



Approximations probabilistes

NOTATIONS ET RAPPELS

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers positifs, \mathbb{R} l'ensemble des réels et \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs.

Dans tout le sujet, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, Z_λ désigne une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ sur \mathbb{N} . On rappelle que $\mathbb{P}(Z_\lambda = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable $E \subset \mathbb{R}$. Lorsque $E \subset [0, \infty[$, on note $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in E} y \mathbb{P}(Y = y) \in [0, \infty]$ l'espérance de Y . La variable aléatoire Y est dite L^1 si $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, et dans ce cas on écrit $Y \in L^1$. Lorsque $Y \in L^1$, on rappelle que $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in E} y \mathbb{P}(Y = y) < \infty$ est l'espérance de Y .

Enfin, on admet que toutes les variables aléatoires mises en jeu dans le sujet sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

À tout moment il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet est long et comporte des questions délicates : il est tout à fait normal de bloquer sur des questions et il est possible de réussir l'épreuve sans traiter une part substantielle du sujet.

La clarté, la concision et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il ou elle le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il ou elle est amenée à prendre.

Les dépendances entre les parties sont les suivantes :

- La partie 1 est indépendante du reste du sujet.
- La partie 2.2 utilise des résultats de la partie 2.1.
- Les parties 3.1, 3.2 et 3.3 sont indépendantes entre elles, mais utilisent des notations et résultats de la partie 2.

PARTIE PRÉLIMINAIRE : LOIS DE POISSON, INÉGALITÉS

Les résultats de cette partie préliminaire pourront être utiles ultérieurement dans le sujet.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- (1) Calculer la fonction génératrice de Z_λ .
- (2) (2a) Montrer que pour tous $u, r > 0$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq e^{-ur} \mathbb{E}[e^{uZ_\lambda}]$.
- (2b) Montrer pour tout $r \geq \lambda$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq \exp(-r \ln(r) + r \ln(\lambda) + r - \lambda)$.
- (2c) Montrer que pour tout $r \in]0, \lambda]$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \leq r) \leq \exp(-r \ln(r) + r \ln(\lambda) + r - \lambda)$.
- (3) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\ln(k!) \leq (k+1) \ln(k) - k + 1$.

1. OPÉRATEUR DE CHEN-STEIN ET APPROXIMATION POISSONNIENNE

1.1. Opérateur de Chen-Stein

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathcal{L}_\lambda f(n) = \lambda f(n+1) - n f(n);$$

ainsi $\mathcal{L}_\lambda f$ est une fonction définie sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .

On note \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |f(n)|$$

pour $f \in \mathcal{F}$.

On note \mathcal{G}_λ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(Z_\lambda) \in L^1$, et on admet que c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel. On munit \mathcal{G}_λ de la norme

$$\|f\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|]$$

pour $f \in \mathcal{G}_\lambda$.

- (4) (4a) Montrer que $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ définit bien une norme sur \mathcal{G}_λ .
- (4b) Montrer que \mathcal{L}_λ définit une application linéaire continue de \mathcal{F} dans \mathcal{G}_λ .
- (4c) Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ et si X est une variable aléatoire L^1 à valeurs dans \mathbb{N} , alors $\mathcal{L}_\lambda f(X) \in L^1$.
- (5) (5a) Soit X une variable aléatoire L^1 à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.
- (5b) Soit $g \in \mathcal{F}$. Montrer que si $\mathbb{E}[g(Z_\lambda)] \neq 0$ alors il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{L}_\lambda f = g$.
- (6) Soit $g \in \mathcal{F}$. Démontrer qu'il existe une unique fonction $h_g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$h_g(0) = 0 \text{ et } \mathcal{L}_\lambda h_g = g$$

et montrer que pour tout $k \geq 0$ on a

$$h_g(k+1) = \frac{1}{\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda = k)} \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(Z_\lambda = j) g(j).$$

- (7) Montrer que si $g \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{E}[g(Z_\lambda)] = 0$ alors $\|h_g\|_\infty \leq e\|g\|_\infty$. Selon l'approche choisie, il est possible qu'il soit plus naturel d'identifier une autre borne explicite (possiblement meilleure), tout résultat numérique explicite sera valorisé.
- (8) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Z_\lambda \in A)| \leq e \sup \{ \mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] : f \in \mathcal{F}, \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

1.2. Sommes de variables aléatoires et approximation poissonienne

Soit $N \geq 2$ un entier. Dans cette partie, $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont des variables aléatoires telles que pour tout $1 \leq i \leq N$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in]0, 1[$. On pose

$$B_1 = \sum_{i=1}^N p_i^2, \quad \lambda = \sum_{i=1}^N p_i,$$

et

$$W = \sum_{i=1}^N X_i, \quad W_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N X_j \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N.$$

Dans cette partie 1.2, f désigne un élément de \mathcal{F} .

1.2.1. Variables aléatoires indépendantes. — On suppose dans cette partie 1.2.1 que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont indépendantes.

- (9) (9a) Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^N p_i \mathbb{E}[f(W+1) - f(W_i+1)].$$

- (9b) En déduire que

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z_\lambda \in A)| \leq 2eB_1.$$

- (10) Pour $n \geq 2$, soit Y_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $(n, \lambda/n)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\left| \mathbb{P}(Y_n = k) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| \leq \frac{2e\lambda^2}{n}.$$

1.2.2. Variables aléatoires dépendantes. — On ne suppose plus que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont indépendantes. Pour $1 \leq i \leq N$, on définit l'ensemble \mathcal{D}_i comme suit :

$$\mathcal{D}_i = \{j \in \{1, \dots, N\} : j \neq i, X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes}\}.$$

On pose ensuite

$$T_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} X_j, \quad S_i = W - T_i - X_i.$$

On pose également

$$p_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j]$$

et

$$B_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_i p_j, \quad B_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_{ij}.$$

(11) Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^N \left(p_i \mathbb{E} \left[f(W+1) - f(S_i+1) \right] - \mathbb{E} \left[X_i \left(f(S_i+T_i+1) - f(S_i+1) \right) \right] \right).$$

(12) En déduire que

$$\sup_{ACN} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z_\lambda \in A)| \leq 2e(B_1 + B_2 + B_3).$$

2. INÉGALITÉS DE CONCENTRATION

2.1. Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable borné E de \mathbb{R} et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable F . On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$. On note $\mathbb{E}[X|Y]$ la variable aléatoire $\phi(Y)$ où la fonction ϕ est définie comme suit. Pour $y \in F$,

$$\phi(y) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x | Y = y) & \text{si } y \in F_Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ϕ dépend donc de la loi jointe de X et de Y .

- (13) (13a) Montrer que si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}[X|Y] \geq 0$ presque sûrement.
 (13b) Justifier que $\mathbb{E}[X|Y]$ est L^1 , et que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.
 (13c) Montrer que pour toute fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée on a $\mathbb{E}[g(X)|X] = g(X)$ presque sûrement.
 (13d) Montrer que pour toute fonction $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ bornée on a l'égalité $\mathbb{E}[h(Y)X|Y] = h(Y)\mathbb{E}[X|Y]$ presque sûrement.
- (14) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable borné E' de \mathbb{R} .
 (14a) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ presque sûrement.
 (14b) Montrer que si Z est indépendante de (X, Y) , alors $\mathbb{E}[XZ|Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X|Y]$ presque sûrement.
 (14c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{E}[X + \lambda Z|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + \lambda \mathbb{E}[Z|Y]$ presque sûrement.

2.2. Un énoncé abstrait

Soient W et W' deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable E . On dit que le couple (W, W') est échangeable si (W, W') et (W', W) ont la même loi.

Dans toute cette partie 2.2, on suppose que le couple (W, W') est échangeable et on considère une fonction $F : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et qui vérifie $F(x, y) = -F(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. On note enfin ϕ la fonction telle que

$$\mathbb{E}[F(W, W')|W] = \phi(W).$$

(15) Montrer que pour toute fonction $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée on a

$$\mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \mathbb{E}[h(W)F(W, W')] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[(h(W) - h(W'))F(W, W')]$$

et $\mathbb{E}[\phi(W)] = 0$.

Dans la suite, on note Δ la fonction telle que

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} [|(\phi(W) - \phi(W')) F(W, W')| | W] = \Delta(W)$$

et pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose

$$m(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}].$$

On admet qu'il existe deux constantes (déterministes) $B \geq 0$ et $C \geq 0$ telles que presque sûrement

$$\Delta(W) \leq B\phi(W) + C.$$

(16) (16a) Montrer que $m(\theta) < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, que m est dérivable et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$m'(\theta) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\left(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')} \right) F(W, W') \right].$$

(16b) Montrer que pour tout $\theta \geq 0$ on a $m'(\theta) \leq B\theta m'(\theta) + C\theta m(\theta)$, et en déduire que pour tout $\theta \in [0, 1/B[$ (avec la convention $1/0 = +\infty$ lorsque $B = 0$) on a

$$\ln m(\theta) \leq \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}.$$

(17) En prenant $\theta = t/(C + Bt)$, montrer que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|\phi(W)| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}}.$$

3. APPLICATIONS

3.1. Sommes de variables indépendantes

Soit $N \geq 1$ un entier. On considère dans cette partie des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ indépendantes à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R} (on ne les suppose pas forcément de même loi). On suppose qu'il existe une constante (déterministe) $K > 0$ telle que $|X_i| \leq K$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

On considère également des variables aléatoires $(X'_i)_{1 \leq i \leq N}$ telles que pour tout $1 \leq i \leq N$, X'_i a la même loi que X_i et telles que (X_1, \dots, X_N) est indépendant de (X'_1, \dots, X'_N) . Enfin, on considère I une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, indépendante de $(X_1, X_2, \dots, X_N, X'_1, X'_2, \dots, X'_N)$.

Pour tout $1 \leq i \leq N$ on pose

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i] \quad \text{et} \quad \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$$

où $\text{Var}(X)$ désigne la variance de la variable aléatoire réelle X . On pose également

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et} \quad S'_N = S_N - X_I + X'_I.$$

On considère enfin pour tout $1 \leq i \leq N$ une constante (déterministe) $c_i > 0$ telle que presque sûrement

$$|X_i - \mu_i| \leq c_i.$$

(18) (18a) Montrer que (S_N, S'_N) est échangeable.

(18b) Montrer que presque sûrement

$$\mathbb{E}[X_I | S_N] = \frac{S_N}{N}.$$

(19) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N (c_i^2 + \sigma_i^2)}\right).$$

Indication. On pourra considérer la fonction $F(x, y) = N(x - y)$.

(20) On suppose dans cette question que $0 \leq X_i \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[S_N] + t}\right).$$

3.2. Permutations aléatoires

Soit $N \geq 1$. On considère une variable aléatoire π_N à valeurs dans l'ensemble \mathcal{S}_N des permutations de $\{1, 2, \dots, N\}$ qui suit la loi uniforme. On considère également I et J deux variables aléatoires qui suivent la loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$ telles que I, J, π_N sont indépendantes. On pose enfin $\pi'_N = \pi_N \circ (I, J)$ (où (i, j) désigne la transposition qui échange i et j pour $i \neq j$ et (i, i) désigne la permutation identité).

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ des nombres réels tels que $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^N a_{i, \pi_N(i)}.$$

(21) Montrer que (π_N, π'_N) est un couple échangeable.

(22) (22a) Soit $\pi \in \mathcal{S}_N$ une permutation quelconque. Montrer que

$$\sum_{i, j=1}^N (a_{i, \pi(i)} + a_{j, \pi(j)} - a_{i, \pi(j)} - a_{j, \pi(i)})^2 \leq 2 \sum_{i, j=1}^N (a_{i, \pi(i)} + a_{j, \pi(j)} + a_{i, \pi(j)} + a_{j, \pi(i)}).$$

(22b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{4\mathbb{E}[S_N] + 2t}\right)$.

(23) Démontrer que pour tout $2 \leq k \leq N$ la probabilité que π_N ait au moins k points fixes vaut au plus $2e^{-k/12}$.

3.3. Magnétisation dans le modèle de Curie-Weiss

Soit $N \geq 1$ un entier, $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_N)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}^N$, dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(\frac{\beta}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i\right)$$

pour $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$.

La quantité Z_N est une constante de sorte que l'expression précédente soit une loi de probabilité, et on ne la calculera pas. On pose

$$m(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et} \quad m_i(X) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N X_j$$

pour $1 \leq i \leq N$.

(24) Soit $1 \leq i_0 \leq N$. Montrer que presque sûrement $\mathbb{E}[X_{i_0} | (X_j)_{1 \leq j \leq N, j \neq i_0}] = \tanh(\beta m_{i_0}(X) + \beta h)$ où on rappelle que \tanh est la fonction tangente hyperbolique.

À partir de la variable aléatoire X , on construit maintenant une variable aléatoire $X' = (X'_1, \dots, X'_N)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}^N$ de la manière suivante :

— on considère un entier $I \in \{1, \dots, N\}$ choisi uniformément au hasard, indépendant de X ,

— pour tout $j \neq I$, on pose $X'_j = X_j$,

— la loi de X'_I est définie comme suit : pour $1 \leq i_0 \leq N$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$:

$$\mathbb{P}(X'_I = 1 \mid I = i_0, X_j = \sigma_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N) = \frac{1}{C} \exp\left(\beta h + \frac{\beta}{N} \sum_{j=1, j \neq i_0}^N \sigma_j\right)$$

et

$$\mathbb{P}(X'_I = -1 \mid I = i_0, X_j = \sigma_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N) = \frac{1}{C} \exp\left(-\beta h - \frac{\beta}{N} \sum_{j=1, j \neq i_0}^N \sigma_j\right),$$

où C est une constante qui dépend de i_0 , de $(\sigma_j)_{j \neq i_0}$, de β , de h et de N .

(25) (25a) Calculer la valeur de C .

(25b) Montrer que (X, X') est un couple échangeable.

(26) On note $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_N)$ et on pose $F(\sigma, \sigma') = \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma'_i)$. Donner une expression de la fonction ϕ telle que $\mathbb{E}[F(X, X') | X] = \phi(X)$.

(27) Montrer que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh(\beta m_i(X) + \beta h) - \tanh(\beta m(X) + \beta h) \right| \leq \frac{\beta}{N}$$

et en déduire que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(|m(X) - \tanh(\beta m(X) + \beta h)| \geq \frac{\beta}{N} + \frac{t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right).$$