Gymnase de Morges **3$^{\text{ème}}$ maturité** **Juin 2008**

Examen de l'option spécifique PAM
Partie « Application des mathématiques »

Durée conseillée : 160 minutes (sur un total 240 minutes).

Consignes :
- — Utiliser une nouvelle page pour chaque problème.
- — Les problèmes de la partie physique et ceux de la partie mathématiques doivent être développés sur des feuilles différentes.
- — Écrire vos nom, prénom et classe sur les feuilles de données ainsi que sur chaque feuille.

Matériel autorisé :
- — « Formulaires et Tables » CRM, non annoté.
- — Machine à calculer non programmable.

Problème 1 (14 points)

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1+i)z_n + 1 - i \quad (n \geqslant 0) \\ z_0 \quad = -7 - 24i \end{cases}.$$

1. (a) Calculer les racines carrées de z_0. On écrira les réponses sous la forme $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
   (b) Calculer le module et l'argument de z_0.
   (c) Calculer z_1 en utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer par récurrence que $z_n = (-8 - 25i) \cdot (1+i)^n + 1 + i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 2 (19 points)

Depuis qu'il est à la retraite sur sa petite île paradisiaque, Anatole tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille chaque fois 180 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 400 litres.

Chaque semaine les matières stockées perdent, après décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

Soit V_1, V_2, V_3 les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte.

De manière générale, soit V_n le volume stocké le $n^{\text{ème}}$ samedi après la tonte.

1. Vérifier que $V_2 = 225$ litres et que $V_3 = 236,25$ litres.
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et prouver qu V_n est inférieur à 240 pour tout $n \geqslant 1$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 240 - V_n$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (b) Exprimer u_n et V_n en fonction de n.
   (c) Vers quelle valeur tend V_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Problème 3 (20 points)

Dans quelques jours, le maître de mathématiques de votre option spécifique va envoyer les notes de l'examen de l'option « Physique et applications des mathématiques » au secrétariat du gymnase. Pour assurer la confidentialité du message, le chiffrement des notes de chaque élève se fera à l'aide du système RSA. Avant d'être chiffrée, chaque note sera multipliée par 10. Ainsi par exemple, la note 5,5 sera d'abord transformée en le nombre 55.

La clé publique du secrétariat est composée des nombres $n = 187$ et $e = 59$.

1. Vérifier que $\varphi(n) = 160$. (φ étant la fonction indicatrice d'Euler)
2. Calculer la clé privée d du secrétariat à l'aide de l'algorithme de Bézout.
3. Quel message chiffré correspond à la note 4,5 ?
4. Si le secrétariat reçoit le nombre 106, à quelle note correspond ce nombre ?

Problème 4 (14 points)

Le taux d'alcool $A(t)$ (en g/L) du capitaine Haddock ayant absorbé, pour une fois à jeun, une certaine quantité de whisky, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = 6\mathrm{e}^{-t} \tag{1}$$

où $t \in [0\,;+\infty[$ est le temps écoulé après ingestion (exprimé en heures).

1. Résoudre l'équation différentielle (1) afin d'exprimer $A(t)$ en fonction de t. Préciser la valeur de $A(0)$.
2. Donner la valeur du délai T (à 5 minutes près) au bout duquel le taux d'alcool du capitaine Haddock est inférieur à 0,5 g/L. On justifiera la réponse à l'aide de la méthode de la bissection.

   Si vous n'avez pas obtenu de réponse à la question a), résolvez la partie b) en considérant la fonction $A(t) = 4t^2\mathrm{e}^{-t}$ (qui n'est pas la solution de l'équation (1)).