Le concours Putnam

Le concours Putnam (en hommage à William Lowell Putnam (1861-1924)) est un concours mathématique annuel prestigieux ouvert aux étudiants des universités et institutions universitaires d'Amérique du Nord. Il fut fondé en 1927 et c'est en 1935 que le concours a pris sa forme actuelle sous la gestion de la *Mathematical Association of America (MAA)*. Bien que ne nécessitant pas un gros bagage mathématique, les problèmes posés sont plus que redoutables. Chaque concours est composé de douze problèmes valant chacun 10 points. Il semblerait que la médiane d'un tel concours ne dépasse pas les 5 points (sur 120 points) ! Le temps à disposition est de 6 heures (3 heures pour la partie A et 3 heures pour la partie B).

Voici un exemple de question (traduite de l'anglais). Aucun des milliers de candidats n'a fait mieux que... zéro point !

Problème B6, 3 décembre 2011

Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe au moins $\frac{p+1}{2}$ nombres n appartenant à l'ensemble $\{0; 1; 2; \ldots; p-1\}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} k!n^k \quad \text{n'est pas divisible par } p.$$

Voici encore, à titre d'exemple, quelques problèmes :

Dans chaque concours, le problème A1 est considéré comme « facile », premier problème synonyme de bienvenue au concours...

Problème A1, 2 décembre 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\cdot \ldots \cdot \cos(nx)$. Trouver le plus petit n tel que $|f_n''(0)| > 2023$.

Problème B5, 4 décembre 2010

Existe-t-il une fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$f'(x) = f(f(x))$ pour tout nombre réel x ?

Problème A3, 6 décembre 2003

Trouver le minimum de

$$|\sin(x) + \cos(x) + \tan(x) + \cot(x) + \sec(x) + \csc(x)|$$

où x est un nombre réel.

Problème A4, 2 décembre 2000

Montrer que l'intégrale impropre

$$\lim_{B \to +\infty} \int_0^B \sin(x) \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$$

converge.

Problème B4, 2 décembre 1995

Calculer

$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \cdots}}}.$$

Exprimer la réponse sous la forme $\dfrac{a + b\sqrt{c}}{d}$, où a, b, c, d sont des entiers.

Pour d'autres problèmes, des solutions ou encore des statistiques, vous pouvez consulter le site https : \\kskedlaya.org\putnam-archive\.

Enfin, vous trouverez à la page suivante l'énoncé (en anglais) du concours Putnam 2025.

The 86th William Lowell Putnam Mathematical Competition
Saturday, December 6, 2025

A1 Let m_0 and n_0 be distinct positive integers. For every positive integer k, define m_k and n_k to be the relatively prime positive integers such that

$$\frac{m_k}{n_k} = \frac{2m_{k-1}+1}{2n_{k-1}+1}.$$

Prove that $2m_k + 1$ and $2n_k + 1$ are relatively prime for all but finitely many positive integers k.

A2 Find the largest real number a and the smallest real number b such that

$$ax(\pi - x) \le \sin x \le bx(\pi - x)$$

for all x in the interval $[0, \pi]$.

A3 Alice and Bob play a game with a string of n digits, each of which is restricted to be 0, 1, or 2. Initially all the digits are 0. A legal move is to add or subtract 1 from one digit to create a new string that has not appeared before. A player with no legal move loses, and the other player wins. Alice goes first, and the players alternate moves. For each $n \ge 1$, determine which player has a strategy that guarantees winning.

A4 Find the minimal value of k such that there exist k-by-k real matrices $A_1, \ldots, A_{2025}$ with the property that $A_i A_j = A_j A_i$ if and only if $|i - j| \in \{0, 1, 2024\}$.

A5 Let n be an integer with $n \ge 2$. For a sequence $s = (s_1, \ldots, s_{n-1})$ where each $s_i = \pm 1$, let $f(s)$ be the number of permutations $(a_1, \ldots, a_n)$ of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that $s_i(a_{i+1} - a_i) > 0$ for all i. For each n, determine the sequences s for which $f(s)$ is maximal.

A6 Let $b_0 = 0$ and, for $n \ge 0$, define $b_{n+1} = 2b_n^2 + b_n + 1$. For each $k \ge 1$, show that $b_{2^{k+1}} - 2b_{2^k}$ is divisible by 2^{2k+2} but not by 2^{2k+3}.

B1 Suppose that each point in the plane is colored either red or green, subject to the following condition : For every three noncollinear points

A, B, C of the same color, the center of the circle passing through A, B and C is also this color. Prove that all points of the plane are the same color.

B2 Let $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ be strictly increasing and continuous. Let R be the region bounded by $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, and $y = f(x)$. Let x_1 be the x-coordinate of the centroid of R. Let x_2 be the x-coordinate of the centroid of the solid generated by rotating R around the x-axis. Prove that $x_1 < x_2$.

B3 Suppose S is a nonempty set of positive integers with the property that if n is in S, then every positive divisor of $2025^n - 15^n$ is in S. Must S contain all positive integers?

B4 For $n \geq 2$, let $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ be an n-by-n matrix of nonnegative integers such that

(a) $a_{i,j} = 0$ when $i + j \leq n$;

(b) $a_{i+1,j} \in \{a_{i,j}, a_{i,j} + 1\}$ when $1 \leq i \leq n-1$ and $1 \leq j \leq n$; and

(c) $a_{i,j+1} \in \{a_{i,j}, a_{i,j} + 1\}$ when $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq n-1$.

Let S be the sum of the entries of A, and let N be the number of nonzero entries of A. Prove that

$$S \leq \frac{(n+2)N}{3}.$$

B5 Let p be a prime number greater than 3. For each $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, let $I(k) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ be such that $k \cdot I(k) \equiv 1 \pmod{p}$. Prove that the number of integers $k \in \{1, \ldots, p-2\}$ such that $I(k+1) < I(k)$ is greater than $p/4 - 1$.

B6 Let $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Find the largest real constant r such that there exists a function $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$g(n+1) - g(n) \geq (g(g(n)))^r$$

for all $n \in \mathbb{N}$.