

# RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LES ÉTUDES DE FONCTIONS

FONCTIONS RÉELLES À UNE VARIABLE



Vincent Genilloud

Mars 2025

# Sommaire

1	Fonctions rationnelles . . . . .	2
2	Fonctions irrationnelles . . . . .	7
3	Fonctions trigonométriques . . . . .	9
4	Fonctions exponentielles et logarithmiques . . . . .	12

# 1 Fonctions rationnelles

## Problème 1.1

Étudier la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = x^3 + x + 2$$

On demande :

1. l'ensemble de définition, les zéros et le signe ;
2. la croissance de  $f$  et la valeur des éventuels extremums ;
3. le tracé du graphe.

## Problème 1.2

Même consigne que dans le problème précédent pour la fonction  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$ .

## Problème 1.3

On considère la famille de fonctions  $f_m$  définies par

$$f_m(x) = x^3 - mx^2 + mx - 1 \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe deux points  $A$  et  $B$  communs à tous les graphes des fonctions  $f_m$ .
2. On choisit  $m = -1$ . Établir les variations de  $f_{-1}$  et tracer son graphe. Montrer que le point d'inflexion  $I$  de  $f_{-1}$  est le centre de symétrie de ce graphe.
3. Étudier le sens de variation de  $f_m$ . Discuter selon les valeurs de  $m$ .
4. Calculer les coordonnées du point d'inflexion  $I_m$  de  $f_m$  en fonction de  $m$ . Établir l'équation du lieu géométrique des points  $I_m$  lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$ .
5. Soit  $\gamma$  la courbe d'équation  $y = x^2 - 1$ . Donner le nombre de points d'intersection de  $\gamma$  et du graphe de  $f_m$  selon les valeurs de  $m$ . Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $\gamma$  et le graphe de  $f_m$  sont tangents.

## Problème 1.4

Étudier la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

On demande :

1. l'ensemble de définition, les zéros et le signe ;
2. les asymptotes (la position relative n'est pas demandée) ;
3. la variation et les extremums de  $f$  ;
4. de tracer le graphe de  $f$  après avoir montré que la fonction  $f$  est impaire.

### Problème 1.5

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{2x - 5}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

1. Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ , le graphe de  $f$  admet-il au point d'abscisse 0 une tangente d'équation  $y = 3x$  ?
2. Dans cette partie du problème, on choisit  $a = 2$  et  $b = -4$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de  $f$ .
  - (b) Déterminer le type et l'équation des éventuelles asymptotes.
  - (c) Établir le tableau de variation de  $f$ .
  - (d) Esquisser le graphe de  $f$  ainsi que les éventuelles asymptotes.

### Problème 1.6

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3x - 12}{(x - 2)^2} + 3$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. Trouver les coordonnées des éventuels points d'intersection des asymptotes avec le graphe de  $f$ .
3. Établir le tableau de variation de  $f$ .
4. Esquisser le graphe de  $f$  (et les asymptotes).
5. Prouver que la droite d'équation  $y = -\frac{9}{4}x$  est tangente au graphe de  $f$ .

### Problème 1.7

On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{(1 - 2x)^2}{4x^2 + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de  $f$ .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. L'étude de la position relative est demandée. Étudier la croissance de  $f$ .
3. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 1.8

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(4 - x)(x - 9)}{3x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de  $f$ .

2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. La position relative est demandée.
3. Établir le tableau de variation de  $f$ .
4. Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $x = 4$ .
5. Esquisser le graphe de  $f$  (avec les asymptotes et la tangente de la question précédente).

### Problème 1.9

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = 4 + \frac{5x^2}{x^2 - 4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de  $f$ .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. La position relative est demandée.
3. Établir le tableau de variation de  $f$ .
4. Esquisser le graphe de  $f$  (avec les asymptotes).
5. La fonction  $f$  est-elle paire, impaire? Donner une preuve de votre affirmation.

### Problème 1.10

On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{(2x - 5)^2}{x^2 - 2x - 8}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction  $f$ .
3. Prouver que la fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire.
4. Trouver les équations des asymptotes. L'étude de position est demandée.
5. Étudier la croissance de  $f$ . On précisera les éventuels extremums.
6. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $x = 0$ .
7. Tracer le graphe de  $f$  et la tangente trouvée précédemment.

### Problème 1.11

On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction  $f$ .
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
4. Étudier la croissance de  $f$ . On précisera la valeur des éventuels extremums.
5. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $x = -2$ .

6. Tracer le graphe de  $f$  et les droites obtenues précédemment dans un même repère orthonormé.

### Problème 1.12

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 6}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction  $f$ .
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes.
4. Étudier la croissance de  $f$ . On précisera la valeur des éventuels extremums.
5. Tracer le graphe de  $f$ .
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = -2$ . Représenter cette tangente sur la figure réalisée au point précédent.

### Problème 1.13

On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{5}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Déterminer les asymptotes de  $f$ .
3. Étudier la croissance de  $f$  et calculer ses extremums.
4. Esquisser le graphe de  $f$ .
5. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation  $y = f(x)$ , l'axe  $Ox$  et les droites d'équations  $x = 3$  et  $x = 4$ .

### Problème 1.14

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = x + 4 + \frac{12x - 16}{(x - 2)^2}$$

1. Étudier la fonction  $f$ .  
On demande :
  - (a) l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$  ;
  - (b) les asymptotes de  $f$  ;
  - (c) les coordonnées des points d'intersection du graphe de  $f$  avec ses asymptotes ;
  - (d) l'étude de la croissance de  $f$  est les extremums ;
  - (e) le tracé du graphe de la fonction  $f$ .
2. Montrer que  $\frac{12x - 16}{(x - 2)^2} = \frac{12}{x - 2} + \frac{8}{(x - 2)^2}$ .

3. Calculer l'aire du domaine compris entre les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = \frac{4}{3}$ , l'asymptote oblique de  $f$  et le graphe de la fonction  $f$ .

### Problème 1.15

On considère la famille de fonctions  $f_m$  définies par

$$f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Dans cette partie du problème, on choisit  $m = 4$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
  - (b) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
  - (c) Étudier la croissance de  $f$  et les extremums.
  - (d) Montrer que le graphe de  $f$  admet un axe de symétrie.
  - (e) Tracer le graphe de  $f$ .
2. Quelles sont les valeurs de  $m$  telles que
  - (a)  $f$  n'admet ni maximum, ni minimum ;
  - (b)  $f$  a un maximum et un minimum ;
  - (c)  $f$  possède un seul extremum ?
3. Qu'y a-t-il de particulier pour  $m = 1$  et  $m = 3$ ? (Sans étudier  $f$ .)

### Problème 1.16

Étudier, en fonction des deux paramètres réels  $a$  et  $b$ , la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} + ax + bx^3 \end{aligned}$$

## 2 Fonctions irrationnelles

### Problème 2.1

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et déterminer l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x)$ . Donner une interprétation géométrique de ces deux limites.
4. Étudier la croissance de  $f$ .
5. Montrer que la distance de tout point du graphe de  $f$  à l'origine du repère est une constante que l'on déterminera.
6. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 2.2

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et déterminer l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
4. Étudier la croissance de  $f$ .
5. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 2.3

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 2.4

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.

3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
4. Étudier la croissance de  $f$ .
5. Étudier la concavité de la fonction  $f$ . Préciser les coordonnées des points d'inflexion.
6. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 2.5

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{4x - 1} - \sqrt{2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est une fonction strictement croissante qui ne possède pas d'asymptote.
3. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 2.6

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 6} - 2x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Tracer le graphe de  $f$  et ses éventuelles asymptotes.

### Problème 2.7

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 5x + 6|}}{x + 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Calculer la dérivée de  $f$  et préciser l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
4. Étudier la croissance de  $f$ .
5. Tracer le graphe de  $f$ .

### 3 Fonctions trigonométriques

#### Problème 3.1

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{3} \sin(x) - \cos(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est périodique. Sans justifier, donner la période de  $f$ .
3. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
4. Étudier la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
5. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-4\pi; 4\pi]$ .

#### Problème 3.2

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = 4 \sin^2(x) + 8 \cos(x) - 7$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est périodique. Sans justifier, donner la période de  $f$ .
3. Montrer que  $f$  est paire.
4. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
5. Étudier la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .
6. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-3\pi; 3\pi]$ .

#### Problème 3.3

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
2. Montrer que cette fonction possède une infinité d'asymptotes verticales. Préciser leur équation.
3. Étudier la croissance et la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .
4. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .

#### Problème 3.4

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \tan^2(x) + \tan(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
2. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes.

3. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
4. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .

### Problème 3.5

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f : \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ x \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \sin^2(x) + 2\cos(x) \end{array}$$

1. Étudier la croissance de cette fonction.
2. Établir l'égalité :  $f''(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$ .
3. Étudier la concavité de  $f$  et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de cette fonction.
4. Tracer le graphe de la fonction  $f$ .

### Problème 3.6

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x - \sin(x)$$

1. Montrer que  $f$  possède un unique zéro.
2. Montrer que la fonction  $f$  possède une infinité de points d'inflexion qui sont tous situés sur une même droite. Donner une équation de cette droite.
3. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 3.7

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1$$

1. Étudier la croissance de cette fonction dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
2. En déduire les zéros et le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Tracer le graphe de la fonction  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .
4. Étudier la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .

### Problème 3.8

Étudier en fonction du paramètre réel  $a$  la fonction réelle définie par

$$f(x) = \cos^2(x) - 2a\cos(x) - 1$$

**Problème 3.9**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \cos^4(x) + \sin^4(x)$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est paire et périodique. Sans justifier, donner la période de  $f$ .
3. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
4. Étudier la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
5. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .

**Problème 3.10**

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = 2m\sqrt{3}\sin(x) + (m+1)\cos(x) - 1 \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Dans cette partie du problème, on choisit  $m = 1$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de  $f$ .
  - (b) Étudier la croissance et la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
  - (c) Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .
2. (a) Pour quelle valeur de  $m$  la fonction  $f_m$  admet-elle une tangente de pente 6 au point d'abscisse zéro? Donner une équation de la tangente.  
(b) Pour quelles valeurs de  $m$  la fonction  $f_m$  ne possède-t-elle aucun zéro? Justifier.

## 4 Fonctions exponentielles et logarithmiques

### Problème 4.1

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = (x - 3)^2 e^x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 4.2

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  ne possède pas d'asymptote.
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Étudier la concavité de  $f$ . Préciser les coordonnées des points d'inflexion.
5. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 4.3

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(e^{2x} + 5e^x + 4)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
3. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante.
4. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 4.4

On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{-x} - 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de  $f$ .
3. Étudier la croissance de  $f$  et calculer ses extremums.
4. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 4.5

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = (e^{-x} - 1)(e^x - 4)$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Calculer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $\ln(4)$ .
5. Esquisser dans un même repère orthonormé le graphe de  $f$  ainsi que la tangente trouvée précédemment.

### Problème 4.6

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^x - 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de  $f$ .
4. Tracer le graphe de  $f$ .

### Problème 4.7

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{7x^2 - x - 8}{x} \cdot e^{-x}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de  $f$ .
2. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de  $f$ .
3. Prouver que  $f'(x) = \frac{-7x^3 + 8x^2 + 8x + 8}{x^2} \cdot e^{-x}$ .
4. Établir que 2 est l'unique zéro de la dérivée de  $f$ .
5. Étudier la croissance de  $f$  et calculer ses extremums.
6. Esquisser le graphe de  $f$ .

### Problème 4.8

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \ln \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

1. Vérifier que  $f$  est paire. Démontrer que la droite d'équation  $y = x - \ln(2)$  est une asymptote de  $f$  vers  $+\infty$ . Étudier la croissance de  $f$  et tracer son graphe dans un repère orthonormé.
2. Appelons  $g$  la dérivée de  $f$ . Montrer que

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Prouver que  $g$  est impaire, étudier sa croissance et tracer son graphe dans un nouveau repère orthonormé.

3. Montrer que  $g$  est une bijection de son ensemble de définition sur son ensemble des valeurs (que l'on précisera). Donner une expression fonctionnelle de  $g^{-1}$  et tracer son graphe dans le même repère utilisé en 2.
4. Calculer l'aire  $A(m)$  de la surface délimitée par le graphe de  $g^{-1}$ , l'axe des  $x$ , la droite d'équation  $x = 1$  et la droite d'équation  $y = m$  ( $m > 0$ ). Calculer la limite de cette aire quand  $m$  tend vers l'infini.

### Problème 4.9

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (x + m) \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ .  
Étudier le comportement de  $f_m$  au voisinage de zéro en discutant s'il y a lieu selon les valeurs de  $m$ .
2. Calculer  $f'_m(x)$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_m(x)$ .
3. Pour quelles valeurs de  $m$  la fonction  $f_m$  admet-elle
  - (a) aucun extremum ?
  - (b) deux extremums dont les abscisses sont de signe contraire ?
4. Soit  $m = 2$ . Étudier en détail la croissance de  $f_2$  et tracer son graphe dans un repère orthonormé. On vérifiera en particulier que le graphe de  $f$  admet la droite d'équation  $y = x + 3$  comme asymptote oblique double. On ne demande pas le point d'inflexion.

### Problème 4.10

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

1. Prouver que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
2. Étudier la croissance de  $f$  et tracer le graphe de  $f$  dans un repère orthonormé. Étudier soigneusement le comportement de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition. Les points d'inflexion ne sont pas demandés.

### Problème 4.11

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = \frac{mx + 3}{x + 1} e^x \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

Soit  $C_m$  la courbe représentative de  $f_m$  par rapport à un repère orthonormé.

1. On choisit  $m = 2$ . Étudier la croissance de  $f_2$  et tracer son graphe dans un repère orthonormé. On ne demande pas le point d'inflexion.
2. Montrer qu'il existe un point  $A$  commun à toutes les courbes  $C_m$  dont on donnera les coordonnées.
3. Calculer  $f'_m(x)$ . Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $f_m$  possède deux extremums.
4. Montrer que la droite déterminée par les points d'intersection de  $C_m$  avec les axes  $Ox$  et  $Oy$  est tangente à  $C_m$ .

### Problème 4.12

On considère la fonction

$$f_\alpha(x) = \ln(x^2 - 2 \sin(\alpha)x + 1)$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f_\alpha$  et étudier sa croissance. Discuter selon les valeurs de  $\alpha$ . Pour certaines valeurs de  $\alpha$ , la fonction  $f_\alpha$  possède un minimum auquel correspond le point  $M_\alpha$ . On demande l'équation du lieu géométrique des points  $M_\alpha$  lorsque  $\alpha$  varie dans  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f_\alpha$  possède deux zéros dont l'un est indépendant de  $\alpha$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$ .
4. Prouver que le graphe de  $f_\alpha$  possède la droite d'équation  $x = \sin(\alpha)$  comme axe de symétrie.
5. Étudier  $f_{\frac{\pi}{2}}$  et  $f_{\frac{\pi}{6}}$ . Représenter ces deux fonctions dans un même repère orthonormé. Par quelle transformation peut-on obtenir les représentations graphiques de  $f_{\frac{7\pi}{6}}$  et  $f_{\frac{13\pi}{6}}$  à partir de celle de  $f_{\frac{\pi}{6}}$ ? (Ne pas tracer ces représentations graphiques.)

### Problème 4.13

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot \exp\left(\frac{1}{x-2}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
2. Étudier la croissance de  $f$  et tracer son graphe dans un repère orthonormé.
3. Déterminer l'aire du domaine compris entre le graphe de  $f$ , l'axe des  $x$  et les droites d'équations  $x = 1 - e$  et  $x = 0$ .

### Problème 4.14

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de cette fonction.
2. Montrer que  $f$  est une fonction périodique. Donner sa période. (Aucune justification n'est demandée.)
3. Montrer que  $f$  est impaire.
4. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi ; 2\pi]$ . Préciser la nature et la valeur des éventuels extremums.
5. Étudier la concavité de  $f$  dans l'intervalle  $[-2\pi ; 2\pi]$ . Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
6. Tracer le graphe de  $f$  dans l'intervalle  $[-\pi ; 3\pi]$ .
7. Déterminer l'aire du domaine compris entre le graphe de  $f$ , l'axe  $Ox$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \pi$ .

### Problème 4.15

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 3x} & \text{si } x < 0 \\ \sin(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de  $f$  et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité de  $f$  aux points 0 et 1. Les points d'inflexion ne sont pas demandés.
2. Vérifier que la fonction  $G$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  par

$$G(x) = -\frac{1}{x} (\ln^2(x) + 2 \ln(x) + 2)$$

est une primitive de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$ .

Utiliser ce résultat pour calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la région délimitée par le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses dans l'intervalle  $[1 ; e]$ .

### Problème 4.16

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de cette fonction.
2. Étudier la croissance de  $f$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  et représenter son graphe dans cet intervalle.
3. Établir l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ .
4. Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de  $f$ , l'axe  $Ox$ , l'axe  $Oy$  et la droite d'équation  $x = \pi$ .

La fonction  $f$  de ce problème apparaît dans « *La moutarde me monte au nez* », film de Claude Zidi dont le professeur de mathématiques est Pierre Richard (1974). (Au fait, vous connaissez l'intégrale de Lemann?...)