Le déterminant de Smith (1885)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice carrée de taille n définie par $s_{ij} = i \wedge j$, où $i \wedge j$ désigne le plus grand commun diviseur des nombres i et j. On va calculer $|S|$, le déterminant de S.

L'idée est d'écrire S comme un produit de deux matrices triangulaires A et B dont le déterminant est simple à calculer. Comme le déterminant d'un produit de deux matrices est le produit de leur déterminant, on pourra calculer $|S|$.

Pour ce faire, on va utiliser la fonction indicatrice d'Euler :

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(n) = \operatorname{Card}\left(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leqslant n \text{ et } m \wedge n = 1\}\right).$$

La fonction ainsi définie s'appelle l'indicatrice d'Euler.

Lemme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

Preuve

Considérons l'ensemble $E = \left\{\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; \frac{n}{n}\right\}$.
Écrivons les n éléments de E sous la forme d'une fraction irréductible, de sorte que

$$E = \bigcup_{d|n} \left\{\frac{k}{d} \mid 1 \leqslant k \leqslant d \text{ et } k \wedge d = 1\right\}.$$

Comme toute fraction irréductible (de numérateur et dénominateur positifs) est unique, si d_1 et d_2 sont deux diviseurs distincts de n, on a

$$\left\{\frac{k}{d_1} \mid k \wedge d_1 = 1\right\} \bigcap \left\{\frac{k}{d_2} \mid k \wedge d_2 = 1\right\} = \emptyset.$$

On a donc

$$n = \operatorname{Card}(E) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Le lemme est démontré. $\square$

Calculons maintenant le déterminant de S.

Grâce au lemme, on peut écrire, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$i \wedge j = \sum_{d \mid i \wedge j} \varphi(d).$$

Afin de faire apparaître le produit de deux matrices, écrivons :

$$i \wedge j = \sum_{d \mid i \text{ et } d \mid j} \varphi(d) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \delta_{d|i} \delta_{d|j} \quad \text{où} \quad \delta_{d|k} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit maintenant les matrices $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définies par

$$a_{ij} = \varphi(j) \delta_{j|i} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \delta_{i|j}.$$

Si $P = AB$, on a pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \delta_{k|i} \delta_{k|j} = i \wedge j.$$

Autrement dit, $S = AB$.

Or

$$A = (\varphi(j)\delta_{j|i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \varphi(1) & 0 & \cdots & 0 \\ * & \varphi(2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \varphi(n) \end{pmatrix} \text{ car si } j > i, j \nmid i.$$

Par conséquent, on a $|A| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

Et

$$B = (\delta_{i|j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car si } i > j, i \nmid j.$$

Par suite, on a $|B| = 1$.

Finalement, $|S| = |AB| = |A||B| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$.