Supélec PC 2023**

1. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$d_P : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{array}$$

   Déterminer la matrice de d_P en fonction de P^T dans une base bien choisie.

2. Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$g_Q : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & QA \end{array}$$

   Déterminer la matrice de g_Q en fonction de Q dans une base bien choisie.

3. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & P^{-1}AP \end{array}$$

   Déterminer $\det(\varphi)$ et $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

2272 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier.

1. Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{Tr}(A^TA) > 0$. Pourquoi a-t-on $\mathrm{Tr}(A^TA) \neq 0$?
2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe A inversible telle que $S = A^TA$.
3. Montrer que :

$$\forall (S; S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathrm{Tr}(SS') > 0.$$

2273 **Centrale-Supélec PSI 2023**

On définit $G = \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\}$.
Soit A et B dans G, de même trace α.

1. (a) Donner une condition suffisante sur α pour que A soit diagonalisable. Cette condition est-elle nécessaire ?

   (b) Donner une condition suffisante sur α pour que A et B soient semblables. Cette condition est-elle nécessaire ?

   Soit
$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \end{array}$$
   On a donc, pour tout t réel, $\phi'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $t \mapsto M\phi(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

3. Soit $A \in G$ de trace nulle. Montrer l'existence de ϕ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G vérifiant :
$$\begin{cases} \forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t) \\ \phi(0) = I_2 \quad \text{et} \quad \phi'(0) = A \end{cases}$$

2274 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A)$.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ R_A(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}.$$

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k.
On note $(e_1;\ldots;e_n)$ une base orthonormée telle que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ Ae_i = \lambda_i(A)e_i.$$

1. Montrer que :
$$\forall X \in \mathrm{Vect}(\{e_1;\ldots;e_k\}) \setminus \{0\},\ R_A(X) \in [\lambda_1(A);\lambda_k(A)].$$

2. Montrer que :
$$\lambda_k(A) = \min_{V\in G_k}\left(\max_{X\in V\setminus\{0\}} R_A(X)\right).$$

3. Soit A et B deux matrices symétriques réelles.
   En déduire que :
$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

2275 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1. Soit H un hyperplan de E.
   Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $H = (\mathrm{Vect}(\{a\}))^\perp$.
2. Soit $(x_1; \ldots; x_{n+1}) \in E^{n+1}$ une famille de vecteurs unitaires tels que :
   $$\exists \alpha < 0, \text{ tel que } \forall i, j \in \{1; \ldots; n+1\},\ i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = \alpha.$$
   Déterminer α.
3. Montrer qu'une telle famille existe.

2276 **X MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

2277 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier l'existence d'un réel d tel que $A^3 + dA = 0$.
2. Déterminer d.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.
4. Montrer que $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$, où α et β sont deux réels à expliciter.

2278 **CCINP PC 2021**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour $a \in E$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_α défini par :
$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \alpha \langle a, x \rangle a \end{array}$$

1. Soit $(e_2; \ldots; e_n)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(\{a\}))^\perp$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (a; e_2; \ldots; e_n)$ est une base orthonormée de E et trouver la matrice associée à f_α dans $\mathcal{B}$.
2. (a) Calculer $(f_\beta \circ f_\alpha)(x)$ et déterminer γ tel que $f_\gamma = f_\beta \circ f_\alpha$ en fonction de α et β.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f_α soit bijectif.
   (c) Préciser alors f_α^{-1}.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $s_a(V) = V$, où s_a est l'endomorphisme défini par $s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a$.
   (a) Montrer que $s_a \in O(E)$.
   (b) Montrer que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$, puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.
4. Soit $g \in O(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

2279 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, f et g dans $L(E)$ tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f.$$

1. Calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que f est nilpotent.
   Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : h \mapsto h \circ g - g \circ h$.

2280 **CCINP PC 2018**

Soit E un espace euclidien et a, b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux.

1. Soit $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.
2. On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ avec $a \in \mathrm{Vect}(\{e_1\})$ et $b \in \mathrm{Vect}(\{e_2\})$. Préciser la matrice M de φ dans cette base.
3. Préciser les éléments propres de φ et déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
4. Généraliser l'étude à un espace vectoriel de dimension n.

2281 **CCINP PSI 2018**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Soit U et V deux matrices semblables et R un polynôme. Montrer que $R(U)$ est semblable à $R(V)$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P(A')$ et B.
3. Supposons que $B = 0$ et que A est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
4. Supposons que M est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable et que $B = 0$.

2282 **ENS Lyon PC 2018**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\forall (i; j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, $a_{ij} \in \{0; 1\}$;
- $\forall i \in [\![1\,; n]\!]$, $a_{ii} = 0$;
- il existe un entier k strictement positif tel que chaque colonne de A contienne exactement k termes non nuls ;
- $\forall (i; j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, $i \neq j \implies \exists!\, l \in [\![1\,; n]\!]$, $a_{il} = a_{jl} = 1$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A^2.
2. Montrer que $n = k^2 - k + 1$.

2283 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps.
Soit $\mathcal{D} = \{M \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid \forall (i;j) \in [\![1\,;2n]\!]^2,\ i \not\equiv j \mod n \implies M_{ij} = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $M_{2n}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, pour $M \in \mathcal{D} \cap GL_{2n}(\mathbb{K})$, on a $M^{-1} \in \mathcal{D}$.

2284 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (z;z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \quad f(zz') = f(z)f(z').$$

1. (a) Calculer $f(1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et ω un racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, calculer $f(\omega)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
   (b) On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $\ln(\widetilde{f})$.
   (c) Calculer $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une application de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (A;B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \varphi(zI_n) = |z|^{n\alpha}.$$

   (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même image par φ.
   (c) Montrer par récurrence que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(A) = |\det(A)|^\alpha.$$

   Indication : on pourra commencer par s'intéresser aux matrices diagonalisables.
3. Soit ψ une fonction continue de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, et vérifiant :

$$\forall (A;B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \psi(AB) = \psi(A)\psi(B).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad |\psi(A)| = |\det(A)|^\beta.$$

   (b) Montrer que si l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par ψ est réelle, alors ψ vérifie l'une des deux propriétés suivantes :
   - $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = |\det(A)|^\beta$;
   - $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = \mathrm{sgn}(\det(A))|\det(A)|^\beta$.

2285 **TPE/EIVP MP 2015**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Calculer $\exp(A)$.

2286 **X ESPCI PC 2016**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Déterminer leur noyau et image en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$.

2287 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $a \in L(E)$ tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id}_E)) = 1$.

1. Traiter le cas où a est nilpotente.
2. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de a de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_q$. Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$ et tout $m \in \{1, \dots, n_j\}$, on a :
$$\dim(\mathrm{Ker}(a - \lambda_j \mathrm{Id})^m) = m.$$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par a. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(Q(a))$, où Q est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par a sur F.
4. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires du polynôme caractéristique de a et $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces stables par a. Déduire de la question précédente que l'application $Q \in \mathcal{D} \mapsto \mathrm{Ker}(Q(A)) \in \mathcal{F}$ est une bijection.
5. Conclure quant aux espaces propres de a.

2288 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique qui s'écrit :
$$A = \begin{pmatrix} B_p & C_p \\ C_p^T & D_p \end{pmatrix}$$
avec $B_p \in M_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est définie positive (i.e. $\forall x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T AX > 0$) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

   On suppose dans la suite que A est définie positive.
2. Montrer que $\det(B_p) > 0$.
3. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(B_p)\det(D_p)$, puis que $\det(A) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

2289 **CCINP PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et

$$f: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ B & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)B - \mathrm{Tr}(B)A \end{array}$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\{A\})$.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?

2290 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit E un espace euclidien de dimension n, v un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1; \ldots; e_n)$ de E choisie.
2. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1; \ldots; e_n)$ et $(f_1; \ldots; f_n)$ choisies. Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

2291 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.
2. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(\{M^n \mid n \geqslant 1\})$.
3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

2292 **Centrale-Supélec MPI**

On considère $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

1. Donner une caractérisation des matrices de rang inférieur ou égal à k avec les mineurs.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à k est un fermé.

   On considère pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$T_A : M \longmapsto AM - MA.$$

3. On suppose pour cette question que A est diagonalisable. Donner le spectre de T_A.
4. La matrice A n'est plus nécessairement diagonalisable. Donner le rang maximal de T_A.
5. Montrer que T_A possède une unique valeur propre si et seulement si A possède une unique valeur propre.

2293 **Mines-Télécom MP 2022**

Dans tout l'exercice, on considère A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ X^T AX = 0.$$
2. Qu'en déduire des valeurs propres réelles de A ? À quelle condition A est-elle diagonalisable ?
3. On pose $M = A + I_n$.
   (a) Montrer que M est inversible.
   (b) La matrice M st-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $K = M^{-1}M^T$ est orthogonale.
5. Soit B une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que $A + B$ est inversible.

2294 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ij} = ij^2.$$

1. Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

2295 **X MP 2016**

Soit E et F des espaces vectoriels réels de dimensions finies (a priori différentes). Soit $p \geqslant 2$ et f une application p-linéaire de E^p dans F. On dira que f est *antisymétrique* si

$$\forall \sigma \in S_p,\ \forall (x_1; x_2; \dots; x_p) \in E^p,\ f(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \dots; x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1; x_2; \dots; x_p).$$

1. Montrer qu'il existe un espace vectoriel $\Lambda^p(E)$ et une application p-linéaire alternée Λ de E^p dans $\Lambda^p(E)$ telle que, pour toute application f p-linéaire antisymétrique de E^p dans F :
$$\exists! \varphi : \Lambda^p \longrightarrow F,\ f = \varphi \circ \Lambda.$$
2. Montrer que $\Lambda^p(E)$ est défini à isomorphisme près.
3. Montrer que $(x_1; \dots; x_p) \in E^p$ est lié si, et seulement si, $\Lambda(x_1; \dots; x_p) = 0$.

2296 **X MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On suppose que $\mathrm{Vect}(\{x \mapsto f(x+k) \mid k \in \mathbb{Z}\})$ est de dimension finie. Que dire de f ?

2297 **Centrale-Supélec PSI 2026**

1. Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de $L(E, F)$?
2. Soit p formes linéaires $f_1, \ldots, f_p$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) La famille $\{f_1; \ldots; f_p\}$ est libre.
   ii) L'application
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x); \ldots; f_p(x)) \end{array}$$
   est surjective.
   iii) Il existe une famille $\{x_1; \ldots; x_p\}$ d'éléments de E telle que :
   $$\det((f_j(x_i))_{i,j}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$$
3. Montrer que :
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f) \iff f \in \mathrm{Vect}(\{f_1; \ldots; f_p\}).$$

2298 **X MP 2017**

Donner toutes les formes linéaires de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$ invariantes par conjugaison par le groupe orthogonal, i.e. toutes les formes linéaires ℓ telles que, pour toute matrice A et toute matrice orthogonale P, on ait $\ell(P^{-1}AP) = \ell(A)$.

2299 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et on note E^* son *dual*, i.e. l'espace des formes linéaires sur E. On se donne $A \subseteq L(E)$. On dit que A est *trigonalisable* s'il existe une base de trigonalisation commune à tous ses éléments. On suppose dans tout l'exercice que les éléments de A commutent deux à deux.

1. On définit, pour $u \in L(E)$, l'application suivante :
$$T_u : \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array}$$
   Montrer que $T_u \in L(E^*)$.
2. Donner un condition sur u et v de $L(E)$ pour que T_u et T_v commutent.
3. Montrer que les endomorphismes de A admettent un vecteur propre commun.
4. En déduire que A est trigonalisable.

2300 **CCINP MP 2021**

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $(M - I_3)^3$ et en déduire le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^2} M^n\right)_{n \geqslant 1}$ converge. On note A sa limite.
5. Soit $X_0 \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ par $X_n = M^n X_0$.

   On notera $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si $X_0 \neq 0$, alors $X_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que si $x_0 - y_0 + 3z_0 \neq 0$, alors la série de terme général

   $$\frac{n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

   diverge.

2301 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, avec $n > p$. Soit $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, E)$, tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur, puis déterminer son noyau, son image et son rang.

2302 **X MP 2017**

On considère l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[X]$ qui à une matrice M associe $\varphi(M)$ le polynôme minimal (en degré) tel que $\varphi(M)(M) = \mathrm{e}^M$.

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Quels sont les points de continuité de φ ?

2303 **CCINP MP 2017**

Soit A une matrice complexe d'ordre n telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que $A^n = 0$.
3. Prouver que $\det(A + I_n) = 1$.
4. Soit M une matrice complexe inversible d'ordre n qui commute avec A.

   (a) Que peut-on dire de AM^{-1} ?

   (b) Démontrer que $\det(A + I_n) = \det(M)$.

   (c) L'égalité reste-t-elle valable si M est seulement inversible ?

   (d) L'égalité reste-t-elle valable si seulement M commute avec A ?

2304 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^3 - A^2 - A - 2I_n = 0$.

1. Montrer que n est un multiple de 5.
2. *Cas particulier* : $n = 5$.

   Montrer que A est semblable à $\mathrm{diag}(2, m, m)$, où $m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. *Cas général* : réduire A.

2305 **X MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda < 0$ une valeur propre de $A\overline{A}$. Montrer que λ est de multiplicité paire. En déduire que $\det(I_n + A\overline{A}) \geqslant 0$.

2306 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_3[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P;Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. À l'aide de la méthode de Schmidt, trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$, notée $(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$.
3. Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\|P\| = 1$. Montrer que :

   $$\sup\{|P(x)| \mid x \in [-1\,;1]\} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

   Indication : calculer, pour $i \in [\![0\,;3]\!]$, $M_i = \sup\{|Q_i(x)| \mid x \in [-1\,;1]\}$.
4. Peut-il y avoir égalité ?

2307 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit A une matrice telle que $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit l'endomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

On définit le produit scalaire classique sur les matrices.

1. Montrer qu'il existe une famille $(X_1; \ldots; X_n)$ de vecteurs de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ propres pour A telle que :

   $$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ X_i^T X_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } X_i^T X_j = 1 \text{ si } i = j.$$

2. Soit (M_{ij}) telle que :

   $$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ M_{ij} = X_i X_j^T.$$

   Montrer que la famille des M_{ij} est une base orthonormale de vecteurs propres pour φ.
3. Quel est le rang de φ ?

2308 **CCINP PC 2022**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 4\}$.
2. Montrer que A est diagonalisable.

2309 **X MP 2013**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$. Montrer qu'il existe h et g des endomorphismes de E tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

2310 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit m, n deux entiers naturels non nuls.
Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A^* = \overline{A}^T$.
On dit que A vérifie la propriété (P) si, et seulement si,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (A^*)^k A^{m-k} = 0.$$

1. Montrer que, si A est nilpotente d'indice p tel que $2p \leqslant m + 1$, alors A vérifie la propriété (P).
2. Déterminer les matrices réelles vérifiant (P) telles que $AA^* = A^*A$.
3. Pour X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$, on pose $\langle X, Y \rangle = \overline{X}^T Y$. Soit X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$. En s'aidant de la fonction définie par $\phi(t) = \langle \mathrm{e}^{tA} X, \mathrm{e}^{tA} Y \rangle$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{tA^*} \mathrm{e}^{tA}$ est à coefficients polynomiaux.

2311 **Centrale-Supélec MP 2017**

On pose $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ et T de E dans E tel que :

$$\forall f \in E,\, \forall x \in [0\,;1],\, T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right).$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E et que pour tout f dans E, on a :
$$\int_0^1 T(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Pour tout entier naturel d, on pose $E_d = \mathbb{R}_d[X]$. On note T_d la bi-restriction de T à E_d. Montrer que T_d est diagonalisable, en donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
3. Montrer que pour tout élément f de E, la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante égale à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2312 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer $A^2 + 4A - 12I_3$.
   (b) En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, la diagonaliser.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2313 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = Ax(t) \text{ et } \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'on ait $\ell(x(t)) = 0$.

2314 **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique, à valeurs propres λ_k strictement positives. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi(a_{ii}) \leqslant \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^n a_{ii}$.
2. Soit A une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$|\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2}.$$
   On supposera par la suite que ce résultat est aussi valable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. On note D la boule fermée de $\mathbb{C}$, de rayon 1. Déterminer :
$$\sup_{(z_1;\ldots;z_n) \in D^n} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_j - z_i|.$$

2315 **Mines-Télécom PSI 2022**

Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose $A^{-1} = (b_{ij})$. Soit encore $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner les coefficients de $M = JA^{-1}$. Déterminer le rang de M.
2. Montrer que :
$$\det(A - J) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}\right) \det(A).$$

2316 **CCINP PC 2023**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls de E, a et b deux complexes (a non nul) tels que :

$$f \circ g - g \circ f = af + bg.$$

On note ϕ_g l'endomorphisme de $L(E)$ qui à u associe :

$$\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u.$$

Pour les quatre premières questions, on suppose que $b = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\phi_g(f^n) = anf^n$.
3. Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $f^k = 0$.
4. Soit u l'endomorphisme induit de g sur $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que u admet un vecteur propre et que f et g ont un vecteur propre commun.
5. On suppose que $b \neq 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

2317 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in L(E)$ nilpotente d'indice $r \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{F} = \{x_0; u(x_0); \dots; u^{r-1}(x_0)\}$ soit libre.
2. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^{r-1}(x_0)) = 1$ et $\varphi(u^k(x_0)) = 0$ pour tout $k \in [\![0\,; r-2]\!]$.

   On pose, pour tout $y \in E$, $v(y) = \varphi(y)x_0$ et $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} u^k \circ v \circ u^{r-1-k}$.
3. Calculer $p(x)$ pour $x \in V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, puis montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ est un supplémentaire de V stable par p.
4. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \text{\Large 0} & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2318 **Mines-Ponts PSI 2024**

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, le *commutant* de A est défini par :

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\dim(C(A)) \geqslant n$, et chercher les cas d'égalité.

2319 **X MP 2013**

Soit $t \in \mathbb{R}_-^*$ et $M = (\exp(t|j-i|))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2320 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ est un vecteur propre de } M\}$$
est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Même question avec une autre colonne $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ non nulle.

2321 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$ tel que son polynôme caractéristique vérifie :
$$\chi_u(X^2) = \chi_u(X)\cdot\chi_u(X-1).$$
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ stables par u.

2322 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Pour A, B dans $M_{n\times p}(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{rang}(A+B) \leqslant \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.
2. Soit $V_1, \ldots, V_k$ des matrices colonnes telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} V_i V_i^T = I_n$.
Montrer que $k \geqslant n$.

2323 **Mines-Ponts MP 2025**

Trouver les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :
$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

2324 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n > 1$ et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :
$$\operatorname{rang}(AB - BA + I_n) = 1.$$

1. On pose $X = AB - BA$. Montrer que :
$$\operatorname{Tr}(X^2) = 2\operatorname{Tr}(ABAB) - 2\operatorname{Tr}(A^2B^2).$$
2. En déduire que :
$$\operatorname{Tr}(ABAB) - \operatorname{Tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}.$$
On pourra déterminer les valeurs propres de X.

2325 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. Montrer que si A est inversible, alors $\mathrm{rang}(A)$ est pair.
3. Montrer que pour tout $A \in A_n(\mathbb{R})$, $P = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
4. On considère l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} A_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \end{array}$$
Montrer que f est une application bijective.
5. Dans cette question on considère $n = 2$.
Pour $A \in SO_2(\mathbb{R})$, trouver $B \in A_2(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = A$.

2326 **Mines-Ponts MP 2016**

On considère deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que :
$$\forall k \in [\![0\,;2n]\!],\ \det(A + kB) \in \{-1; 1\}.$$

1. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.
2. Montrer que A^{-1} est à coefficients entiers.

2327 **CCINP MP 2018**

Soit H la matrice dont tous les coefficients valent 1, A la matrice avec que des 1 sauf sur la diagonale où il n'y a que des b, où $b \in \mathbb{R}$.

1. Les matrices H et A sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de H.
3. Calculer $\det(A)$.

2328 **ENS MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prenons aussi une famille $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ de réels distincts. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall i \in [\![1\,;n+1]\!]$, $\det(A + t_i B) = 0$;
ii) il existe W et V, deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, tels que $A(V) \subset W$ et $B(V) \subset W$, avec $\dim(W) < \dim(V)$.

2329 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1; \ldots; x_n) \in [0\,;\pi]^n$.
On définit $M_n = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ par $m_{ij} = \cos\left((j-1)x_i\right)$ pour tout $(i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.
On pose :
$$p_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\cos(x_i) - \cos(x_j)\right).$$

1. Montrer que, pour tout $(i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\cos\left((j-1)x_i\right)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ dont on précisera le terme dominant.
2. Calculer $\det(M_n)$ en fonction de p_n.

2330 **Centrale-Supélec PC 2019**

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ ainsi qu'un vecteur colonne $B = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$, admette une unique solution.
2. On suppose que cette condition est vérifiée et on note $X = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ l'unique solution de cette équation. Montrer alors l'égalité
$$x_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)},$$
où A_0 est la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de A par B.
3. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. On considère un élément $(a_1; \dots; a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne des entiers $b_1, \dots, b_n$ strictement positifs et tous distincts. On suppose qu'il existe un polynôme P tel que :
$$(1-X)^n P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{b_k}.$$
Exprimer $P(1)$ en fonction des b_k seulement.

2331 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Soit $\mathbb{K}$ le corps réels ou des complexes, et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Donner la définition d'une valeur propre de A et du polynôme caractéristique de A. Quel est le lien entre ces deux notions ? La matrice A admet-elle toujours une valeur propre ?
2. Soit λ une valeur propre de A. Soit P un polynôme annulateur de A. Que peut-on dire de $P(\lambda)$? Justifier.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Que peut-on dire des valeurs propres réelles de A ? Et des valeurs propres complexes ?

2332 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in L(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_p\}$ avec les λ_k deux à deux distincts, et
$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que u soit diagonalisable. Prouver-le.
2. Existe-t-il dans $\mathbb{R}^7$ un endomorphisme u tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u et $\mathrm{Tr}(u) = 0$?
3. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u. Déterminer $\det(u)$.

2333 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^TX = -I_n$.

1. Montrer que X est symétrique.
2. Déterminer X.

2334 **CCINP MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de A^2 (de degré $p \in \mathbb{N}^*$) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines de P comptées avec leur multiplicité. On pose $Q(X) = P(X^2)$. Que peut-on dire de Q ? Exprimer Q sous forme d'un produit d'irréductibles.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

2335 **CCINP MP 2016**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $E = C([0\,;a], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ de classe } C^2,\ f(0) = f(a) = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit
$$D : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$$
Déterminer $\operatorname{Ker}(D)$ et $\operatorname{Im}(D)$.

2336 **X MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal si et seulement s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\{x; Ax; A^2x; \ldots; A^{n-1}x\}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

2337 **X MP 2015**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et p_k le nombre de partitions de $\{1; 2; \ldots; k\}$. Exprimer, en fonction des p_k, le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de polynôme caractéristique P fixé.

2338 **CCINP PSI 2019**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Montrer que $\operatorname{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.
2. On suppose $n \geqslant 3$. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$
Déterminer les valeurs propres et le noyau de A.

2339 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie impaire qui vérifie $u^3 + u = 0$. L'endomorphisme u est-il bijectif ?

2340 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, telle que 1 n'est pas valeur propre de A.

1. Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A^k\right)_{m\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$.

2341 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel quelconque et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$. Qu'en déduit-on pour p ?

2342 **Mines-Ponts MP 2018**

1. Soit $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et C commutent. Montrer que :
$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC).$$
2. Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer l'équivalence suivante :
$$\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(N) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(N) = \mathbb{R}^n.$$

2343 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$
Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2344 **X ESPCI PC 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = 0$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$, que $\det(A) \geqslant 0$, et que $\det(A) = 0$ si n est impair.

2345 **Mines-Ponts PSI 2014**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M(a;b) \in M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale définie comme suit :

- $m_{i,i} = a + b$
- $m_{i,i+1} = ab$
- $m_{i+1,i} = 1$

Calculer $\det(M(a;b))$.

2346 **CCINP MP 2016**

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Un endomorphisme u de E est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$. Soit u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Montrer que $\chi_u(X) = X^n$.
2. Soit v un automorphisme de E commutant avec u. On définit $f = u+v$. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(v)$.
3. Montrer que $w = v^{-1} \circ u$ est nilpotent.
4. En déduire que $\det(f) = \det(v)$.

2347 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale définie comme suit :

- tous les éléments au-dessus de la diagonale sont égaux à un réel a ;
- ceux au-dessous de la diagonale sont égaux à un réel b ;
- sur la diagonale on trouve les réels $r_1, \ldots, r_n$.

Calculer $\det(M)$.

2348 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M(a;b)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et les autres b. Calculer $\det(M(a;b))$.

2349 **X MP 2022**

Soit X un ensemble, soit $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X,\ \det\left((f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \det\left((g_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right).$$

Que peut-on dire sur f et g ?

2350 **CCINP MP 2025**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $Q \in E$.
On note u l'application définie par $u(P) = Q$.
2. Montrer que $u \in L(E)$, puis que u est bijective.
3. Pour tous $i, j \in \{0; \ldots; n\}$, $i \neq j$, calculer $\langle X^i, u(X^j)\rangle$. Que peut-on en déduire concernant u ?
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0; P_1; \ldots; P_n)$ de E dans laquelle on exprimera $u(P_k)$.
5. Exprimer la trace de u en utilisant les P_k.
6. En déduire la trace de u.

2351 **CCINP MP 2015**

Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canonique a vérifie :

$$a(e_1) = e_1 + e_{2n+1} \text{ et } \forall i \in [\![2\,; 2n+1]\!],\ a(e_i) = e_{i-1} + e_i.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est inversible.
3. Écrire A^{-1} sous la forme d'un polynôme en A.
4. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
   Calculer $\displaystyle\prod_{i=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

2352 **ENSAM PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec a et b complexes.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

2353 **Mines-Ponts MP 2013**

Pour $a_1, \ldots, a_p$ dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$, on définit :

$$G(a_1; \ldots; a_p) = \det\Big((\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \Big).$$

Montrer que cette quantité est positive, qu'elle est nulle si et seulement si la famille $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est liée, et enfin montrer que l'on a :

$$G(a_1; \ldots; a_p) \leqslant \|a_1\|^2 \cdots \|a_p\|^2.$$

2354 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'égalité polynomiale :

$$\det(AM + B - XI_n) = \det(AM - XI_n).$$

   (a) Montrer que B est nilpotente.
   (b) Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(AMB) = 0$ et en déduire que $BA = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que B est nilpotente et que $BA = 0$. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, les polynômes caractéristiques de $AM + B$ et de AM sont égaux.

2355 **Mines-Télécom MP 2016**

Énoncer et démontrer le théorème du rang.

2356 **X MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ non inversible.

1. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$;
   ii) $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$;
   iii) $A(\mathrm{Ker}(A^2)) = \mathrm{Ker}(A)$;
   iv) $\mathrm{rang}\left(\begin{pmatrix} A & \mathrm{Id} \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rang}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$.

2357 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.
2. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que v est un isomorphisme et déterminer v^{-1}.
3. En déduire que le rang de u est pair.

2358 **X ESPCI PC 2015**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n > 0$ tel que A^{2^n} soit égal à I_2.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe un entier naturel k tel que $A^{2^k} = -I_2$.

2359 **CCINP PC 2014**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. On considère f_3 l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f_3(P) = f(P)$. Écrire la matrice de f_3 dans la base canonique.
2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
   (b) En déduire que $R(X) = P(X) - P(0)$ est constamment nul.
   (c) En déduire le noyau de f.
3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = f(P)$.
   (a) Calculer le noyau et l'image de f_n.
   (b) En déduire que f_n est surjective.
4. Trouver l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
5. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}[X]$.

2360 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que
$$A = O^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O,$$
où B est une matrice antisymétrique réelle inversible.
2. En déduire que le rang de A est pair.

2361 **X PC 2025**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

2362 **Centrale-Supélec PC 2019**

1. Montrer que toute matrice de $M_p(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. Pour toute matrice A de $M_p(\mathbb{C})$, prouver l'égalité $\chi_A(A) = 0$.

2363 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{C})$ et m le polynôme minimal de M, de degré d.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathbb{C}_{d-1}[M]$, où
$$\mathbb{C}_{d-1}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) \leqslant d-1\}.$$
2. En déduire $\exp(M)$.

2364 **X ESPCI PC 2013**

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n.

2365 **X MP 2017**

Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$. Calculer, sous réserve d'existence et sans utiliser de récurrence, le déterminant de la matrice $M = \left(\dfrac{1}{a_i - b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2366 **ENSEA/ENSIIE PSI 2021**

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

2367 **CCINP MP 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Que penser de l'information :
$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0\,?$$
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)^2 = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer A dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   (c) La matrice A est-elle forcément diagonalisable ?

2368 **CCINP MP 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$.

1. On suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u et que $E = F \oplus G$. On note $v = u|_F$ et $w = u|_G$. Si f est un endomorphisme, π_f désigne son polynôme minimal.
   (a) i. Justifier que χ_v et χ_w divisent χ_u.
   ii. Justifier que π_u et π_w divisent π_u.
   (b) Montrer que $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :
$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

2369 **CCINP PSI 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec $A^{\perp}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^{\perp})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

2370 **X MP 2019**

Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante :
$$X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2371 **ENS MP 2018**

Soit $n > 1$, $A \in SL_n(\mathbb{C})$ et $Z(A)$ son *centralisateur* défini par :
$$Z(A) = \{M \in SL_n(\mathbb{C}) \mid MA = AM\}.$$
Montrer que $Z(A)$ est infini.

2372 **X MP 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim(\mathrm{Ker}(u^k))$.
Montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est *concave*, i.e. la suite $(d_{k+1} - d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2373 **ENS MP 2019**

Exhiber une famille libre d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ commutative, et de cardinal $\left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.

2374 **CCINP PC 2013**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

2375 **X MP 2017**

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On appelle *support* de S et on note $s(S)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles.

1. Montrer qu'il existe S^+ et S^- dans $S_n(\mathbb{R})$ à supports orthogonaux telles que $S = S^+ - S^-$.
2. Montrer l'existence et l'unicité de $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = S^T S = S^2$.
   Montrer que $C = S^+ + S^-$.
   On notera alors $C = |S|$.
   Indication : pour l'unicité, on montrera que C et S^2 commutent.
3. Soit $E = \{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(S) = 1\}$.
   (a) Dans le cas $n = 2$, montrer que $S \in E$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 \leqslant 1$ et $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$.
   (b) Dans ce cas, que devient $\mathrm{dist}(S;T)$ pour $T \in E$?
   Donner une interprétation (en remarquant que E s'identifie au disque unité dans $\mathbb{R}^2$).
4. Dans le cas général, montrer que :

$$\mathrm{dist}(S;T) = \max_{\substack{R \text{ projecteur} \\ \text{orthogonal}}} \mathrm{Tr}(R(T-S)).$$

2376 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace euclidien. On dit que f est un *endomorphisme antisymétrique* de E si :

$$\forall (x;y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

1. Que dire de f^2 ? Montrer que $\langle f^2(x), x\rangle \leqslant 0$ et que $\langle f(x), x\rangle = 0$.
2. Que dire de A, matrice de f dans une base orthonormée ?
3. Calculer $\det(A^T)$ de deux manières différentes. En déduire que si f est inversible, alors $\dim(E)$ est paire.
4. Montrer que les valeurs propres de f^2 sont réelles et négatives.

2377 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de $\exp(A)$.
2. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

2378 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_p(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose :

$$\forall A \in E,\ \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

1. (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur E.
   (b) Donner la définition de e^A ainsi que le type de convergence.
   (c) Montrer qu'on a alors $\|\mathrm{e}^A\| \leqslant \mathrm{e}^{\|A\|}$.
2. Montrer que :

$$\forall A, B \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|A^n - B^n\| \leqslant nK^{n-1}\|A - B\|,$$

   où $K = \max(\|A\|; \|B\|)$.
3. Étudier l'existence de :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n.$$

   Si cette limite existe, calculer-la.

2379 **X MP 2013**

Soit V un espace vectoriel et $s \in L(V)$ tel que $\operatorname{rang}(\mathrm{Id} - s) = 1$.

1. Donner une expression simple de s.
2. Soit G un sous-groupe de $GL(V)$ contenant s et tel que les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les éléments de G sont $\{0\}$ et V. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de G est constitué des homothéties de V.

2380 **Mines-Ponts MP 2019**

On note $E = C^\infty((\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit $D = \{d \in E^* \mid \forall (f; g) \in E^2,\ d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$.

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que $a \in \mathbb{R}^n \mapsto d_0[\cdot](a)$ est injective sachant que $d_0[\cdot](a) : f \mapsto d_0 f(a)$.
3. Donner une base de D.
   Indication : on pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour l'application $t \mapsto f(tx)$.

2381 **CCINP MP 2022**

Soit

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -X + \mathrm{Tr}(X) I_n \end{array}$$

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de u.
2. En déduire que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

2382 **X-ENS Cachan PSI 2021**

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $x_1, \dots, x_k \in E$ tels que pour tous $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et déterminer cette limite.

2383 **CCINP MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) Donner les éléments propres de A et leur sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 + X = A$.

9 Dénombrement et probabilité

2384 **X-ENS**

1. Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2.
2. Montrer que si n est assez grand, a_n est la partie entière de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

2385 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

2386 **X-ENS**

Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G pris au hasard commutent est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

2387 **Mines-Ponts**

On suppose que la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{a \cdot 2^n}{n!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Trouver a.
2. Quelle est la probabilité que la famille ait au moins un garçon ?
3. La famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux enfants ?

2388 **Mines-Ponts**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $\Omega = \{1; \ldots; n\}$, ensemble qu'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que d divise n. On note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω.

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$.
2. Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en nombres premiers de n. Les évènements $(D_{p_i})_{i \in \{1;\ldots;r\}}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n.
   Montrer que $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

2389 **Mines-Ponts PC 2016**

Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

2390 **X**

On suppose que 80 hommes et 40 femmes défilent dans un ordre aléatoire. Montrer que la probabilité de ne jamais avoir deux hommes et deux femmes successivement est de l'ordre de 1 sur le nombre d'Avogadro.

2391 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit Ω un univers au plus dénombrable.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   Caractériser les évènements A indépendants de tout évènement B.
2. Existe-t-il une probabilité sur la tribu $P(\Omega)$ telle que tous les évènements de $P(\Omega)$ sont mutuellement indépendants ? Le cas échéant, caractériser toutes ces probabilités.

2392 **ENS MP**

Soit un tirage aléatoire indépendant avec probabilité uniforme de deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelle est la probabilité que le produit de ces deux nombres soit nul ?

2393 **Mines-Ponts MP**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(A_1; A_2) \in \mathcal{T}^2$. Calculer :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cup \overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{T}^n$. On pose $\Gamma_n = \{A_1; \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n; \overline{A_n}\}$. Calculer :
$$\sum_{(B_1;\ldots;B_n) \in \Gamma_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \ldots \cup B_n).$$

2394 **CCINP PSI 2021**

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. En développant de deux manières $(1+X)^{2n}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
2. En déduire la probabilité que A soit diagonalisable.

2395 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0\,;1[$.
On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.
Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2396 **CCINP PC 2022**

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que
$X_1 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.
On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2397 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = P(Y = -n)$
- $|Y| \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\mathrm{rang}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2398 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit X, Y, Z, T des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\mathrm{Tr}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit inversible.
3. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2399 **Centrale PC 2023**

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $X \sim Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2400 **Mines-Télécom PC 2024**

Soit X_1, X_2 et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim X_2$, $P(Y=1)=p$, $P(Y=-1)=1-p$ ($p \in]0\,;1[$).

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $X_1 + 1 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).
   Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2401 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'évènements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se réalise est majorée par $\exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\Big)$.

2402 **ENS PC 2019**

On lance cinq dés à six faces. Chaque dé affichant un 6 est écarté. On recommence cela jusqu'à ne plus avoir de dé et on note K la variable aléatoire égale au nombre d'étapes de cette expérience. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(K \leqslant n)$. En déduire la loi de K.

2403 **X MP/PC PSI 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de S_n.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big|\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)\Big| = 0.$$

2404 **CCP MP**

Soit $(X_i)_{i\in\{1;\ldots;n\}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $i \in \{1;\ldots;n\}$:

$$Y_i = 1 + (\mathrm{e}-1)X_i \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) \qquad M_n = \left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Déterminer les lois de Y_i et de $\ln(Y_i)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}\left(t^{\ln(X_i}\right) = G_{X_i}(t)$ et que $\mathbb{E}\left(t^{\ln(Y_i)}\right) = G_{\ln(Y_i)}(t)$.
   (b) Calculer $G_{S_n}(t)$.
   (c) Donner $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
2. Trouver une relation entre S_n et M_n.
3. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(M_n^2)$ à l'aide de G_{S_n}, puis en déduire $\mathrm{Var}(M_n)$.

2405 **Mines-Ponts MP**

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs strictement positives, avec $X(\Omega)$ fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1\,;n]\!]$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes suivant la loi de X. Calculer l'espérance de

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k}.$$

2406 **Mines-Ponts 2023**

Soit $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. (*fonction zêta*)

On définit la probabilité $\mathbb{P}_\alpha$ sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\mathbb{P}_\alpha(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha) n^\alpha}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, soit $A_m = \{qm \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}_\alpha(A_m)$.
2. Soit $(p_k)_{k \geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que les évènements A_{p_k} sont indépendants.
3. En déduire le *produit eulérien* :

$$\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}.$$

2407 **CCP MP**

On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes des lois de Bernoulli de paramètre p_i non nécessairement tous égaux. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.
2. Déterminer les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ pour que $\mathrm{Var}(S)$ soit maximale.
3. Déterminer la loi de S dans le cas où $\mathrm{Var}(S)$ est maximale, et calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

2408 **Mines-Télécom MP 2023**

On considère n tulipes qui ont chaque année une probabilité $p \in]0\,;1[$ de fleurir. Si une tulipe fleurit une année, alors elle fleurira toutes les années suivantes. Soit les variables aléatoires suivantes :

- X_i : année de la première floraison de la $i^{\text{ème}}$ tulipe
- X : année à partir de laquelle toutes les tulipes ont fleuri

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Donner la loi des X_i.
3. Si $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$.
4. En déduire que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.

2409 **X MP 2023**

Soit X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]^2$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, soit $u_n(r) = \mathbb{P}(X_n \neq Y_n, (X_n Y_n)$ de pente $r)$. Trouver un équivalent de $u_n(r)$ pour $n \to +\infty$.

2410 **CCINP MP 2025**

Un homme peint un mur en étant placé sur un échafaudage, des passants passent sous son échafaudage et ont chacun un probabilité $p \in]0\,;1[$ de se faire toucher par une goutte de peinture. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées en une journée et Y celui du nombre de personnes qui ne sont pas touchées. On suppose que n personnes passent dans la journée.

1. Donner les lois de X et Y, puis dire si X et$Y$ sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que N personnes passent dans la journée et que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y, puis l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\operatorname{cov}(X, N)$. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

2411 **CCP**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1\,;N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

2412 **CCINP**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « La boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche. » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

2413 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectuer le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

2414 **CCP MP**

Soit $\lambda \in]0\,;+\infty[$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par

$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Justifier.

2415 **CCP MP**

On admet, dans cet exercice, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et } \forall x \in]0\,;1[,\ \sum_{k=q}^{+\infty} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0\,;1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

2416 **CCP MP**

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X;Y)$ est donnée par :

$$\forall (i;j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

2417 **CCP MP**

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a puisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'évènement « L'animal est en A après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».
On note B_n l'évènement « L'animal est en B après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».
On note C_n l'évènement « L'animal est en C après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On pose $P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

2418 **Mines 2016**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.
Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est bien définie et calculer son espérance.

2419 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A;B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A;B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A;B;C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

2420 **CCP MP**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

2421 **CCP 2016**

Une machine à sous tire au hasard un entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$. (Si T est l'entier tiré, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}$). Si le nombre tiré n est pair, le joueur gagne n points, si le nombre tiré n est impair, le joueur perd n points.

1. Justifier qu'une telle loi de probabilité est cohérente. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Soit G la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer l'espérance de G.

2422 **CCP 2016**

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire qui a pour loi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer la constante a.
2. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ? Expliciter sa fonction génératrice.

2423 **Mines-Télécom PC 2018**

Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires. On choisit un urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2. Soit l'évènement : « Tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. » et $P_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer P_1.
2. Calculer P_{n+1} en fonction de P_n.
3. Calculer P_n en fonction de n.

2424 **X PC 2019**

On munit l'ensemble des permutations de $\{1;\ldots;n\}$ de la distribution uniforme. On note P_n la probabilité qu'une permutation n'ait aucun point fixe. Calculer P_n et sa limite pour $n \to +\infty$.

2425 **X ESPCI 2017**

La durée de vie d'une ampoule électrique comptée en années est représentée par une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Si l'ampoule fonctionne toujours au bout de n années, quelle est la durée moyenne pendant laquelle elle fonctionnera encore ?

2426 **TPE/EIVP 2016**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?
3. La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

2427 **CCP PSI**

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

2428 **Mines-Ponts PC**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

2429 **X ESPCI**

On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

2430 **ENSEA/ENSIIE PSI**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que :

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{N+1}}{N!}, \quad \text{avec } N = \lfloor \lambda \rfloor.$$

2431 **Mines-Télécom**

On pose une série de questions indépendantes, et on note p_k la probabilité de répondre correctement à la question k. On pose $r_k = p_1 \cdots p_k$.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions justes avant le premier échec. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge. Prouver qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n$.

2432 **Centrale PC**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose, de plus, que $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k^2) = \sigma \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On note T_1 la fonction indicatrice de l'ensemble $(|S_1| > \alpha)$, et pour tout $m \geqslant 2$, T_m la fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{m-1}(|S_k| \leqslant \alpha) \bigcap(|S_m| > \alpha)$.
   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} T_i$ est l'indicatrice de l'évènement :
   $$\exists k \in \{1; \dots ; n\}, |\, S_k| > \alpha.$$
   (b) Montrer que :
   $$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i S_n^2) \leqslant \sigma^2.$$
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \{1; \dots ; n\}$:
   $$\mathbb{E}(T_k S_k^2) \leqslant \mathbb{E}(T_k S_n^2).$$
3. Montrer que :
$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1; \dots ; n\}, |S_k| > \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$
Conclure que
$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| > \alpha\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

2433 **Mines-Télécom PC 2017**

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme ?

2434 **X-ENS**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tout $(A; B) \in \mathcal{A}^2$,

$$\left|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Quel est le cas d'égalité ?

2435 **CCINP MP**

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'évènement : « La puce est en O après n sauts. ». On note $\mathbb{P}(C_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(C_{2n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{2n})$.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$ en admettant que $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.
3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(C_{2n}) = \dbinom{2n}{n}^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2n}$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$.

2436 **Mines-Télécom PSI 2024**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$. On pose $Z = \dfrac{X}{Y}$.

1. Montrer que $Z \leqslant X$ et que Z admet une espérance et une variance finies.
2. Calculer l'espérance de Z.
3. Donner la loi de Z.

2437 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit une matrice aléatoire $M \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix},$$

où X et Y sont deux variables indépendantes, suivant une même loi géométrique. Déterminer la probabilité que la matrice M soit nilpotente.

2438 **Mines-Ponts PC 2022**

On choisit au hasard $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;n-1]\!]$, $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité que f soit surjective ?

2439 **Mines-Télécom PSI 2022**

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

2440 **Mines-Télécom PSI 2024**

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall i, k \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}(X = i, Y = k) = a\frac{i+k}{2^{i+k}}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

2441 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que :
$$\forall x \in]-1\,;1[,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$
2. Soit $p \in]0\,;1[$. On pose :
$$\forall n \geqslant k,\, \mathbb{P}(n) = \binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}.$$
Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

2442 **Mines-Ponts MP 2016**

On considère un meuble à huit tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p. Lorsque cet objet est dans le meuble, il a autant de chances de se trouver dans un tiroir que dans un autre. On a ouvert sept tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble.

2443 **ENSAE MPI 2025**

Soit A_2 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 dont les coefficients sont contenus dans $\{-1; 0; 1\}$. On munit A_2 de la probabilité uniforme.

1. Quel est le cardinal de A_2 ?
2. Quelle est la probabilité qu'une matrice de A_2 soit inversible ?
3. Quelle est la probabilité que la matrice soit exactement de rang 1 ?

2444 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 2$. On tire au hasard et avec remise A, B des parties de E, les deux tirages étant successifs et indépendants. Calculer la probabilité que $\mathrm{Card}(A \cap B) = 1$.

2445 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(|X|) = 0$.
Montrer que X est *presque-sûrement nulle*, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|X| > 0) = 0$.

2446 **CCINP MP 2023**

On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec un probabilité de $\frac{1}{2^n}$. On note A_k l'évènement : « Le nombre n est un multiple de k. ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

2447 **Mines-Télécom MP 2024**

On dispose de N coffres. Il y a une probabilité p que le trésor se trouve dans ces coffres. Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor. Sachant que le trésor n'était pas dans les $N-1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

2448 **CCINP PSI 2025**

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. En admettant la formule de Vandermonde, déterminer l'espérance de X.

2449 **Mines 2022**

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules. On replace cette poignée dans l'urne et on mélange. On tire une deuxième poignée. Déterminer la probabilité que les deux poignées n'aient aucune boule en commun.

2450 **CCINP PC 2021**

Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant être ou non correcte) avec la probabilité p, ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1-p$. On note A_n l'évènement « La $n^{\text{ème}}$ personne reçoit correctement l'information initiale. », et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis exprimer p_n en fonction de n.

2451 **ENS PC 2023**

On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « pile », la probabilité d'obtenir « pile » à chaque lancer étant p. On note ℓ le rang du lancer auquel « pile » est obtenu. Puis, on lance ℓ fois un dé à 6 faces et pour gagner le jeu il faut obtenir 6 une seule fois. Déterminer p de sorte que la probabilité de gagner soit maximale.

2452 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note Y le reste de la division euclidienne de X par p. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

2453 **Mines PSI 2024**

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4k!}.$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

2454 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On pioche les boules 2 par 2 et sans remise. Quelle est la probabilité que l'on tire exactement une boule blanche et une boule noire à chaque tirage ?

2455 **Mines-Télécom PC 2022**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. On note $U = \min(X;Y)$ et $V = \max(X;Y)$.

1. Rappeler la loi de X et son espérance.
2. Trouver la loi de V et son espérance.
3. Que vaut $U + V$? En déduire l'espérance de U.

2456 **CCINP TSI 2022**

On considère un dé truqué à $2n$ faces, pour lequel la probabilité de tomber sur la face k est proportionnelle à k^3.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Calculer la probabilité que le dé tombe sur la face k.

2457 **Mines-Ponts MP 2022**

Montrer qu'une intersection dénombrable d'évènements presque certains est un évènement presque certain.

2458 **X MP 2021**

On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules. Déterminer la probabilité que l'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages.

2459 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{1; 2\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2)$. On pose $Z = XY$.

1. Donner l'espérance de Z.
2. Donner la loi de Z.

2460 **Mines-Télécom MP 2025**

On a un QCM de 40 questions. Chaque question comporte 4 choix et 1 seule bonne réponse existe. Un élève y répond au hasard. Chaque bonne réponse rapporte 3 points et chaque mauvaise en fait perdre 1. On note les variables aléatoires X_i qui valent 1 si la réponse à la $i^{\text{ème}}$ question est bonne, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de points.

1. Donner la loi de X_i.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.
4. En utilisant l'inégalité de Pafnouti (Tchebychev), majorer p, la probabilité d'avoir une note supérieure à 60.

2461 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $r > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

2462 **Mines-Ponts MP 2022**

On considère $2p + 1$ lumières disposées en cercle. À l'instant initial, seules deux lumières adjacentes sont allumées. À chaque instant, on éteint toutes les lumières et, pour chaque lumière qui était allumée à l'instant précédent, on allume une des deux lumières adjacentes avec une équiprobabilité. On note N la variable aléatoire indiquant le premier instant où une seule lumière est allumée. Déterminer la loi de N, puis son espérance pour $p = 2$.

2463 **Mines-Télécom PSI 2023**

Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\frac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n clients durant sa journée de travail. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N.
2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

2464 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que X et λX suivent la même loi. Que dire de X et λ ?

2465 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On considère X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X(\Omega)$ est fini. Montrer que :

$$f(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(f(X)).$$

2. On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et que X et $f(X)$ admettent des espérances finies. Montrer que l'inégalité ci-dessus reste vraie.

2466 **CCINP MP 2018**

Une puce se déplace sur un triangle équilatéral ABC. Elle se situe initialement en A.

Si elle est en A à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n+1$ de manière équiprobable.
Si elle est en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n+1$ de manière équiprobable.
Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement « La puce est en A (resp. B, C) à l'instant n. ».
On note u_n (resp. v_n, w_n) le nombre $\mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$).

1. (a) Déterminer $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ en fontion de u_n, v_n, w_n.

   (b) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X_n = M^n X_0$.

2. (a) Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n.

   (b) Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$? Expliquer.

2467 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X_1$, avec $X_1 \geqslant 0$.
Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

2468 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-b) a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

1. Donner les lois de X et de Y, ainsi que leur espérance.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi de $Z = X - Y$.

2469 **CCINP TSI 2022**

On pose 20 questions sous forme de QCM à un candidat. Pour chaque question, il y a k ($k > 2$) réponses possibles, une seule est correcte.

Si le candidat trouve la bonne réponse du premier coup, il marque 1 point.
Si le candidat trouve la bonne réponse au second essai, il marque 0,5 point.
Sinon il ne marque aucun point.

Déterminer la valeur de k pour que le candidat, qui répond au hasard, ait 5/20 en moyenne.

2470 **CCINP MP 2021**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \text{ où } p \in \,]0\,;1[.$$

On pose $Y = (-1)^X$.

1. Calculer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

2471 **TPE/EIVP PC 2021**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire sans remise une à une les boules. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée porte le numéro i et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Lorsque l'on vide entièrement l'urne, combien de fois peut-on espérer que le numéro d'une boule ait coïncidé avec son rang dans le tirage ?

2472 **Mines-Télécom MP 2025**

1. Calculer
$$\operatorname{Card}\left(\left\{(A;B) \in \mathcal{P}(\{1;\ldots;n\})^2 \mid A \subset B\right\}\right).$$
2. On choisit au hasard deux parties A et B de $\{1;\ldots;n\}$.
Quelle est la probabilité que l'une soit incluse dans l'autre ?

2473 **TPE/EIVP MP 2017**

On dispose d'une urne contenant n boules. À chaque tirage, on tire une boule, on la marque et on la remet dans l'urne. Les tirages sont indépendants. On note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules marquées au bout de n tirages.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Trouver un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.

2474 **Centrale-Supélec PC 2017**

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir pile, donc un probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir face. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs (et l'expérience s'arrête). Donner la loi de X et son espérance.

2475 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :
   $$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
   Donner le domaine de définition de la fonction génératrice G_X, son expression et étudier sa continuité.

2476 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit n un entier naturel non nul. On organise un tournoi de football entre $2n$ équipes : n de première division, n de deuxième division.

1. On note a_n la probabilité que chaque match fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer a_n, en donner un équivalent.
2. On note b_n la probabilité qu'aucun match ne fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer b_n, en donner un équivalent.

2477 **ENSEA/ENSIIE MP 2025**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \max(X; Y)$ et $V = \min(X; Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Interpréter.
2. Trouver les lois de U et V.
3. Calculer l'espérance de U. Interpréter.

2478 **ENSEA/ENSIIE MP 2016**

Alice et Bob sont des correspondants téléphoniques. Ils appellent au hasard des clients. Alice a une probabilité $p_A \in]0\,;1[$ de signer un contrat et une probabilité $q_A \in]0\,;1[$ d'effectuer une erreur de saisie dans le contrat. On définit de même p_B et q_B pour Bob. Alice étant plus avenante, on a $p_A > p_B$. Un contrat a été signé et comporte une erreur de saisie.

1. Quelle est la probabilité qu'Alice s'en soit chargée.
2. On suppose que ce contrat a été traité par Alice ou Bob avec la même probabilité. Comparer q_A et q_B.

2479 **CCINP MP 2016**

Marcel effectue N tirages dans une urne contenant b boules blanches en ivoire et n boules noires en chocolat. Lorsqu'il tire une boule en chocolat, il la mange.

1. (a) Quelle est la probabilité que Marcel mange au moins une boule en chocolat ?
   (b) Quelle est la probabilité que Marcel mange une et une seule boule en chocolat ?
2. Marcel mange une et une seule boule en chocolat. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la dernière boule tirée ?

2480 **X ESPCI**

On considère n droites vectorielles de $\mathbb{R}^d$. On suppose que les angles qu'elles forment deux par deux sont tous égaux. Montrer que :

$$n \leqslant \binom{d+1}{2}.$$

2481 **ENS MP 2016**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer :

$$A_n = \left\{ (x_i)_{i \in [\![1;r]\!]} \in (\mathbb{N}^*)^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} x_i = n,\, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer :

$$B_{n,k} = \left\{ (x_i)_{i \in [\![1;k]\!]} \in (\mathbb{N}^*)^k \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} x_i = n,\, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2482 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On suppose aussi que, pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, la loi de Y conditionnée à $X = i$ est la loi binomiale de paramètre $n - i$ et p. Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

2483 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\varepsilon}.$$

2484 **Mines-Télécom MPI 2025**

On lance n boules dans N boîtes de manière indépendante. La probabilité qu'une boule tombe dans une boîte suit une loi uniforme.

1. On pose Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans la boîte k, et Z_k la variable aléatoire valant 0 si la $k^{\text{ème}}$ boîte est vide, et 1 sinon. Déterminer les lois des variables Y_k et Z_k.
2. Les variables Z_k sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. On pose T_n la variable aléatoire comptant le nombre de boîtes contenant au moins une boule à l'issue de n lancés. Calculer l'espérance de T_n.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

2485 **CCINP PSI 2022**

Soit $p, q \in [0\,;1]$ tels que $p + q = 1$.
On suppose que X et Y sont des variables aléatoires réelles telles que $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$, $Y(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$ et :

$$\forall (j;k) \in [\![0\,;n]\!] \times [\![1\,;n]\!],\ \mathbb{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k q^{n-k} & \text{si } k=j \text{ et } j\neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k\neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Quelles sont les lois marginales de X et$Y$? Que vaut $\mathbb{E}(Y)$?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$.

2486 **CCINP TSI 2022**

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant une *loi de Rademacher*, c'est-à-dire :

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=-1) = 1-p.$$

Déterminer la loi de $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2487 **Mines-Télécom PC 2024**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit $Z = X + Y + 1$ qui suit une loi géométrique de paramètre p.

1. Rappeler l'espérance, la variance et la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
2. Donner l'espérance et la variance de X.

2488 **Mines-Ponts MP 2022**

On considère un mobile Z qui se déplace aléatoirement à droite ou à gauche, sur un axe orienté. À l'instant 0, le mobile est à l'origine. Lorsqu'il est à l'abscisse $n \in \mathbb{Z}$, le mobile fait un bond B_n dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(B_n = k) = ap^{|k|} \text{ avec } p \in]0\,;1[.$$

On suppose que les bonds sont indépendants.

1. Déterminer a.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse où se trouve le mobile après n bonds. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n \geqslant n) \leqslant \frac{p}{n(1-p)^2}.$$

2489 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit a, b, m trois nombres réels vérifiant $a \leqslant m \leqslant b$. On considère l'ensemble des variables aléatoires discrètes X qui vérifient $\mathbb{E}(X) = m$ et $a \leqslant X \leqslant b$.

1. Qualitativement, que caractérise la variance ?
2. Déterminer le maximum des $\mathbb{E}(X^2)$ pour X dans l'ensemble considéré.

2490 **Centrale-Supélec TSI 2025**

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0\,;1[$.

On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = XX^T$.

1. Soit R la variable aléatoire égale au rang de la matrice M. Déterminer la loi de R.
2. Soit T la variable aléatoire égale à la trace de la matrice M. Déterminer la loi de T.
3. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur.

2491 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in]0\,;1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, et telles que $X+1$ et $Y+1$ suivent la loi géométrique de paramètre p. Soit enfin Z la variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \binom{X(\omega) + Y(\omega)}{X(\omega)}.$$

À quelle(s) condition(s) Z admet-elle une espérance finie ? une variance finie ? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ quand elle est finie.

2492 **Centrale-Supélec PC 2022**

Soit $p \in]0\,;1[$. Un petit garçon se promène dans un jardin et ramasse un nombre aléatoire N de feuilles. Pour une feuille donnée, la probabilité qu'il la trouve jolie vaut p.

1. Déterminer la probabilité qu'il trouve toutes les feuilles jolies.
2. Le nombre de feuilles qu'il trouve jolies est une variable aléatoire notée X. Exprimer sa loi à partir de la loi de N.
3. Dans chacun des trois cas suivants, déterminer la loi de X.
   (a) La loi de N est une loi de Poisson.
   (b) La loi de N est une loi géométrique.
   (c) La loi de N est une loi binomiale.

2493 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit N une variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité qu'un œuf éclose est p.

1. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule. Déterminer la loi de D.
2. Les variables D et N sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de $N-D$ et D ?
3. Comment retrouve-t-on la loi de N à partir de celles de $N-D$ et de D ?

2494 **Centrale-Supélec PSI 2017**

Soit X une variable aléatoire. S'il existe, on note $\mu(n)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^n)$ son moment centré d'ordre n. On dit que X admet un *Kurtosis*, si X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et des moments centrés $\mu(2),\mu(3),\mu(4)$. Dans ce cas on note

$$K(X)=-3+\frac{\mu(4)}{\mu(2)^2}=-3+\frac{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^4)}{(\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2))^2}$$

son Kurtosis.

1. Montrer que si X admet un Kurtosis, alors $aX+b$ admet aussi un Kurtosis et que $K(aX+b)=K(X)$.
2. Calculer $K(X)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0\,;1[$.
3. Montrer que pour toute variable aléatoire X, on a $K(X)\geqslant -2$.
4. Existe-t-il $M>0$ tel que pour toute variable aléatoire X, on ait $K(X)\leqslant M$?

2495 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ.

1. Donner la fonction génératrice de X et de $3Y$.
2. Soit $Z=3Y+X$. Donner la fonction génératrice de Z.
3. Donner l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ et la variance $\mathrm{Var}(Z)$ de Z.
4. Donner le minimum de $\mathrm{Var}(Z+tX)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

2496 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. Soit encore $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. On pose :

$$S_n=\sum_{\ell=0}^{n}X_\ell \quad\text{et}\quad S'_n=\sum_{\ell=0}^{n}X'_\ell.$$

En supposant $\mathbb{E}(X_1)\neq\mathbb{E}(X'_1)$, étudier la convergence de $\mathbb{P}(S_n<S'_n)$.

2497 **Mines-Ponts MP 2017**

Une bactérie mortelle menace l'espèce humaine d'extinction. Heureusement, des scientifiques ont développé un remède miracle pour la combattre : un super rayon laser. En sachant qu'ils ont une probabilité $p \in]0\,;1[$ de toucher la bactérie à chaque tir, et que la bactérie a $r \in \mathbb{N}^*$ points de vie, donner la probabilité que la bactérie meure lors du $k^{\text{ème}}$ tir, puis déterminer l'espérance du nombre de tirs nécessaires pour que les scientifiques viennent à bout de la bactérie, et sauvent ainsi l'humanité.

2498 **TPE/EIVP MP 2019**

Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise et si on tire une boule rouge, on la remet avec 2 autres boules rouges. Soit l'évènement A_n =« Lors des n premiers tirages, on a eu des boules rouges. ». On convient que $\mathbb{P}(A_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_n)$.
3. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

2499 **CCINP TSI 2019**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = q^n p$, où $q = 1 - p$. On note aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, $Y + 1$ et S.
2. Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p, puis donner $\mathbb{E}(X), \mathrm{Var}(X), \mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
3. Déterminer la loi de S.
4. Soit $I = \min(X; Y)$. Montrer que $\mathbb{P}(I \geqslant k) = q^{2k}$ et en déduire la loi de I. Calculer $\mathbb{E}(I)$ et $\mathrm{Var}(I)$.

2500 **CCINP PSI 2018**

Soit $p \in]0\,;1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

1. Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
   (a) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}(X - 1)$.
   (b) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}((X - 1)(X - 2))$.
3. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

2501 **Mines-Ponts PC 2018**

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p. On note A_n : « Au $n^{\text{ème}}$ lancé on obtient pour la première fois deux piles consécutifs. ». On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n.
3. Pourquoi est-il quasi certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

2502 **ENS MP 2018**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que XY suit une loi de Poisson. Montrer que X ou Y ne prend presque sûrement que la valeur 0 et 1, c'est-à-dire que X ou Y appartient presque sûrement à $\{0; 1\}$.

2503 **Mines-Ponts PC 2018**

Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (respectivement 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0\,;1[$, (respectivement $p_2 \in]0\,;1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
2. Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
3. Pour quelles valeur de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

2504 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit n couples (homme/femme) de danseurs. Lorsque la musique change, les membres des couples doivent trouver un nouveau partenaire de sexe opposé. Déterminer la probabilité que tous les couples nouvellement formés soient différents des couples initiaux. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

2505 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit x, y et n trois entiers naturels vérifiant $0 \leqslant x, y \leqslant n$. On considère deux joueurs E et F et un chapeau dans lequel on dispose de n jetons, dont x jetons sont marqués d'un X et y jetons d'un Y. Le jeu se décompose en deux temps :

Le joueur E tire consécutivement deux jetons avec remise. S'il tire deux fois un jeton marqué d'un X, il a gagné.

Si le joueur E n'a pas gagné, alors c'est au joueur F de tirer consécutivement deux jetons avec remise. Si il tire deux fois un jeton marqué d'un Y, alors il a gagné.

Si aucun des joueurs n'a gagné, alors on recommence.

1. Déterminer la probabilité q qu'aucun des deux joueurs ne gagne au premier tour.
2. Déterminer la probabilité que le joueur E gagne, que le joueur F gagne puis qu'aucun des deux joueurs ne gagne.

   Un triplet $(a; b; c)$ d'entiers est dit *pythagoricien* s'il vérifie $a^2 + b^2 = c^2$.
3. Montrer que le jeu est équilibré, c'est-à-dire que les deux joueurs ont la même probabilité de gagner, si et seulement s'il existe un triplet pythagoricien $(a; b; c)$ tel que $x = ab$, $y = ac$ et $n = bc$.

2506 **Mines-Ponts MP 2017**

Des personnes $P_1, \ldots, P_n$ se transmettent un signe $+$ ou $-$ avec la probabilité p de le passer inchangé et la probabilité $q = 1 - p$ de le changer. La personne 1 reçoit le signe $+$. Sachant que la personne n a reçu un signe $+$, quelle est la probabilité que P_1 ait transmis son signe sans le changer ?

2507 **CCINP PC 2021**

1. Soit Y une variable aléatoire discrète telle que :

$$Y(\Omega) = \{0;1;2\},\ \mathbb{E}(Y) = 1 \text{ et } \mathbb{E}(Y^2) = \tfrac{5}{3}.$$

Calculer p_0, p_1, p_2, où $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{0;1;2\}$.

2. Soit X un variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}.$$

On suppose connaître $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2), \dots, \mathbb{E}(X^n)$.
Comment faire pour calculer $p_0, p_1, \dots, p_n$?

2508 **CCINP MP 2017**

On dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules simultanément. Les variables aléatoires X et Y représentent respectivement le maximum et le minimum des numéros tirés.

1. Montrer que :
$$\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}.$$

2. (a) Quel est le nombre de tirages différents ?
   (b) En déduire la loi de X :
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{n!}\frac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}.$$
   (c) Déterminer l'espérance de X.

3. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

2509 **CCINP MP 2017**

1. En exprimant $(X+1)^{2n}$ de deux manières, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Deux joueurs tirent chacun une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus de « pile ». Quelle loi suit le nombre de « pile » obtenu par un joueur ? Donner son espérance et sa variance.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un gagnant.
4. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de la probabilité calculée précédemment.

2510 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}.$$

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2511 **ENS MP 2024**

Soit G un groupe fini de cardinal N. On considère A une partie aléatoire de G. On note $AA = \{ab \mid (a;b) \in A^2\}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(1 \in AA) = 1$.
2. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(AA = G) = 1$.

2512 **Mines-Ponts MP 2021**

On étudie la diffusion d'une information. Il y a une probabilité p qu'une personne trouve cette information intéressante à tout instant. Si une personne trouve cette information intéressante à un instant n, elle la diffuse à N personnes, qui sont alors au courant à l'instant $n+1$. À l'instant $n = 0$, une seule personne a l'information. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant reçu l'information à l'instant n et qui l'ont trouvé intéressante. On pose $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
2. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1}, p et N.
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2513 **Mines-Ponts MP 2021**

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $m \in [\![1\,;n]\!]$ et X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leqslant m \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Établir la loi de Z.
2. Établir les espérances de X, Y et Z.
3. Trouver les valeurs de m maximisant $\mathbb{E}(Z)$.

2514 **Mines-Ponts MP 2018**

On tire n fois une pièce à pile ou face. La variable aléatoire X compte le nombre de « face » obtenus. À partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver n tel que la probabilité que

$$\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{100}$$

soit supérieure à $0,99$.

2515 **Mines-Ponts PC 2017**

On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel. On effectue une deuxième vague d'appels à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel. On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la $j^{\text{ème}}$ personne a répondu.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Donner la loi de Y_j.
3. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

2516 **Mines 2022**

Soit $f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R}_+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse une distribution de probabilité. L'hypothèse « f de classe C^1 » est-elle nécessaire ?

2517 **CCINP PSI 2022**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On note :

$$Y_n = X_{n+1} + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Énoncer la loi faible des grands nombres.
2. Les variables Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - 2p| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2518 **CCINP PSI 2021**

Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $(k;n) \in [\![1\,;6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = k, N = n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

2519 **Mines-Ponts MP 2017**

On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\left(\frac{\alpha^k+\beta^k}{k!}\right)$ avec $(a, \alpha; \beta) \in \mathbb{R}^3$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de α et β peut-on définir un $a \in \mathbb{R}$ pour lequel la probabilité est bien définie ? Quelle est alors cette valeur de a ?
2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson ?

2520 **ENS MP 2019**

Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n possède un cycle de taille strictement supérieure à $\frac{n}{2}$.

2521 **ENSAM PSI 2018**

On considère un jeu de ballon et trois joueurs, notés A, B et C. Le joueur A envoie le ballon à B avec une probabilité de 0.75, B envoie toujours le ballon à C, C envoie le ballon à A avec une probabilité de 0.25 et à B avec une probabilité de 0.75.

On note A_n l'évènement « Le joueur A possède le ballon à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer. » et on considère de même B_n et C_n. On note a_n la probabilité de l'évènement A_n et on note de même b_n et c_n.

Au début du jeu, c'est le joueur A qui a le ballon.

1. Donner a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1}.
2. Montrer que :

$$\exists M \in M_3(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

   Déterminer M.
3. Déterminer la limite de a_n, b_n, c_n, quand $n \to +\infty$.

2522 **TPE/EIVP MP 2016**

On a une urne avec 2 boules vertes et 6 boules blanches et on effectue des tirages avec remises. On note X_n le nombre de boules vertes obtenues après n tirages et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance, ainsi que l'espérance et la variance de F_n.
3. Pour $n = 10000$, notons : $A = \{F_n \in]0.22\,; 0.26[\}$.
   Minorer $\mathbb{P}(A)$.
4. Trouver n tel que $\mathbb{P}(A) \geqslant 0.99$.

2523 **CCINP MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[\![1\,;n+1]\!]$ dont la loi de couple est donnée par :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Soit $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \mathbb{P}(X=i, Y=j)$ pour tout $(i;j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$.
   (a) Justifier que B est diagonalisable.
   (b) En calculant B^2, déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espaces propres associés.

2524 **ENS MP 2017**

Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que X et $X+\varepsilon$ soient de même loi, où ε est une variable aléatoire indépendante de X qui vaut $+1$ ou -1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$?

2525 **Mines-Ponts PC 2015**

On considère une urne contenant une proportion p dans $]0\,;1[$ de boules noires et $q = 1-p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X la longueur de la première suite de même couleur, Y la longueur de la deuxième.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Idem pour Y.
4. Vérifier rapidement que $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.

2526 **CCINP PSI 2016**

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N=n) = \frac{1}{2^n}$. Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur. Donner G et calculer son espérance.

2527 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $\mathbb{P}$ une probabilité. Montrer que Y admet une espérance finie si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(Y \geqslant n)$ converge.

2528 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$.

   Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^{N+1}}$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi de probabilité :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus [\![0\,;N-1]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}.$$

   Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

2529 **TPE/EIVP MP 2018**

On dispose de n pièces numérotées. La $k^{\text{ème}}$ pièce a une probabilité $\frac{1}{2k+1}$ de donner « pile ».

1. On note u_i la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » après avoir lancé les i premières pièces. Exprimer u_{i+1} en fonction de i et u_i.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » en lançant toutes les pièces ?

2530 **CCINP PC 2023**

On pose :

$$\forall x \in]0\,;1],\ \varphi(x) = -x\ln(x).$$

1. Donner le tableau de variations de φ sur $]0\,;1]$.
   Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(X=n)$.
   On appelle *entropie* de X, lorsqu'elle existe, la quantité :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n).$$

2. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p. Montrer que X admet une entropie et la calculer.

   On revient au cas général d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que celle-ci est d'espérance finie.

3. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = 0$.

   (b) Montrer que $\sqrt{p_n}\ln^2(p_n) \leqslant 4$.

4. Déduire de la question 3 que :

$$0 \leqslant -p_n\ln(p_n) \leqslant np_n + \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{np_n}.$$

5. En déduire que X admet une entropie.

2531 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $r > 0$.

1. Montrer que la relation
$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \, \mathrm{d}x$$
définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X dans $\mathbb{N}^*$.
2. Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

2532 **CCINP PC 2022**

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = n+2) = 4\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$
Déterminer la loi de X.

2533 **Mines-Ponts PSI 2025**

Déterminer le nombre de parties A de $[\![1\,;n]\!]$ ayant p éléments et telles que :
$$\forall i \in [\![1\,;n-1]\!],\ i \in A \text{ ou } i+1 \in A.$$

2534 **X MP 2017**

Un polygone à $2n$ sommets est inscrit dans un cercle. On trace n cordes de telle sorte qu'elles ne se croisent pas (même en un point). On note p_n le nombre d'arrangements de ces cordes.

1. Montrer que $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p_i p_{n-1-i}$.
2. Calculer p_n.
3. Donner un développement asymptotique de p_n.

2535 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit une urne remplie de a boules blanches et de b boules d'une autre couleur. On tire successivement et sans remise toutes les boules de cette urne. On note X la variable aléatoire représentant le numéro du tirage où la dernière boule blanche a été tirée.

1. Soit $p < q$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Soit $n \in X(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$.

2536 **Mines-Télécom MP 2018**

On dispose de deux boîtes A et B. Initialement, A contient deux jetons marqués « 0 », et B deux jetons marqués « 1 ». On tire un jeton au hasard de A, que l'on échange avec un jeton tiré au hasard de B. On répète l'expérience indéfiniment. On note X_n la somme des valeurs des jetons situés dans A au bout de n tirages.

Pour tout n, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
2. Pour tout n, exprimer U_n en fonction de n.
3. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

2537 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$. Soit $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de $]0\,;1[$. On considère n variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes suivant chacune une loi binomiale : $X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p_i)$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale si, et seulement si, les p_i sont tous égaux.

2538 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = \mathbb{P}(X_{ij} = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère la matrice $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $m_{ij} = X_{ij}$ pour tout $(i;j)$.

1. Calculer l'espérance de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
3. Calculer la probabilité que $\mathrm{rang}(M) = 1$.

2539 **Centrale-Supélec PC 2022**

Soit $p \in]0\,;1[$. On considère des cellules susceptibles de se diviser en deux (avec une probabilité p) ou de mourir (avec une probabilité $1 - p$).

On suppose qu'il y a exactement une cellule à la génération 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la génération n. En particulier, la variable aléatoire X_0 vaut 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Déterminer l'univers image $X_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$, montrer l'égalité $g_{n+1}(t) = g_n(g_1(t))$.

2540 **CCINP MP MPI 2026**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

2541 **Mines-Télécom PC 2024**

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, μ et $Z = X + Y$.

1. Lequel de ces deux évènements est le plus probable :
   - X est pair ;
   - X est impair ?
2. Déterminer $\max\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)$.
3. Montrer de deux façons différentes que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En donner l'espérance et la variance.

2542 **Mines-Ponts MP 2024**

1. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Calculer de deux manières l'espérance de S_n^4.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
   Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement presque sûrement vers la loi constante $\frac{1}{2}$.

2543 **X MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note T_n le triangle de sommets $(0; 0)$, $(0; n)$ et $(n; 0)$.

1. On note R_n l'ensemble des rectangles inclus dans T_n, dont les sommets sont à coordonnées entières et dont les côtés sont horizontaux et verticaux. Calculer $|R_n|$.
2. Soit U_n l'ensemble des rectangles dont les sommets sont à coordonnées entières et qui sont inclus dans un rectangle de R_n. Les côtés des rectangles de U_n ne sont pas nécessairement horizontaux ou verticaux. Calculer $|U_n|$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

2544 **Mines-Ponts PC 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C des points d'affixes a, b, c dans $\mathbb{U}_n$.

1. Combien y a-t-il de triangles non aplatis de sommets A, B, C ?
2. Combien d'entre eux sont rectangles ?

2545 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, de cardinal n. On définit $B = A + A$ par :

$$B = \{a + a' \mid (a; a') \in A^2\}.$$

1. Montrer que $2n - 1 \leqslant \text{Card}(B) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ et que ces inégalités sont optimales.
2. Peut-on généraliser pour $B = kA = \underbrace{A + \cdots + A}_{k \text{ fois } A}$?

2546 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $p \in]0\,;1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On note Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \min(m; (X - 1)(\omega)).$$

Calculer l'espérance et la variance de Y.

2547 **CCINP MP 2015**

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3×3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que la classe du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes r_{ij} de la division euclidienne de a_{ij} par 2.
2. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\text{Card}(\mathcal{M})$.
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M} \mid \det(M) \text{ est impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\text{Card}(\Omega)$ et $\text{Card}(\Delta)$.
4. Détermination de $\text{Card}(\Delta)$.
   (a) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1. Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
   (b) On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
   (c) Calculer $\text{Card}(\Delta)$.
   (d) En déduire $\text{Card}(\Omega)$.
5. Déterminer la probabilité p.

2548 **CCINP MP 2019**

Soit E un ensemble à n éléments. On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E.

1. Démontrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
   Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence non nul.
3. Calculer $\mathrm{e}^x f(x)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n.
5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'évènement « Aucun des n élèves n'a sa propre copie. ».
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

2549 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(a;\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = a\dfrac{\alpha^n + \beta^n}{n!}$.

1. Déterminer une condition sur $(\alpha;\beta)$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que vaut alors a ?
2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson ?
3. Généraliser à $p_n = a\dfrac{\alpha_1^n + \cdots + \alpha_k^n}{n!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

2550 **ENS Lyon**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les variables X et Y sont indépendantes.

ii) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\mathbb{E}(P(X)Q(Y)) = \mathbb{E}(P(X))\mathbb{E}(P(Y))$.

2551 **Mines-Ponts MP**

Soit p_1, p_2 et p des réels de $]0\,;1[$, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1;1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soit réelles ?
3. Soit $\theta_0 \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soient dans l'ensemble $S = \{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ |\theta| \leqslant \theta_0\}$?

2552 **TPE/EIVP**

Soit X, Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de même loi uniforme sur $E = \{0, \ldots, n\}$. Soit encore $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X; Y)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

   En déduire $\mathbb{E}(T)$.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs entières dans $[\![0\,;k]\!]$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Déterminer une relation entre $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(U \geqslant j)$ et $\mathbb{E}(U)$.

   (b) Trouver de même une relation entre $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2 \mathbb{P}(U \geqslant j)$ et $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(U^2)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.

   Retrouver $\mathbb{E}(T)$ à l'aide de la question 2(a).

2553 **Centrale-Supélec PSI 2022**

Soit ξ une variable aléatoire discrète suivant la loi de Rademacher, ne prenant que les valeurs -1 et 1, avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(u\xi)) \leqslant \exp\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

- On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par le produit scalaire sur $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
- Soit $M = (\xi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.
- On considère une matrice colonne $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ telle que $\|X\| = 1$.
- Soit $\zeta = MX$ et $(\zeta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de ζ dans la base canonique de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \forall \lambda \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(|\zeta_i| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

3. En déduire l'existence d'une constante $C \geqslant 0$, indépendante de n, telle que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\zeta_i^2}{4}\right)\right) \leqslant C.$$

2554 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit X un variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

2555 **Mines-Ponts**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1\,;1],\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance, centrée avec $|X| \leqslant 1$. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose de plus, que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $|X_i| \leqslant a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

2556 **Mines-Télécom MP 2017**

Considérons un dé équilibré à six faces.

1. Dans cette première question, on effectue 10 lancers de dé indépendants. Soit T la variable aléatoire qui donne le premier lancer où l'on obtient 6. (On supposera que si l'on n'obtient aucun 6, alors $T = 0$.)
Déterminer la loi de T.

   Dans les questions suivantes, on ne limite plus le nombre de lancers de dés. Notons T_n la variable aléatoire renvoyant le numéro de lancer où l'on obtient le $n^{\text{ème}}$ 6.

2. (a) Déterminer la loi de T_1.
   (b) Calculer la fonction génératrice de T_1, son rayon de convergence et sa somme.
3. (a) Déterminer la loi de $T_2 - T_1$.
   (b) Calculer la fonction génératrice de $T_2 - T_1$, son rayon de convergence et sa somme.
   (c) En déduire la loi de T_2.

2557 **X-ENS Cachan PSI 2021**

Soit A, B deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0; 1; 2\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & A-B & 0 \\ 0 & A & A-1 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

2558 **CCINP MP 2023**

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, 5 boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

10 Nombres complexes

2559 **X ESPCI**

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} x+y+z & = 1 \\ xyz & = 1 \\ |x|=|y|=|z| & = 1 \end{cases}$$

2560 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2561 **ENS PC 2015**

Soit a et b deux nombres complexes distincts. Soit P et Q deux polynômes complexes non constants. On fait les hypothèses :

$$P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\}) \quad \text{et} \quad P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\}).$$

Montrer que P et Q sont égaux.

2562 **Mines-Télécom MP 2022**

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

2563 **ENSEA/ENSIIE 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{U}_n} |\alpha - 1|$.

On rappelle que $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{n}} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$.

2564 **Mines-Télécom 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ définie par $f(z) = z^2$.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle une involution ?

2565 **Centrale 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^n}$.

2566 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ et impair. On pose $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Montrer l'existence de $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - w^k}{1 + w^k}$ et calculer P_n.
2. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2567 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{U}_n^* = \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ et

$$P_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} (x - \alpha) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} \frac{1}{1 - \alpha}.$$

1. Simplifier P_n.
2. Simplifier S_n.

2568 **CCINP**

Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \overline{a}z \neq 0$,

$$1 - \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| \leqslant 1$.

2569 **CCINP MP 2024**

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (On ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre.)
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.
3. En déduire, pour $n \geqslant 2$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

2570 **ENSAM 2012**

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z + 1} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z + 1} \in i\mathbb{R}$.

2571 **X-ENS**

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

2572 **CCINP**

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

2573 **Mines 2015**

On considère le plan complexe $\mathbb{C}$. Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3 ait pour orthocentre le point O, d'affixe 0.

2574 **Centrale 2015**

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note Ω_P l'ensemble des nombres complexes tels que le polynôme $P(X) + c$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note Θ_P l'ensemble des nombres réels r tels que le polynôme $P(X) + r$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que Θ_P est un intervalle non vide et ouvert dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que Θ_P soit non borné.

2575 **Mines-Ponts PSI 2015**

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

2576 **CCP PC 2015**

Soit $w = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{7}}$.
Soit $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.
Calculer $S + T$ et ST, puis en déduire S et T.

2577 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\right)^n = \frac{1+a\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}.$$

2578 **CCINP PC 2018**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

1. Exprimer $|1 + z|$ en fonction de θ.
2. Montrer que $|1 + z| \geqslant 1$ ou $|1 + z^2| \geqslant 1$.

2579 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{C}^4$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 des quatre racines du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient sur les quatre sommets d'un carré du plan complexe.

2580 **Mines-Ponts PSI 2017**

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2, z^5 soient alignés.

2581 **ENS Ulm**

Soit $(a_1; \dots ; a_m) \in \mathbb{C}^m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $z_n = \sum_{k=1}^{m} a_k^n$.
Que dire des nombres complexes $a_1, \dots, a_m$ si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

2582 **ENSEA/ENSIIE PSI 2023**

Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\} \mapsto \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$.

1. Trouver tous les z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Trouver tous les z tels que $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

2583 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$.
2. Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

2584 **CCINP PC**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$, puis que $\frac{3+4\mathrm{i}}{5} \in \mathbb{U}$.
2. Soit a_k la partie réelle de $(3+4\mathrm{i})^k$ et b_k sa partie imaginaire.
   Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k, puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.
3. Montrer que, pour $k \geqslant 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3, puis montrer que le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4. Conclure.
4. Démontrer l'inégalité :
   $$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \leqslant |\beta - \alpha|.$$

2585 **Mines-Télécom MP 2018**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (4-\mathrm{i})z + 12 - 6\mathrm{i} = 0.$$
   Indication : l'équation possède une solution réelle.
2. Que peut-on dire du triangle ABC, où A, B, C sont les points du plan dont les affixes sont les racines trouvées à la question 1 ?

2586 **Centrale-Supélec PSI 2025**

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la définition de « f est bornée sur Ω ».
   (b) Rappeler la définition de « f admet un maximum sur Ω ».
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.
   (a) L'application φ est-elle bornée ?
   On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.
   (b) Montrer que φ est bornée sur D.
   (c) Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.

2587 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

où $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ l'application f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $f \circ f = \mathrm{Id}$?

2588 **Mines-Télécom MP 2016**

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z) = 3$.

2589 **CCINP TSI 2024**

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Vérifier que $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ est racine de P.
2. Trouver toutes les racines de P.

2590 **X MP 2019**

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x + jy + j^2 z = 0$, avec $j^3 = 1$ et $j \neq 1$.
Que peut-on dire du triangle xyz ?

2591 **ENS MPI 2025**

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$. Prouver qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \mathrm{e}^z = a + bi$.
2. Démontrer que $z \mapsto z\mathrm{e}^z$ est surjective sur $\mathbb{C}$.

2592 **Mines-Ponts MP**

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}}$.

2593 **CCINP PC 2014**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n = (X+1)^n + (X-1)^n$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n, puis factoriser ce polynôme sur $\mathbb{C}$.

2594 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$.
2. Calculer le produit des solutions non nulles.

2595 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont comprises dans l'enveloppe convexe contenant les racines de P.

2596 **X MP 2019**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\sup_{|z|\leqslant 1}|P(z)| = \sup_{|z|=1}|P(z)|.$$

2597 **CCINP PC 2019**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant un tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = P_n(f(z)).$$
On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant :
$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = Q(f(z))$$
est P_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. On pose $z_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(2k+1)\pi}{2n}}$.
Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n.
5. (a) Montrer que $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
(b) En déduire le coefficient constant de P_n.
6. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

2598 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer l'existence d'un polynôme réel P_n tel que :
$$(1+\mathrm{i}X)^{2n+1}-(1-\mathrm{i}X)^{2n+1}=2\mathrm{i}XP_n(X^2).$$
2. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
3. Déterminer les racines de P_n.
4. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(4+\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

2599 **X-ENS**

Soit $(z_1;\dots;z_n)\in(\mathbb{C}\backslash\{0\})^n$. Prouver qu'il existe une partie I contenue dans $\{1;\dots;n\}$ telle que :
$$\left|\sum_{k\in I}z_k\right|\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

2600 **X ESPCI**

Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}}\frac{1}{2-z}$.

2601 **ENSEA/ENSIIE PSI 2024**

Soit $n>1$ un entier. On considère le polynôme P tel que :
$$\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}z^k.$$

1. Déterminer les racines de P.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right|=n$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.

2602 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit a,b,c trois nombres complexes quelconques. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que :
$$\begin{cases}x+y+z & =a\\ x+jy+j^2z & =b\\ x+j^2y+jz & =c\end{cases}$$
admette une solution $(x;y;z)$ dans $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que $j=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$.

2603 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $4X^4 + 3X^2 + 1$.
3. Trouver quatre diviseurs (positifs) de 40301.

2604 **X MP 2014**

Soit z une racine $n^{\text{ème}}$ primitive de l'unité. Montrer pour $d \geqslant 1$:

$$z^{(k+n)^d} = z^{k^d}.$$

Calculer le module de la somme des z^{k^2} pour k variant de 0 à $n-1$.

2605 **CCINP PC 2021**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. Résoudre l'équation :
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

2606 **CCINP PC 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-1)^{2n+1} - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer les racines complexes du polynôme P.
2. En déduire une simplification du produit :

$$\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

11 Équations fonctionnelles

2607 **X-ENS 2023**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(f(n)) = n + 2023$ pour tout entier n.

2608 **Centrale 2020**

Trouver les fonctions réelles définies et continues sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant, pour tout $(x;y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$,

$$f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

2609 **Mines-Ponts PSI 2022**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X+1) = (X+4)P(X)$.

2610 **X PC 2015**

1. Montrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \cos$.

2611 **X MP**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \end{cases}$$

Que dire de f ?
On commencera par montrer que f est bornée au voisinage de 0 en considérant la fonction $\varphi : x \mapsto x + x^{-1}$.

2612 **Centrale**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors ω^2 l'est aussi.
2. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.
3. En déduire que 0 n'est pas une racine de P.
4. Déterminer P en le factorisant.

2613 **X**

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y).$$

2614 **X MP**

Trouver toutes les fonctions continues f telles pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+r) - f(x) \in \mathbb{Q}$.

2615 **CCP MP**

On note F l'ensemble des fonctions de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Soit $f \in F$. Montrer que f vérifie une équation différentielle de la forme
$$y'' + ky = 0. \quad (1)$$
2. Déterminer les solutions de (1).
3. Déterminer F.

2616 **Mines-Télécom PSI 2015**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2617 **X MP**

Trouver toutes les fonctions f et g appartenant à $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que, pour tous x et t appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $f(xt) = f(x)f(t)$.

2618 **X-ENS**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient, pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

2619 **TPE/EIVP PC 2016**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$.

2620 **Mines-Ponts MP 2023**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.

2621 **Mines-Ponts MP**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2622 **Centrale**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

2623 **Mines-Ponts PC 2023**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = f(x) + 1.$$

2624 **Centrale MP 2023**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = 2f(x) - x.$$

2625 **CCINP MP 2022**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 - X)P'' = 6P$.

2626 **Centrale PC 2024**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.
2. $P(X^2) = P(X + 1)P(X)$.

2627 **Mines-Ponts MP 2022**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

2628 **X-ENS**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 1) = P(X^2 + X + 1)$.

2629 **Mines-Ponts PSI 2019**

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \cos(P(x))$.

1. Trouver les solutions de degré 0.
2. Trouver les solutions de degré 1.
3. Trouver toutes les solutions.

2630 **X 2024**

Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x)).$$

2631 **X 2024**

Trouver les fonctions $f \in C^2([0\,; 1], \mathbb{R})$ telles que

$$f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right).$$

2632 **X PC 2019**

Trouver les fonctions f de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$|f| + |1 + f'| \leqslant 1.$$

2633 **X PC 2019**

Déterminer les fonctions continues $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

2634 **CCP 2015**

Trouver les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2635 **CCP 2015**

On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)). \qquad (E)$$

1. Soit f une fonction vérifiant la relation (E), et les conditions $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Montrer que f est 2-périodique et en déduire que f est bornée.
   (c) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$.
   (d) Qu'en déduire sur f ?
2. Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété (E).

2636 **Mines-Ponts 2015**

Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

2637 **ENS Ulm**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \geqslant 0,\ f(xy) \geqslant f(x)f(y) \text{ et } f(1) = 1.$$

2638 **Centrale PSI 2017**

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle $(E) : 2xy'(x) - 2y(-x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Montrer que le problème (E) se ramène à deux équations différentielles du premier ordre, et résoudre le problème (E).

2639 **X ESPCI**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

2640 **Centrale PC**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

2641 **Mines**

Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \exists a, b \in \mathbb{R}_+,\ f\left([x\,;y]\right) = [a\,;b] \ \text{ et } \ |x-y| = |a-b|\,?$$

2642 **Mines-Ponts MP 2015**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$f'(f(x))f'(x) = 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) > 0.$$

2643 **Centrale-Supélec PC 2014**

Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\cos(x) f(x).$$

2644 **X FUF 2024**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \forall y > 0,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{x+y}.$$

2645 **X MP 2020**

Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n > 0,\ f(n+1) > f(f(n)).$$

2646 **Mines 2022**

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t) f(2t)\,\mathrm{d}t.$$

2647 **ENS Ulm 2022**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1) + f(x-\pi) + f(x+\pi)}{4}.$$

2648 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $XP(X) = (X-3)P(X+1)$.

1. Montrer que si P vérifie la relation, alors $1, 2$ et 3 sont des racines de P.
2. Donner tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X+1)$.
3. Conclure.

2649 **Mines-Télécom MP 2023**

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x-\pi) + \sin(x).$$

2650 **Mines-Télécom MP 2023**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2651 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit $c > 2$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 1-périodique vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x).$$

   Montrer que $f = 0$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x-n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

2652 **Mines-Ponts PC 2023**

On admet que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, alors toute fonction définie sur I, à valeurs réelles, continue et injective est strictement monotone. Pour tout réel x, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x + 1\}.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x+1) = f(x) + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$.
4. On pose $d = f(0)$ et on note g la restriction de f à l'intervalle $[0\,;d]$.
   (a) Montrer l'encadrement $0 < d < 1$.
   (b) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;d]$ sur $[d\,;1]$ et que celle-ci est continue et strictement croissante.
5. Décrire les éléments de $\mathcal{E}$.

2653 **Mines-Télécom PSI 2019**

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \int_0^x (t+x) f(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

2654 **TPE/EIVP MP 2015**

Trouver les fonctions $f :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ \int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(x).$$

2655 **X MP 2018**

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

2656 **X MP 2017**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x;h) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+h) - f(x) = f'(x)h.$$

2657 **X ESPCI 2015**

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y).$$

2658 **X**

Montrer qu'il n'existe pas trois fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f, g et h telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ h(f(x) + g(y)) = xy.$$

2659 **ENS PC 2024**

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)^2 = f(t\sqrt{2}).$$

2660 **X PSI 2023**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y).$$

2661 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 + (1 + f'(x))^2 \leqslant 1.$$

Que dire de f ?

2662 **X-ENS**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0,\ f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2663 **Centrale-Supélec PC 2022**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in]-1\,;1[$. Soit encore $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x).$$
2. Exprimer la fonction F dans le cas où f est la fonction cosinus.

2664 **Mines-Ponts PC 2015**

Trouver les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t + 1.$$

2665 **X MP 2015**

Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée vérifiant :
$$f'(t) = f(t-1).$$

2666 **ENS MP 2014**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)\,;$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x.$

Que dire de f ?

2667 **ENS 2013**

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$?

2668 **Mines-Télécom PSI 2019**

On cherche à résoudre l'équation
$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t,$$
avec $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer par récurrence que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine fonction u.
2. Montrer que u est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E).

2669 **ENS MP 2015**

Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que :

- $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x+1) = \ln(x) + f(x)\,;$
- $f(1) = 0\,;$
- f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que, en cas d'existence, la fonction f est unique.
2. Expliciter f.

2670 **Mines-Ponts**

Soit l'équation fonctionnelle :

$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

1. Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xh(x)$. À quelle condition sur h, la fonction f est-elle solution de (E) ?

   On définit par récurrence une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $h_0 : x \mapsto 1$ et :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ h_{n+1} : x \longmapsto h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

   Soit $x \in [0\,;1]$ et $T_x : y \mapsto y - \dfrac{xy^2}{2}$.
3. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x([0\,;1]) \subset [0\,;1]$.
   Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.
4. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.
5. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

2671 **Mines-Ponts**

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x\cos(x).$$

12 Divers

2672 **X/Centrale**

On a $2n+1$ cailloux. Lorsqu'on isole n'importe lequel d'entre eux, on peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n cailloux dont la somme des masses est égale. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

2673 **X**

Calculer :

$$\inf_{\alpha\in]0;\pi]}\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\sin(n\alpha)|\right\}.$$

2674 **Mines**

1. Montrer que $a=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est une racine d'un polynôme de degré trois à coefficients entiers.
2. Justifier que a est irrationnel.

2675 **X-ENS**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

Montrer la *formule d'inversion de Pascal* : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k(-1)^{n-k}.$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de *dérangements* de $[\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire le nombre de permutations de $[\![1\,;n]\!]$ sans point fixe. Calculer d_n.

2676 **ENS ULSR MP 2023**

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P\in\mathbb{R}[X,Y]$ tel que :

$$\Big\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,y>0\Big\}=\Big\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\mid P(x;y)>0\Big\}.$$

2677 **X**

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\min\{x_{i_1};\ldots;x_{i_k}\}=\max\{x_1;\ldots;x_n\}$.

2678 **X-ENS MP**

On considère $P(X)=X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$.
Montrer que les racines de P ont une partie réelle strictement négative si et seulement si $a>0$, $b>0$, $c>0$ et $ab-c>0$.

2679 **X MP**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant n racines réelles distinctes supérieures à 1.
On pose $Q(x) = (1+X^2)P(X)P'(X) + X(P(X)^2 + P'(X)^2)$.
Montrer que Q admet au moins $2n-1$ racines réelles distinctes.

2680 **X PC 2015**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et p, q deux nombres réels strictement positifs.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0\,;1]$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.

2681 **X**

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

2682 **X-ENS**

Soit $I \subset \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $x \mapsto xf(x)$ est convexe ;

ii) $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

2683 **Mines-Ponts**

Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que $x^y = y^x$. Peut-on trouver des solutions non entières ?

2684 **X**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

2685 **X PC 2019**

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = x^n + ax + b$$

avec $n \geqslant 2$ entier et a, b réels.

1. Montrer que f n'a pas plus de 3 racines réelles différentes.
2. Donner un exemple avec 3 racines réelles différentes.
3. Montrer que si de plus n est pair, f n'a pas plus de 2 racines réelles différentes.

2686 **X**

Soit f la fonction définie pour tout $\lambda \in]0\,;1]$ par :

$$f(\lambda) = \sup_{x \in [0; \frac{1}{\lambda}]} \left(\mathrm{e}^{-x} - (1 - \lambda x)^{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de f en 0.

2687 **Mines-Ponts**

Soit $(a;b;n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $a+b \geqslant n$.
Montrer que $\dbinom{a+b}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

2688 **X-ENS MP**

Montrer que la fonction sinus n'est pas la restriction à $]a\,;b[$ d'une fraction rationnelle.

2689 **X**

Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *logarithmiquement convexe* si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_a : x \mapsto f(x)a^x$ est convexe.

2690 **Mines-Ponts PC 2022**

Montrer que la seule involution continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

2691 **X-ENS**

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *négligeable* (ou de *mesure nulle*) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon$$

où $\mu(I_n)$ désigne la longueur de l'intervalle I_n.

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note Z l'ensemble des zéros de f'. Montrer que $f(Z)$ est négligeable.

2692 **Mines-Ponts PSI 2019**

On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\inf_{(a;b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^k - ax - b)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que I_k existe, est atteint, et calculer sa valeur.

2693 **X-ENS PC 2023**

Soit $x_0 < \cdots < x_n$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. Montrer qu'il existe des nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ l'on ait

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k).$$

2694 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\, T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$
Calculer $T_{n+1}+T_{n-1}$. (Les polynômes T_n sont appelés *polynômes de Tchebychev.*)
2. Montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant. Déterminer ses racines et les extrema de la fonction $x \mapsto T_n(x)$.
3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré n, on a
$$\sup_{x\in[-1;1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$
avec égalité si et seulement si $P = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

2695 **Mines**

Montrer qu'il existe $(a_0; \ldots ; a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$P(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x+k) \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré inférieur à } n.$$

2696 **CCP**

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que :
$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies h = 0.$$
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f et tout g de E,
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2697 **Mines-Ponts**

Soit $(\alpha; \lambda) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda \in]-1\,;1[$.
Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)\}$.

1. Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer une fonction non nulle de E qui est développable en série entière.
3. Déterminer E.

2698 **Centrale**

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer à quelles conditions sur n et p, les polynômes $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

2699 **X PC 2019**

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = f(1) \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

On définit :

$$\begin{array}{rcl} H \ : \ E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Montrer que le minimum de H sur E est atteint et le calculer.

2700 **X PC 2019**

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à n côtés dont les milieux sont fixés.

2701 **Mines PSI 2017**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

2702 **Mines-Ponts 2012**

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

2703 **Mines-Ponts 2016**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

2704 **Mines-Ponts**

Quelles sont les fonctions $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ qui sont limite uniforme de polynômes convexes ?

2705 **Centrale PSI**

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

2706 **X ESPCI**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$$

et le déterminer.

2707 **X ESPCI**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
   (a) Calculer $\frac{P'(X)}{P(X)}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ privé des racines de P. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X)P''(X) \leqslant P'(X)^2$.
   (b) Montrer que, si $\deg(P) \geqslant 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $a_k a_{k+2} \leqslant a_{k+1}^2$ pour tout $k \in [\![0\,;n-2]\!]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

2708 **Mines-Ponts PSI**

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$ ayant n racines réelles distinctes deux à deux. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls, autrement dit, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $|a_k| + |a_{k+1}| \neq 0$.

2709 **X MP 2019**

Pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, on considère sa *fonction moyenne* :

$$\begin{array}{rccc} Mf & : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \end{array}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\lim_{m \to +\infty} (M^m f)(n) = f(1).$$

2710 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $a_1 < \cdots < a_n$ des entiers, et

$$P = 1 + \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^2.$$

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

2711 **Mines-Télécom MP 2024**

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2712 **Mines-Télécom MP 2022**

Exprimer $\sin(3x)$ comme polynôme de $\sin(x)$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

2713 **Mines-Ponts 2021**

On pose $g : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Déterminer pour quelles valeurs de α la fonction g est polynomiale.

2714 **CCINP PC 2014**

Soit
$$P : x - y + z = 3 \qquad \text{et} \qquad S : x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$
Déterminer l'intersection de S et P.

2715 **X MP 2015**

Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est un *nombre algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$.
Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

2716 **X MP 2019**

Existe-t-il des fractions rationnelles non constantes $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ telles que $X^2+Y^2 = 1$?

2717 **Mines-Ponts MPI 2024**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$
   (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   (b) Étudier la réciproque.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie.
   Soit $a \in]0\,;1[$ et $f : E \to E$ telle que :
$$\forall (u; v) \in E^2,\ \|f(u) - f(v)\| \leqslant a\|u - v\|.$$
   Démontrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :
$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x; y) = \frac{1}{5}(\cos(x) - \sin(y); \sin(x) - \cos(y)).$$
   Démontrer que f admet un unique point fixe.

2718 **ENSEA/ENSIIE MP 2021**

Montrer que l'équation
$$\arctan(x) + x = 1$$
admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

2719 **CCINP PC 2019**

Soit E un ensemble non vide et f une application de E dans lui-même.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f \circ f$ est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

2720 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 + 1$.

2721 **Mines-Ponts MP 2018**

1. Comment définir l'angle formé par deux plans dans $\mathbb{R}^3$?
2. Trouver l'angle formé par les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$P_1 : 2x + 3y - z = 0 \qquad \text{et} \qquad P_2 : x - 2y + 3z = 0.$$

2722 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Montrer que toute fonction de classe C^2 sur I est différence de deux fonctions convexes.

2723 **CCINP PSI 2012**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

2724 **Mines-Télécom PSI 2021**

Résoudre le système suivant où $(m; a; b) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$$

2725 **CCINP PSI 2014**

Soit la conique d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.

1. Donner la nature de cette conique. La tracer.
2. Donner l'équation des tangentes aux points d'intersection avec les axes.

2726 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit un entier n supérieur ou égal à 2 et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes. Comparer la moyenne arithmétique des racines de P et celle des racines de P'.

2727 **X MP 2023**

Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant x^2 + z \quad \text{et} \quad z < \frac{1}{4}.$$

Montrer que :

$$y \leqslant 2z \quad \text{ou} \quad x \geqslant 1 - z.$$

2728 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

On définit une suite de polynômes telle que $H_0 = 1$ et $H_{n+1}(X) = XH_n(X) - H_n'(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer H_1 et H_2.
2. Expliciter, en justifiant, le degré de H_n.
3. Montrer que pour tout entier n non nul, $H_n'(X) = nH_{n-1}(X)$.
4. En déduire que $H_n(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(a) X^k$.

   Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

2729 **TPE/EIVP MP 2017**

Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t.$$

2730 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit

$$f(x) = x^3 - \ln(x).$$

Déterminer les intervalles sur lesquels f admet une fonction réciproque, et donner un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction réciproque.

2731 **X 2022**

On considère le nombre rationnel :

$$r = \frac{1}{9899} = 0.000101020305081321 34\ldots$$

1. Que vous inspire r ?
2. Formuler une conjecture à l'aide d'une série, puis la démontrer.
3. Que peut-on dire du développement décimal de r ?
4. En déduire une conjecture faisant intervenir la suite de Fibonacci, puis la démontrer.

2732 **X 2022**

Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

2733 **ENS 2022**

Montrer que, dans tout triangle, on peut inscrire une ellipse tangente au milieu de chaque côté du triangle.

2734 **Mines 2022**

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes $a_1, \ldots, a_n$. Calculer, sous réserve d'existence :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}.$$

2735 **X 2022**

Existe-t-il un cercle contenant exactement trois points à coordonnées rationnelles ?

2736 **Mines 2023**

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{A'(k)} \frac{A}{X-k}.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in \{1; \ldots ; n\}$ tel que :

$$|P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}.$$

2737 **Mines 2022**

On pose $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.

On note $A = \{i \in \{0; \ldots ; n\} \mid a_i \neq 0\}$ et $\mu(P) = \mathrm{Card}(A)$. On suppose que $(x-1)^k$ divise P pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on veut montrer que $\mu(P) \geqslant k+1$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mu(P) \leqslant k$.

1. On pose $P_0 = 1$ et $P_{s+1} = X(X-1)\cdots(X-s)$ pour $s \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $s \in \{0; \ldots ; k-1\}$:

$$P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que $a_i = 0$ pour tout $i \in A$. Conclure.
3. Discuter de l'optimalité de la minoration obtenue.

2738 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme

$$P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1.$$

1. Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n.
2. Dans le cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne.

2739 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible.
Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admet que des racines simples.

2740 **X MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{n\sqrt{2}\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$.

2741 **X ESPCI 2024**

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non constants, n'ayant pas de racine en commun et tels que AB est un carré. Montrer que A et B sont des carrés.

2742 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $a_0 \neq 0$

ii) $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists! P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$

2743 **Centrale-Supélec TSI 2025**

Soit f une fonction 1-périodique, définie par :

$$\forall x \in \left[-\tfrac{1}{2}\,;\tfrac{1}{2}\right],\ f(x) = |x|.$$

1. Tracer le graphe de f sur deux périodes.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
4. Déterminer les sommes suivantes :
   (a) $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$
   (b) $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
   (c) $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

2744 **Centrale-Supélec TSI 2024**

Soit f une fonction 2π-périodique, impaire, telle que :

$$\forall x \in [0\,;\pi],\ f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer f sur deux périodes.
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. Calculer $R = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

2745 **Mines-Ponts MP 2015**

Étudier $x \mapsto \dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x-2|}$.

2746 **Mines-Ponts MP 2025**

On considère un sous-espace vectoriel U convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est *convexe* si :

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0\,;1],\ f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y).$$

1. On suppose que f est différentiable.
   Montrer que f est convexe si et seulement si
   $$\forall x, y \in U,\ f(y)-f(x) \geqslant Df(x)\cdot(y-x).$$
2. Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f telles que $f(a)=\alpha$ et $f(b)=\beta$. Montrer que $\min \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}$ pour $f \in \mathcal{F}$ est atteint par la seule fonction affine appartenant à $\mathcal{F}$.

2747 **Centrale-Supélec TSI 2024**

Soit une surface S d'équation $z^3 = xy$ et la droite D d'équation $x=2$ et $y=3(z+1)$. Déterminer les plans tangents à S qui contiennent D.

2748 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit f une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0)=0$ et $f'(x)=\mathrm{e}^{-xf(x)}$.

1. Étudier les variations de $x \mapsto (f(x)+f(-x))^2$.
2. Qu'en déduire sur f ?
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ supérieure ou égale à 1.

2749 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)=0$ et telle que :

$$\forall x \in \left[0\,;\tfrac{7}{10}\right],\ f(x) \neq f\!\left(x+\tfrac{3}{10}\right).$$

1. Montrer que f s'annule en 7 points distincts de $[0\,;1]$.
2. Dessiner l'allure de cette fonction.

2750 **ENS MP 2016**

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.

1. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit rationnelle en ces points. Montrer qu'alors F est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers.
2. On suppose désormais qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit entière en ces points. Montrer que F est un polynôme à coefficients rationnels.

2751 **CCINP PC 2023**

1. Soit $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.
   Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose :
$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$
   (a) Exprimer Q'.
   (b) À l'aide de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout couple $(P; Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(PQ)^{(k)}(0).$$
   (a) Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire.
   (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. Ce nombre est noté u_n.
4. Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-\frac{1}{n}}$.
   Pour cela, on donne le développement asymptotique :
$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + o(n).$$

2752 **CCINP MP 2018**

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 0$.
3. Pour quels entiers p l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = p$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

2753 **Mines-Télécom PC 2018**

On se place dans un repère orthonormé du plan. On considère n points du plan, $A_1, \dots, A_n$, donnés par leurs coordonnées dans ce repère orthonormé : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $A_i(a_i; b_i)$. Soit $M(x; y)$. On définit f telle que $f(M) = \sum_{i=1}^{n} MA_i{}^2$. Déterminer les éventuels extrema de f.

2754 **CCINP TSI 2021**

Étudier la courbe paramétrée par $\left(\dfrac{t^2}{1-t^2};\dfrac{t^3}{1-t^2}\right)$.

2755 **CCINP PSI 2016**

Soit la surface d'équation $xyz = 1$.

1. Cette surface est-elle régulière ?
2. Montrer que quelque soit le point de cette surface, les intersections du plan tangent à la surface en ce point avec les plans Oxy, Oxz et Oyz forment un tétraèdre dont le volume est toujours le même.

2756 **X MP 2017**

Soit α, β et γ les trois angles d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta)} \geqslant \frac{8}{3 + 2\cos(\gamma)}.$$

2757 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0\,;1]$ et $m_j = \cos((j-1)x)$.
Montrer que m_j est un polynôme en $\cos(x)$.

2758 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une subdivision de $[a\,;b]$. On note A l'ensemble des applications de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$ qui, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, sont affines sur $[s_k\,;s_{k+1}]$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel, de dimension finie, et déterminer sa dimension.
2. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement. Montrer que $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et que sa limite est dans A.

2759 **Mines-Ponts MP**

Pour tout réel t, on considère la droite d'équation $(1-t^2)y + 2tx = 2t - 4$. Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes ces droites.

2760 **Centrale PC 2013**

Étudier la courbe donnée par l'équation polaire $\rho(t) = \dfrac{\cos(t)}{1-\cos(t)}$.

2761 **Mines-Ponts MP 2015**

Montrer qu'il existe une fraction rationnelle F telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'on ait $F(\tanh(x)) = \tanh(5x)$. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2762 **CCINP TSI 2023**

On pose, pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire.
2. Montrer que f^{-1} est C^∞ et admet un développement limité à tout ordre en 0.
3. Déterminer le développement limité de f^{-1}, en 0, à l'ordre 4.

2763 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que P et Q ont les mêmes racines. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $P + \alpha$ et $Q + \alpha$ ont les mêmes racines. Montrer que $P = Q$.

2764 **CCINP MPI 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. On pose deux fonctions f et g telles que, pour tout $(x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \text{si } \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x_1; \ldots; x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

On pose également $\Gamma = \{(x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid g(x_1; \ldots; x_n) = 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ, en particulier sur $\Gamma \cap]0\,;+\infty[^n$.
2. Déterminer μ et $A \in \Gamma \cap]0\,;+\infty[^n$ tels que $f(A) = \mu$.
3. En déduire que :

$$\forall (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

2765 **ENS MP 2023**

1. Montrer l'existence d'une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta).$$

   Montrer que ces polynômes sont à coefficients entiers.
2. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Trouver les valeurs rationnelles possibles de $\cos(r\pi)$.

2766 **Centrale 2015**

On considère $n+1$ nombres réels tels $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
Montrer, après avoir justifié l'existence des intégrales considérées, qu'il existe $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x_k).$$

2767 **CCINP MPI 2024**

1. Soit $\gamma : [-1\,;1] \to \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall t \in [-1\,;1],\ \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}.$$

Calculer $\displaystyle \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-1}^{1} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit g une fonction de classe C^1 de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{C}^*$. On note :

$$\phi : t \longmapsto \frac{1}{\mathrm{i}} \int_a^t \frac{g'(s)}{g(s)}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \psi : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}.$$

   (a) Montrer que ϕ est de classe C^1.
   (b) Montrer que ψ est constante.
   (c) Montrer qu'il existe $\rho : [a\,;b] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [a\,;b],\ g(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}.$$

3. Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1 tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Montrer que $\displaystyle \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_a^b = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{Z}$.
Pouvait-on déduire la valeur de la question 1 ?

2768 **CCINP PC 2024**

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$.
2. On note M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.
   (b) En déduire le spectre de $M + I_3$.
3. Soit $D = \{(x_1; x_2; x_3) \in]0\,;1[\mid x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$.
   (a) Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que la fonction f définie sur D par :

$$(x_1; x_2; x_3) \longmapsto x_1^n + x_2^n + x_3^n + (1 - x_1 - x_2 - x_3)^n$$

   est de classe C^2 sur D et calculer ses dérivées partielles.
4. Montrer que le seul point critique de f est $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$.
5. Calculer la matrice hessienne de f en a.
6. En déduire que f admet un minimum local strict en a.

   On admettra dans la suite que f atteint un minimum global strict en a.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3\}$. Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n) \geqslant \dfrac{1}{4^{n-1}}$.

2769 **Centrale-Supélec TSI 2025**

Faire une étude complète de la courbe paramétrée par :

$$x(t) = 3\cos(t) + \cos(3t) \quad \text{et} \quad y(t) = 3\sin(t) + \sin(3t).$$

2770 **X ESPCI 2023**

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geqslant \frac{2n}{5}$.

2771 **Mines-Télécom MP 2023**

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2772 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit n un entier naturel non nul et x un réel tel que $x \notin [\![1\,;n]\!]$.
On définit :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{(k-x)^2}.$$

Calculer $\dfrac{u_n(x)}{v_n(x)}$.

2773 **X ESPCI 2019**

On pose $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $f : (x;y) \mapsto x + \mathrm{i}xy$.
Représenter $f(\mathbb{R}^2)$. La courbe présente-elle des points multiples ? Si oui, les déterminer.

2774 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle α. Montrer que $\alpha > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sin(\pi\alpha^n)$ converge.

2775 **ENS MP MPI 2024**

Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}_+^3$. Démontrer que :

$$(x+y+z)^3 + 9xyz \geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

2776 **X PC 2023**

Soit P défini par $P(X;Y) = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $P|_{\mathbb{N}^2}$ soit injective.

2777 **Mines-Ponts MPI 2023**

Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.
Ce résultat est-il vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

2778 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit

$$f : x \longmapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)).$$

Tracer le graphe de f.

2779 **X ESPCI 2017**

Pour tout $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$, prouver l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

2780 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, soit $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.
Pour quels couples $(n; p)$, le nombre $S_{n,p}$ est-il un entier ?

2781 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.
2. On pose $e_0 : t \mapsto 1$ et pour $k > 0$, $e_k : t \mapsto \sqrt{2}\cos(kt)$.
   Interpréter $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \langle f, e_k\rangle^2$ converge.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que :
   $$\|f - p \circ \cos\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0$ et déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \langle f, e_k\rangle^2$.

2782 **X MP 2019**

Soit deux ensembles A et B. On admet que si on dispose de deux injections respectivement de A dans B et de B dans A, alors A et B sont en bijection et ont même cardinal.

1. Montrer que $\{0; \dots; 9\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $C([0\,;1], \mathbb{R})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

2783 **Mines-Télécom MP 2019**

Déterminer tous les n-uplets $(x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.

2784 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $P = X^n + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
Soit $Q = X^n + \cdots + b_{n-1}X + b_n \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que si les b_i sont assez proches des a_i, alors Q est scindé à racines simples.

2785 **ENS MP 2019**

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 10 ayant 8 racines (au moins) dans $\mathbb{U}$, 2 (au moins) dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $P(0) = 1$ et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2786 **Centrale-Supélec PSI 2015**

On sait que pour tout $x \in]0\,;1[$, il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que x puisse s'écrire $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$ en base 10. On définit f sur $[0\,;1]$ qui associe 0 à 0, 1 à 1 et, pour tout $x \in]0\,;1[$ associe $0,a_2a_1a_3\ldots$

1. Donner la représentation graphique de f.
2. La fonction f est-elle continue sur $[0\,;1]$?
3. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0\,;1]$?
4. Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2787 **ENS MP 2015**

Soit f de classe C^∞. On dit que x est un « *super zéro* » de f si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = 0$. Quelles sont les implications valables entre les trois propositions suivantes ? Pour les implications fausses, fournir des contre-exemples.

- La fonction f s'annule une infinité de fois.
- La fonction f s'annule une infinité de fois sur un segment.
- La fonction f a un super zéro.

2788 **CCINP PC 2024**

1. Déterminer $\sup\left\{n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2. Comparer e^π et π^{e}.

2789 **X MP**

1. Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \qquad (\textit{formule de Legendre})$$

2. Par combien de zéros l'entier 100! s'achève-t-il ?

2790 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit N une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$. On dit que N est une *valeur absolue* si et seulement si :

- $\forall x \in \mathbb{Q},\ N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x;y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(xy) = N(x)N(y)$
- $\forall (x;y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Une valeur absolue N est dite *ultramétrique* si

$$\forall (x;y) \in \mathbb{Q}^2,\ N(x+y) \leqslant \max(N(x); N(y)).$$

La valeur absolue N est dite *triviale* si elle est constante sur $\mathbb{Q}^*$.

Si p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique définie sur les entiers. On pose par convention $\nu_p(0) = +\infty$.

1. Soit N une valeur absolue. Déterminer $N(1)$ et $N(-1)$.
2. Soit $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, où $(a;b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, et p un nombre premier.
   Montrer que $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ ne dépend que de q.
   On le note $\nu_p(q)$. On définit pour $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-\nu_p(q)}$.
   Montrer que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
3. Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale.
   Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $N = |\cdot|_p^\alpha$.

2791 **Mines-Ponts**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe.
2. On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ell x$ existe.

2792 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

2793 **Centrale-Supélec MP 2017**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que α est *valeur asymptotique* de f s'il existe une fonction $\gamma : [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = \alpha$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs asymptotiques de $f : z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|}$.
2. Même question pour $f : z \mapsto \mathrm{e}^z$.
3. Même question pour $f : z \mapsto \sin(z)$.

2794 **Mines-ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \in]1\,;+\infty[,\ x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

2795 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On dit qu'une matrice A vérifie la propriété (P) si et seulement si ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X-Y & Y-Z \\ X-Y & 0 & 0 \\ Y-Z & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer la probabilité que A vérifie la propriété (P).
2. Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie la propriété (P) si, et seulement si, elle est diagonale.

2796 **ENS MP 2015**

Soit H l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, dont la bijection réciproque est continue. Quelle est la nature de H ? Quels sont ses sous-groupes finis ?

2797 **X MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = 0 \implies \operatorname{Re}(x) < 0.$$

Montrer que tous les coefficients de P sont de même signe.

2798 **X MP 2018**

1. Soit $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et n un entier supérieur à 1. Montrer que

   $$\frac{\sin(4n\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)}$$

   est un polynôme en $\cos^2(\theta)$ de degré inférieur ou égal à $2n-1$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2^{4n-3}}}$.
3. Calculer de la même façon $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$.

2799 **X MP 2018**

Décrire qualitativement l'ensemble $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$.

2800 **CCINP PC 2024**

Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Montrer que P et Q possèdent les mêmes racines.
2. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

2801 **ENS**

On se propose de montrer que $\alpha = \dfrac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

1. Calculer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\pi}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $(1+2\mathrm{i}\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1+2\mathrm{i}\sqrt{2})^n = a_n + \mathrm{i}b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des entiers vérifiant $a_n - b_n \not\equiv 0 \mod 3$. Conclure.

2802 **X**

Montrer que parmi treize réels distincts on peut toujours en choisir deux, disons x et y, tels que :

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}.$$

2803 **ENS MP 2017**

On dit que P est un *polygone entier* si P est l'enveloppe convexe de points de $\mathbb{Z}^2$. On dit que P est équivalent à Q, et on note $P \sim Q$, si P et Q sont des polygones entiers et s'il existe une transformation affine A qui envoie P sur Q et telle que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Quelle est le nombre de classes d'équivalence (éventuellement infini) ? Même question si l'on fixe l'aire du polygone.

2804 **Mines-Télécom MP 2018**

Déterminer toutes les fonctions convexes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2805 **ENS MP 2016**

Soit F et G deux polynômes non constants à coefficients entiers tels que pour tous entiers a et b, $F(a)-F(b)$ divise $G(a)-G(b)$. Montrer qu'il existe un polynôme H à coefficients rationnels tel que $G(X) = H(F(X))$.

2806 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E l'ensemble défini par :

$$E = \{f \in C^1([0\,;+\infty[,\mathbb{R}),\ f \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+\}.$$

On pose ϕ définie par, pour tout f dans E et pour tout x dans $\mathbb{R}_+$:

$$\phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{\tanh(tx)}{\cosh(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(t) = \arctan(nt)$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(\phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2807 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit λ et μ deux nombres réels. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 \in \mathbb{R}_2[X] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n' \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, existe-t-il P_0 tel que $P_n = Q$?

2808 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f \in C^2([a\,;b],\mathbb{R})$. On suppose que $ff'' = 0$. On pose :

$$Z_{ff'} = \{x \in [a\,;b] \mid f(x)f'(x) = 0\}.$$

1. Montrer que $Z_{ff'}$ est un intervalle fermé.
2. Montrer que f est affine.

2809 **Mines-Ponts PC 2018**

Soit P et Q deux polynômes réels non nuls. L'équation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \mathrm{e}^x$$

peut-elle avoir une infinité de solutions ?

2810 **X-ENS PSI 2021**

Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension 2 muni d'une base $(e_1;e_2)$, et tel que, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\lambda e_1 + \mu e_2\| = \||\lambda|e_1 + |\mu|e_2\| \quad \text{condition } (C_1)$$

On veut montrer que pour tout $(\lambda_1;\lambda_2;\mu_1;\mu_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$|\lambda_1| \leqslant |\mu_1| \text{ et } |\lambda_2| \leqslant |\mu_2| \implies \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| \leqslant \|\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2\| \quad \text{condition } (C_2)$$

1. Donner un exemple d'espace vectoriel normé dans lequel (C_1) est vérifiée, puis un exemple dans lequel elle ne l'est pas.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mu \mapsto \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$. Montrer que :
$$\forall(\mu_1;\mu_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(\mu_1)+\varphi(\mu_2)}{2}.$$
3. En déduire que φ est convexe, c'est-à-dire :
$$\forall(\mu_1;\mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\alpha \in [0\,;1], \quad \varphi((1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2) \leqslant (1-\alpha)\varphi(\mu_1) + \alpha\varphi(\mu_2).$$
4. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire la propriété (C_2).

2811 **ENS MP 2018**

Soit n un nombre premier. On considère dans le plan le triangle T formé par l'origine et les points de coordonnées $(0;n)$ et $(n;0)$. On subdivise ce triangle en n triangles t_i, $i \in \{1;\dots;n\}$, où chaque t_i est formé par l'origine et les points de coordonnées $(i-1;n+1-i)$ et $(i;n-i)$.

1. On admet le *théorème de Pick* :

   Soit P un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières. Alors $S = A + \frac{B}{2} - 1$, où S est l'aire du polygone, A le nombre de points intérieurs à coordonnées entières du polygone, et B le nombre de points à coordonnées entières appartenant à la frontière du polygone.

   Montrer alors que pour tout $i \in \{2;\dots;n-1\}$, les t_i ont le même nombre de points intérieurs à coordonnées entières.
2. Démontrer le théorème admis.

2812 **ENS MP 2017**

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément :

- $\forall \alpha > 0,\ f(x) = o(x^\alpha)$;
- $\forall \beta > 0,\ (\ln(x))^\beta = o(f(x))$?

2813 **ENS MP 2014**

1. Montrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tous entiers p, q avec q non nul, l'on ait :
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}.$$
2. En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}.$$

2814 **X MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire, nul en 1 et en -1, et strictement positif sur $]-1\,;1[$. Soit $\mathcal{S}$ l'aire sous la courbe de P entre -1 et 1. Soit $\mathcal{T}$ l'aire du triangle défini par l'axe des abscisses et les tangentes à P en -1 et en 1.
Montrer que $\mathcal{S} \geqslant \frac{2}{3}\mathcal{T}$.

2815 **ENS**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k z_k^n = 0.$$
Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

2816 **X MP 2021**

Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe un cercle du plan dont le nombre de points d'intersection avec $\mathbb{Q}^2$ soit n ? L'intersection peut-elle être infinie ?

2817 **ENS MP 2017**

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Trouver les fonctions f de $[\![0\,;n]\!]^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- La fonction f est nulle aux « bords » de $[\![0\,;n]\!]^d$: pour $x \in [\![0\,;n]\!]^d$, si une des coordonnées de x est dans $\{0;n\}$, alors on a $f(x) = 0$.
- Pour tout $x \in [\![0\,;n]\!]^d$ n'ayant aucune coordonnée dans $\{0;n\}$, on a :

$$\sum_{y \in A_x} (f(x) - f(y)) = 0,$$

où A_x désigne l'ensemble des points de $[\![0\,;d]\!]^n$ « adjacents » à x, c'est-à-dire obtenus en ajoutant ou soustrayant 1 à une des coordonnées de x.

2818 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Soit $P = (X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_n)^{\alpha_n}$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des r_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+d} = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+d-1}}{d},$$

où $d \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\ell = \frac{2(u_0 + 2u_1 + \cdots + du_{d-1})}{d(d+1)}.$$

2819 **X MP 2019**

Pour $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$, on pose :

$$V(f) = \sup_{n \geqslant 2,\, a \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant b} \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|\,.$$

Montrer que :

$$V(f) < +\infty \iff f \text{ est la différence de deux fonctions croissantes.}$$

2820 **X MP 2016**

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des réels, et la fonction P définie pour tout θ réel par :

$$P(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\theta) + \cdots + \lambda_n \cos(n\theta) + \mu_1 \sin(\theta) + \cdots + \mu_n \sin(n\theta).$$

Montrer que si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\theta) \geqslant 0$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(\theta) = |Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2$ pour tout θ.