Une preuve originale de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors il existe deux nombres naturels non nuls m et n vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

On a alors $n\sqrt{2} = m$, ce qui prouve que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$ est non vide.

Soit p l'élément minimal de cet ensemble.

On a donc $p\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Aussi, $p(\sqrt{2}-1) \in \mathbb{N}^*$ puisque $p(\sqrt{2}-1) = p\sqrt{2} - p$. De plus, $p(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2p - p\sqrt{2}$ est aussi un nombre naturel non nul, ce qui prouve que $p(\sqrt{2}-1)$ appartient à E. Vu le caractère minimal de p, on a $p(\sqrt{2}-1) > p$ et finalement $\sqrt{2} > 2$, ce qui est absurde. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ est démontrée. $\square$