

Équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Soit $\delta = (27a^2d - 9abc + 2b^3)^2 + 4(3ac - b^2)^3$.

I. Si $\delta > 0$, une racine réelle (simple) :

$$x = \frac{\sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 - \sqrt{\delta}} - b\sqrt[3]{2}}{3a\sqrt[3]{2}}$$

II. Si $\delta < 0$, trois racines réelles distinctes :

$$x_{k+1} = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-27a^2d + 9abc - 2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - b}{3a}$$

pour $k = 0, 1, 2$

III. Si $\delta = 0$ et $27a^2d - 9abc + 2b^3 \neq 0$, deux racines réelles dont une double :

• Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 > 0$:

$$x_1 = \frac{\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a} \quad (\text{racine double})$$

$$x_2 = -\frac{2\sqrt{b^2 - 3ac} + b}{3a}$$

• Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 < 0$:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{b^2 - 3ac} + b}{3a} \quad (\text{racine double})$$

IV. Si $\delta = 0$ et $27a^2d - 9abc + 2b^3 = 0$, une racine réelle triple :

$$x = -\frac{b}{3a}$$