

# Une fonction réelle continue partout, nulle part dérivable

On va construire une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle part dérivable.

## Définition

Pour tout  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$  on pose  $\Lambda(x) = |x|$ . On prolonge cette fonction par 1-périodicité sur  $\mathbb{R}$ .

## Proposition

La fonction  $\Lambda$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Preuve

La preuve est élémentaire. □

## Définition

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x).$$

## Proposition

La fonction  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Preuve

D'abord, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$0 \leq \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) \leq \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9} < +\infty.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on peut donc poser  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x)$ . Montrons maintenant que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , posons  $\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x)$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Vu les calculs effectués plus haut, il existe un entier  $N$  tel que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\sum_{m=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^m} \Lambda(10^m x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . D'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - \varphi_N(x) + \varphi_N(x) - \varphi_N(a) + \varphi_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - \varphi_N(x)| + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| + |\varphi_N(a) - f(a)| \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n a) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Or la fonction  $\varphi_N$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que, pour tout nombre réel  $x$  vérifiant  $|x - a| \leq \delta$ , l'on ait  $|\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Par suite, pour tout nombre réel  $x$  vérifiant  $|x - a| \leq \delta$ , on a  $|f(x) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ , ce qui prouve que la fonction  $f$  est continue en  $a$ .

Comme  $a$  est quelconque, on a démontré que la fonction réelle  $f$  est continue partout.  $\square$

On va maintenant démontrer que  $f$  est dérivable nulle part. Pour ce faire, commençons par énoncer et prouver le lemme suivant :

### Lemme

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $x$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles telles que, pour tout nombre naturel  $n$  non nul,  $x_n \leq x < y_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x).$$

### Preuve

Comme la fonction  $f$  est supposée dérivable en  $x$ , la fonction  $f$  est différentiable en  $x$ .<sup>1</sup>

---

1. Voir le complément sur la notion de dérivabilité (page 5).

On peut donc écrire

$$f(z) = f(x) + f'(x) \cdot (z - x) + (z - x) \cdot \rho(z - x)$$

avec  $\lim_{z \rightarrow x} \rho(z - x) = 0$ .

Alors on a

$$f(x_n) = f(x) + (x_n - x)(f'(x) + \rho(x_n - x))$$

et

$$f(y_n) = f(x) + (y_n - x)(f'(x) + \rho(y_n - x)).$$

Par suite, comme  $x_n \neq y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{f'(x)(y_n - x_n) + (y_n - x)\rho(y_n - x) - (x_n - x)\rho(x_n - x)}{y_n - x_n} \\ &= f'(x) + \frac{y_n - x}{y_n - x_n} \rho(y_n - x) - \frac{x_n - x}{y_n - x_n} \rho(x_n - x). \end{aligned}$$

Or  $\left| \frac{y_n - x}{y_n - x_n} \right| < 1$  et  $\left| \frac{x_n - x}{y_n - x_n} \right| < 1$ , car par hypothèse  $x_n \leq x < y_n$ .

D'où finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x),$$

car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(y_n - x) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n - x) = 0$ .

Le lemme est démontré. □

## Théorème

La fonction  $f$  est nulle part dérivable.

### Preuve

Soit  $x \in [0; 1[$ .

On considère une écriture décimale de  $x$  en écrivant  $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ .

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } a_k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \\ -1 & \text{si } a_k \in \{5; 6; 7; 8; 9\} \end{cases}$$

Pour tout  $n \geq 1$  on pose

$$x_n = 0, a_1 \dots a_n \quad \text{et} \quad y_n = x_n + 10^{-n}.$$

Distinguons deux cas :

- Si  $a_{k+1} \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ , alors

$$0 \leq 0, a_{k+1} \dots a_n \leq 0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k} \leq 0, 5.$$

On a donc

$$\frac{1}{10^k} \left( \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k}) - \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n) \right) = \frac{10^{-n+k}}{10^k} = \frac{\delta_{k+1}}{10^n}.$$

- Si  $a_{k+1} \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$ , alors

$$0, 5 \leq 0, a_{k+1} \dots a_n \leq 0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k} \leq 1.$$

On a donc

$$\frac{1}{10^k} \left( \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k}) - \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n) \right) = \frac{-10^{-n+k}}{10^k} = \frac{\delta_{k+1}}{10^n}.$$

Ceci prouve que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$f(y_n) - f(x_n) = \frac{1}{10^n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} = (y_n - x_n) \sum_{k=1}^n \delta_k.$$

On a donc, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=1}^n \delta_k.$$

Or, si l'on pose  $u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ , on a  $|u_{n+1} - u_n| = |\delta_{n+1}| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui démontre que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas convergente. Le lemme permet donc d'affirmer que la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x$ .

Enfin, comme  $f$  est de période 1, on a aussi prouvé que  $f$  est dérivable nulle part.  $\square$

## Complément sur la notion de dérivabilité

### Définition

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in ]a; b[$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $x$  s'il existe un nombre réel  $l$  et une fonction  $\rho$  vérifiant, pour tout  $h$  suffisamment proche de zéro,

$$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ .

### Théorème

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in ]a; b[$ . Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est dérivable en  $x$  ;
2.  $f$  est différentiable en  $x$ .

De plus, si la fonction  $f$  est différentiable en  $x$ , le nombre  $l$  de la définition ci-dessus est égal à  $f'(x)$ .

### Preuve

Pour commencer, supposons  $f$  dérivable en  $x$ .

Pour tout  $h \neq 0$  suffisamment proche de zéro, on a

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \left( \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \cdot h.$$

Comme  $f$  est supposée dérivable en  $x$ , on a, posant

$$l = f'(x) \quad \text{et} \quad \rho(h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x),$$

$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ . La fonction  $f$  est différentiable en  $x$ .

Pour terminer, supposons  $f$  différentiable en  $x$ .

Par définition, il existe un nombre réel  $l$  et une fonction  $\rho$  vérifiant

$$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ .

D'où, pour tout  $h \neq 0$  suffisamment proche de zéro,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l + \rho(h).$$

Comme par hypothèse  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ , on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l$ , ce qui démontre que  $f$  est dérivable en  $x$  et que  $l = f'(x)$ .  $\square$

### Remarque

Si l'on pose  $z = x + h$  dans la définition d'une fonction différentiable, on obtient : une fonction  $f$  est différentiable en  $x$  s'il existe un nombre réel  $l$  et une fonction  $\rho$  vérifiant, pour tout  $z$  suffisamment proche de  $x$ ,

$$f(z) = f(x) + l \cdot (z - x) + (z - x) \cdot \rho(z - x),$$

avec  $\lim_{z \rightarrow x} \rho(z - x) = 0$ .