

QUESTIONS D'ORAUX DE  
MATHÉMATIQUES  
DE CONCOURS D'ENTRÉE  
À DE GRANDES ÉCOLES FRANÇAISES

Partie II

Arithmétique et algèbre  
Algèbre linéaire

1246 exercices



Jean-Pierre Serre (né en 1926)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 10 avril 2026

# Table des matières

Introduction . . . . .	1
Notations . . . . .	2
1 Arithmétique et algèbre . . . . .	6
2 Algèbre linéaire . . . . .	35

# Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)

X (École Polytechnique (Paris))

Centrale

Centrale-Supélec

Mines

Mines-Ponts

Mines-Télécom

ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)

EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)

ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)

ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)

ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)

CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté!

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

# Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$\llbracket a; b \rrbracket$	ensemble des nombres entiers $k$ avec $a \leq k \leq b$ ( $a, b$ entiers)
$\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \dots, a_n$
$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de $a$ et $b$
$a \mid b$	$a$ divise $b$
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\text{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble $E$
$ E $	cardinal de l'ensemble $E$
$[x]$	partie entière de $x$
$\{x\}$	partie fractionnaire de $x$
$\text{sgn}(x)$	signe de $x$
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\text{deg}(P)$	degré du polynôme $P$
$\mathbb{K}[X, Y]$	ensemble des polynômes en $X$ et $Y$ , à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus $n$
$a \equiv b \pmod{n}$	$a$ et $b$ congrus modulo $n$
$\bar{x}$	classe de l'entier $x$ modulo $n$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo $n$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo $p$ ( $p$ premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\text{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau $A$
$\text{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de $G$
$S_n$	groupe symétrique de $[[1; n]]$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation $\sigma$
$A \cong B$	$A$ isomorphe à $B$
$D_f$	ensemble de définition de $f$
$Z_f$	ensemble des zéros de $f$
$G_f$	graphe de $f$
$f \sim g$	$f$ équivalent à $g$
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
$\nabla f$	gradient de $f$
$\Delta f$	Laplacien de $f$
$\chi_u$	polynôme caractéristique de $u$
$\pi_u$	polynôme minimal de $u$
$\text{Ker}(u)$	noyau de $u$
$\text{Im}(u)$	image de $u$
$\text{rang}(u)$	rang de $u$
$\det(u)$	déterminant de $u$
$ A $	déterminant de la matrice $A$
$\text{com}(A)$	comatrice de $A$
$C(A)$	commutant de $A$
$\text{Tr}(u)$	trace de $u$
$\text{Sp}(u)$	spectre de $u$
$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de $u$ sur $\mathbb{K}$
$\text{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de $S$
$\text{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de $S$ sur $A$
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble $S$
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel $E$
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$ -vectoriel $E$
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de $E$
$E^*$	dual (algébrique) de $E$
$L(E, F)$	ensemble des applications linéaires de $E$ vers $F$
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$

$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$
$f^*$	adjoint de $f$
Id	application identité
$I_n$	matrice identité de taille $n$
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
$A^T$	transposée de la matrice $A$
$\ A\ $	norme subordonnée (à la norme $\ \cdot\ $ ) de $A$
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de $x$ et $y$
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de $E$
$\ell^\infty$	ensemble des suites bornées
$\ell^p$	ensemble des suites sommables pour la norme $\ \cdot\ _p$
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie
$\ \cdot\ _p$	$p$ -norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre $x$ et de rayon $R$
$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation $p$ -adique de $n$ ( $p \in \mathcal{P}$ )
$ \cdot _p$	valeur absolue $p$ -adique
$ x - y _p$	distance $p$ -adique entre $x$ et $y$
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance $p$ -adique
$F^E$	ensemble des fonctions $f$ de $E$ vers $F$
$f _A$	restriction de la fonction $f$ à $A$ ( $A \subset E$ )
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de $E$
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur $E$ à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur $E$ à valeurs dans $F$
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe $C^k$ sur $E$ à valeurs dans $F$
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur $E$ , à valeurs dans $F$
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur $E$ à valeurs dans $F$
cosh	cosinus hyperbolique
sinh	sinus hyperbolique
tanh	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique

$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble $A$
$\overset{\circ}{A}$	intérieur de l'ensemble $A$
$\text{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble $A$
$\text{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble $A$
$\text{dist}(A; B)$	distance entre $A$ et $B$
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement $E$
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement $E$
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire $X$
$\text{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire $X$
$\text{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires $X$ et $Y$
$G_X$	fonction génératrice des probabilités de $X$
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre $p$
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres $n, p$
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre $p$
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre $\lambda$
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire $X$ suit la loi $\mathcal{L}$

# 1 Arithmétique et algèbre

## II.1.1 X-ENS

Soit  $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$  et  $n \geq 3$  un entier. On suppose  $P^n + Q^n = R^n$ .

Montrer que  $P, Q, R$  sont égaux, à une constante multiplicative près.

## II.1.2 Mines MP 2019

Pour tout  $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose  $x \star y = x + (-1)^x y$ . Montrer que  $(\mathbb{Z}, \star)$  est un groupe.

## II.1.3 X-ENS

Déterminer tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  qui sont continus.

## II.1.4 X-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une permutation  $\sigma \in S_n$  est un *dérangement* si et seulement si  $\sigma$  n'a pas de point fixe. Y-a-t-il plus de dérangements pairs ou impairs ?

## II.1.5 ENS MP

Trouver tous les groupes finis tels que l'identité soit le seul automorphisme.

## II.1.6 Mines-Ponts MP 2021

Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 sont égaux à 1.

## II.1.7 CCP MP

Soit  $I$  un idéal d'un anneau commutatif  $A$ .

On note  $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$  le *radical* de  $I$ .

1. Montrer que  $\sqrt{0} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$  est un idéal de  $A$ .
2. Montrer que  $\sqrt{I}$  est un idéal et qu'il contient  $I$ .
3. Soit  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ . Montrer que
  - (a)  $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$
  - (b)  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
4. Montrer que  $\sqrt{\sqrt{I}} = I$ .

## II.1.8 X PC 2020

Trouver les polynômes  $P$  appartenant  $\mathbb{Z}[X]$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P(n)$  est premier.

## II.1.9 Mines-Ponts

Soit  $n \geq 2$  un entier.

1. Déterminer un groupe multiplicatif de  $M_n(\mathbb{C})$  qui n'est pas un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ .
2. Soit  $G$  un groupe multiplicatif de  $M_n(\mathbb{C})$  qui n'est pas un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Montrer que tous les éléments de  $G$  ont le même rang.

**II.1.10** Mines-Ponts

On pose  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid (a; b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un anneau. Quels sont les éléments inversibles ?

**II.1.11** Mines-Ponts

Déterminer tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**II.1.12** Mines

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $G \cap SL_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$ .

Montrer que  $G$  est cyclique.

**II.1.13** Mines-Ponts MP 2021

Quel est le chiffre des unités de  $2022^{2022^{2022}}$  ?

**II.1.14** x

Soit  $n \geq 2$  un nombre naturel. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $n$  est premier ;
- ii)  $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ .

**II.1.15** x-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $N_n \in \mathbb{N}$  tel que tout sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$  est de cardinal inférieur ou égal à  $N_n$ .

**II.1.16** x-ENS

Soit  $V$  un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(V)$ . On note  $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$ . Montrer que

$$\frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g) = \dim(V^G). \quad (\text{formule de Burnside})$$

**II.1.17** ENS Ulm

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle *spectre* de  $x$ , noté  $\text{spec}(x)$ , la suite réelle  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  dont le terme général est défini par  $u_n = \lfloor nx \rfloor$  (partie entière de  $nx$ ). Si  $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ , on dit que la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une *suite de Beatty*.

Démontrer le *théorème de Beatty* :

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels supérieurs à 1. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) Les ensembles  $A = \{u_n(a) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $B = \{u_n(b) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .
- ii)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  et  $a, b$  sont irrationnels.

**II.1.18** X-ENS

Un nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  est *transcendant* si et seulement s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul de  $\mathbb{Q}[X]$ .

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  annulé par un polynôme irréductible  $P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré  $d \geq 1$ .

Soit  $(p_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$ ,

avec  $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$ .

Montrer le *critère de Liouville* :

$$\frac{1}{q_n^d} = O\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\right).$$

2. Montrer que le nombre  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{n!}}$  est transcendant.

**II.1.19** Mines-Ponts MP

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe abélien d'élément neutre  $e$ . On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $x \in G$ ,  $x^n = e$ .

1. On suppose  $n = ab$  avec  $a \wedge b = 1$ .

On pose  $G_a = \{x^a \mid x \in G\}$  et  $G_b = \{x^b \mid x \in G\}$ .

Montrer que  $G_a$  est un sous-groupe de  $G$ .

Montrer que pour tout  $x \in G$ , il existe un unique couple  $(u; v) \in G_a \times G_b$  tel que  $x = uv$ .

2. On suppose  $n$  impair.

(a) Montrer que l'application  $\Phi_2 : x \mapsto x^2$  est un automorphisme de  $G$  et préciser sa réciproque.

(b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k \wedge n = 1$ .

Montrer que l'application  $\Phi_k : x \mapsto x^k$  est un automorphisme de  $G$  et préciser sa réciproque.

**II.1.20** ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $\sum_{M \in G} \text{Tr}(M) = 0$ .

Montrer que  $\sum_{M \in G} M = 0$ .

**II.1.21** Mines-Ponts MP 2023

1. Soit  $a$  et  $n$  deux nombres naturels avec  $a \geq 2$  et  $n \geq 2$ . On suppose que  $a^n - 1$  est premier. Montrer que  $a = 2$  et que  $n$  est premier.

2. Soit  $p$  un nombre premier impair et  $d$  un diviseur de  $2^p - 1$ .

Montrer que  $d \equiv 1 \pmod{2p}$ .

**II.1.22** X-ENS

Soit  $f$  un morphisme de  $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +)$  vers  $(\mathbb{Z}, +)$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(e_k) = 0$ , où  $e_k$  est la suite définie par  $e_k(n) = \delta_{k,n}$ . Montrer que  $f = 0$ .

**II.1.23** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \geq 2$  un entier. On veut montrer que  $n$  ne divise pas  $2^n - 1$ . Par l'absurde, on suppose que  $n$  divise  $2^n - 1$ . Soit  $p$  un diviseur premier de  $n$ .

1. Montrer que 2 est inversible modulo  $p$ . On note  $k$  l'ordre de 2 modulo  $p$ .  
Montrer que  $k \mid n$  et que  $k \mid p - 1$ .
2. Conclure.

**II.1.24** X-ENS

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $d_n$  le nombre de couples  $(a; b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tels que  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux. Soit  $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  la *fonction de Möbius* définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r \quad (p_1, \dots, p_r \text{ premiers distincts}) \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait différent de 1} \end{cases}$$

1. Montrer que  $d_n = \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$ .
2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$ .

**II.1.25** X-ENS

Soit  $n \geq 2$  un entier et  $\mathbb{K}$  un corps,  $|\mathbb{K}| \geq 3$ . Démontrer que  $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ , où  $D(GL_n(\mathbb{K})) = \langle ABA^{-1}B^{-1} \mid A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \rangle$ . (L'ensemble  $D(GL_n(\mathbb{K}))$  est appelé le *groupe dérivé* de  $GL_n(\mathbb{K})$ .)

**II.1.26** Mines-Ponts

1. Le polynôme  $X^4 + 4$  est-il irréductible sur  $\mathbb{Q}$  ?
2. En déduire les entiers  $n$  tels que  $n^4 + 4$  est premier.

**II.1.27** ENS Ulm

Pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$ , on note  $\varepsilon(\sigma)$  la signature de  $\sigma$  et  $\text{inv}(\sigma)$  le nombre d'invariants de  $\sigma$ . Calculer :

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\text{inv}(\sigma) + 1}.$$

**II.1.28** X-ENS

Trouver tous les morphismes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ .

**II.1.29** X-ENS

Soit  $p \geq 3$  premier et  $\varphi : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  la réduction canonique. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $\varphi|_G$  est injective.

**II.1.30** X-ENS

Soit  $G$  un groupe fini. On suppose que pour tous  $x, y$  appartenant à  $G \setminus \{e\}$ , il existe  $\tau \in \text{Aut}(G)$  tel que  $\tau(x) = y$ . Le groupe  $G$  est-il abélien ?

**II.1.31** X PC 2019

Soit  $m, n$  des entiers positifs. Déterminer un polynôme unitaire de degré maximal divisant  $X^m - 1$  et  $X^n - 1$ .

**II.1.32** X MP 2021

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $C_n = \{(x; y) \in (\mathbb{Q}^*)^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$ .

1. Montrer que  $C_1$  est non vide.
2. Montrer que  $C_7$  est vide.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $C_n$  non vide. Montrer que  $C_n$  est infini.

**II.1.33** X MP 2021

Résoudre l'équation  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b}$  d'inconnue  $(a; b; n) \in \mathbb{N}^{*3}$ .

**II.1.34** CCP MP

On note  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère dans  $\mathbb{Z}$  la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par :

$$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = kp.$$

On note  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation  $\mathcal{R}$ .

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de  $p$  ?
2. Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
3. On admet que, muni de ces opérations,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un anneau.  
Démontrer que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps si et seulement si  $p$  est premier.

**II.1.35** CCP MP 2025

1. Soit  $(a; b; p) \in \mathbb{Z}^3$ . Prouver que : si  $p \wedge a = 1$  et  $p \wedge b = 1$ , alors  $p \wedge ab = 1$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier.

(a) Prouver que pour tout  $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k} k!$

En déduire que  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .

(b) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}.$$

Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , que :

$$p \text{ ne divise pas } n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

**II.1.36** CCP MP

1. Énoncer le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ .
2. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux. Soit  $c \in \mathbb{N}$ . Prouver que :

$$a \mid c \text{ et } b \mid c \iff ab \mid c.$$

3. On considère le système  $(S)$  :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

dans lequel l'inconnue  $x$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

- (a) Déterminer une solution particulière  $x_0$  de  $(S)$  dans  $\mathbb{Z}$ .
- (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S)$ .

**II.1.37** X MP 2021

Pour  $\sigma \in S_n$ , on pose  $A(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \dots + \sigma(n-1)\sigma(n)$ .  
Déterminer le maximum de  $A$ .

**II.1.38** X ESPCI

Soit  $q \geq 2$  un entier fixé.

1. Soit  $d$  et  $n$  deux naturels non nuls. Montrer que, si  $d$  divise  $n$ , alors  $q^d - 1$  divise  $q^n - 1$ .
2. La réciproque est-elle vraie ?

**II.1.39** X

Soit  $p$  premier et  $C_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$ .

Montrer que  $C_p$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  et en déterminer les sous-groupes.

**II.1.40** Centrale PC

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\binom{X}{n}$  ou  $H_n$  le polynôme  $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ .  
On pose  $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$ .

1. On dit qu'un polynôme  $P$  stabilise  $\mathbb{Z}$  si, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(k) \in \mathbb{Z}$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  stabilise  $\mathbb{Z}$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(\Delta)$  et calculer  $\Delta(H_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  stabilisant  $\mathbb{Z}$ . Montrer qu'il existe  $(c_0; \dots; c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  tel que  $P = c_0 H_0 + \dots + c_n H_n$ .

**II.1.41** ENS MP MPI

Soit  $G$  un groupe fini. Si  $X$  et  $Y$  sont des parties non vides de  $G$ , alors on pose  $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$  et  $XY = \{xy \mid (x; y) \in X \times Y\}$ . Dans la suite,  $X$  désigne une partie non vide de  $G$ .

1. On suppose que  $|XX| < 2|X|$ . Montrer que  $XX^{-1} = X^{-1}X$ .
2. On suppose que  $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$ . Montrer que  $X^{-1}X$  est un sous-groupe de  $G$ .

**II.1.42** X ESPCI

On veut montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_m) \in \{-1; 1\}^m$  tel que  $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$ .

1. Prouver la propriété pour tout  $n \in \{1; 2; 3\}$ .
2. Développer les polynômes  $(X+3)^2 - (X+1)^2$  et  $(X+4)^2 - (X+2)^2$  et conclure.

**II.1.43** ENS MP MPI

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et une transposition  $(ab)$  telle que  $1 \leq a < b \leq n$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la transposition  $(12)$  et le cycle  $c = (12 \cdots n)$  engendrent le groupe symétrique  $S_n$ .
2. Montrer que la transposition  $\tau = (13)$  et le cycle  $c = (1234)$  n'engendrent pas le groupe symétrique  $S_4$ . (On pourra s'intéresser à la parité de  $\tau(i) - i$  et de  $c(i) - i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ .)
3. Montrer que la transposition  $(ab)$  et le cycle  $c = (12 \cdots n)$  engendrent  $S_n$  si, et seulement si,  $b - a$  et  $n$  sont premiers entre eux.

**II.1.44** Mines-Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples  $(m; n) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $3^m = 8 + n^2$ .

**II.1.45** X-ENS

Calculer le nombre d'involutions du groupe  $S_n$ .

**II.1.46** X MP 2019

Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau  $C([0; 1])$  des fonctions réelles définies et continues sur  $[0; 1]$  qui sont strictement inclus dans  $C([0; 1])$ ?

**II.1.47** X MP 2019

1. Pour  $n$  un nombre premier, montrer que :

$$n \mid 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1} + 1.$$

2. Trouver tous les nombres entiers  $n \geq 1$  tels que :

$$n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n.$$

**II.1.48** Mines-Télécom MP 2022

1. Le groupe  $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$  est-il cyclique ?
2. Le groupe  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$  est-il cyclique ?
3. Soit des entiers  $p \geq 2$  et  $q \geq 2$  premiers entre eux. Montrer que :

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

**II.1.49** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un morphisme de corps.

1. Déterminer  $f$  sur  $\mathbb{Z}$  puis sur  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ .
3. Étudier la monotonie de  $f$ .
4. Déterminer entièrement  $f$ .

**II.1.50** Mines-Télécom MP 2018

Résoudre dans  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 10 \end{cases}$$

**II.1.51** Mines-Télécom MP 2016

Soit  $E$  l'ensemble des matrices réelles de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.
2. Montrer que  $E$  est un sous-anneau de  $M_2(\mathbb{R})$ . Est-ce un corps ?

**II.1.52** Mines-Télécom MP 2022

Pour un anneau  $A$ , on dit qu'un idéal  $I$  de  $A$  est *premier* si et seulement si :

$$\forall (x; y) \in A^2, xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Soit  $A$  un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que  $A$  est un anneau intègre, puis que  $A$  est un corps.

**II.1.53** CCINP MP

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif.

1. (a) Rappeler la définition d'un anneau.  
(b) Rappeler la définition d'un idéal.
2. Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Montrer que si  $1_A \in I$ , alors  $I = A$ .
3. Soit  $x \in A$ . On pose  $I_x = \{a \cdot x \mid a \in A\}$ . Montrer que  $I_x$  est un idéal de  $A$ .
4. On suppose que  $A$  n'est pas l'anneau nul. Démontrer :

$$A \text{ est un corps} \iff \text{Les seuls idéaux de } A \text{ sont } \{0_A\} \text{ et } A.$$

**II.1.54** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $G$  un groupe fini. On suppose que tous les éléments de  $G$  sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de  $G$  ?

**II.1.55** Mines-Ponts MP 2024

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

**II.1.56** Mines-Télécom MP 2024

Soit l'anneau  $A = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ , et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ .

1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ , alors  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .

**II.1.57** Mines-Ponts MP 2018

Déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel il existe un groupe  $G$  de cardinal  $n$  non abélien.

**II.1.58** Mines-Télécom MPI 2024

Résoudre l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$  dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

**II.1.59** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $a \in \llbracket 1 ; p - 1 \rrbracket$  avec  $p$  premier.

1. Montrer qu'il existe un unique  $b \in \llbracket 1 ; p - 1 \rrbracket$  tel que  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Quels sont les  $a$  tels que  $a = b$  ?

**II.1.60** Centrale-Supélec 2017

Soit  $p$  un nombre premier. On note :

- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{F}_p^*$  le groupe des inversibles de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{F}_p^{*2} = \{\overline{x^2} \mid x \notin p\mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que si  $\bar{x} = \bar{y}$ , alors  $e^{\frac{2\pi xi}{p}} = e^{\frac{2\pi yi}{p}}$ .

On notera  $\tau(a) = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} ak^2$ .

2. Montrer que si  $a \in \mathbb{F}_p^{*2}$ , alors  $\tau(a) = \tau(1)$ .
3. Montrer que si  $b \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$ , alors  $\tau(b) + \tau(1) = 0$ .

**II.1.61** TPE/EIVP MP 2017

Résoudre dans  $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$  l'équation  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

**II.1.62** Centrale-Supélec MP 2019

On dit qu'un anneau  $A$  est *régulier* si, pour tout  $x$  appartenant à  $A$ , il existe un  $u$  appartenant à  $A$  tel que  $xux = x$ .

1. (a) L'anneau  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  est-il régulier ?  
 (b) Un corps est-il un anneau régulier ?  
 (c) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $(L(E), +, \circ)$  est un anneau régulier.
2. Soit  $A$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  ayant ses coefficients  $a_{i,i+1}$  égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Exhiber  $U$  tel que  $AUA = A$ .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$  soit un anneau régulier.

**II.1.63** Centrale-Supélec MP 2022

Soit  $A$  un anneau commutatif. On dit qu'un idéal  $I$  de  $A$  est de *type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in I, \forall x \in I, \exists a_1, \dots, a_p \in A, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i.$$

On écrit aussi  $I = \text{Vect}_A(\{\lambda_1; \dots; \lambda_p\})$ . On dit qu'un anneau est *noethérien* si tous ses idéaux sont de type fini.

1. Montrer que  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  et  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$  sont noethériens.
2. Montrer que l'anneau  $(A, +, \cdot)$  est noethérien si et seulement si toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang.

**II.1.64** Mines-Ponts MPI 2025

Soit  $p$  un nombre premier et  $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$ .

1. Calculer le cardinal de  $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .
2. Montrer que pour tout  $A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ,  $A^{q+2} = A^2$ .

**II.1.65** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $G$  un groupe abélien d'ordre  $pq$ , où  $p$  et  $q$  sont deux premiers distincts.

1. Montrer que  $G$  est cyclique.
2. Montrer l'importance de la commutativité.

**II.1.66** Mines-Ponts MP

Soit  $\mathbb{K}$  un corps (commutatif) fini de cardinal  $q$ .

On considère le groupe quotient  $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^*$ .  
On pourra utiliser l'application déterminant.
2. Déterminer le cardinal de  $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ .
3. Déterminer les cardinaux de  $GL_n(\mathbb{K})$  et de  $SL_n(\mathbb{K})$ .
4. Soit  $\mathbb{L}$  un autre corps (commutatif) tel que  $SL_n(\mathbb{K})$  et  $SL_n(\mathbb{L})$  soient isomorphes. Que peut-on dire de  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$  ?

**II.1.67** Mines-Télécom MP 2018

Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à  $-1$  modulo 4.

**II.1.68** Mines-Ponts MP

Soit  $G$  un groupe cyclique de cardinal  $n$ , d'élément neutre  $e$ .

1. Montrer que pour tout  $a \in G$ ,  $a^n = e$ .
2. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ .
  - (a) Montrer que  $H$  est cyclique.
  - (b) Montrer que le cardinal de  $H$  divise le cardinal de  $G$ .
3. Montrer que  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ , où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler.

**II.1.69** TPE/EIVP MP 2017

1. Soit  $p$  un nombre premier. Résoudre l'équation  $x^2 = \bar{1}$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , puis montrer que  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(n-1)!$  par  $n$ .

**II.1.70** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $P$  son polynôme minimal. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  pour que  $\mathbb{K}[f]$  soit un corps.

**II.1.71** Mines-Télécom MP 2021

1. Résoudre l'équation  $x^2 = x$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $p$  premier.
2. Résoudre l'équation  $x^2 = x$  dans  $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$ .

**II.1.72** Centrale-Supélec MP 2019

On note  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier et impair, et  $\mathcal{C} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p^*\}$ .

1. (a) Que dire de la structure algébrique de  $\mathbb{F}_p$  et de  $\mathcal{C}$  ?  
 (b) Expliciter  $\mathcal{C}$  pour  $p = 11$ .
2. Soit  $P$  un polynôme de degré strictement inférieur à  $d$  et à coefficients entiers, avec  $d \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, p \mid P(a_i) \text{ avec les } a_i \text{ distincts modulo } p.$$

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \mid P(n)$ .

3. Montrer que  $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p \mid x^{\frac{p-1}{2}} = 1\right\}$ .

**II.1.73** CCINP PC 2014

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que l'ensemble  $a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que l'ensemble des périodes de  $f$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

**II.1.74** ENS MP 2019

Soit  $G$  un groupe. Est-il vrai que :

$$G \text{ est fini} \iff \text{L'ensemble des sous-groupes de } G \text{ est fini?}$$

**II.1.75** X MP 2019

1. Montrer que  $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] \subset \mathbb{Z}[j]$ , où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .
2. Montrer que  $\mathbb{Z}[j]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$  n'est pas factoriel.
4. Montrer que  $\mathbb{Z}[j]$  est euclidien.

**II.1.76** Centrale-Supélec MP 2025

Soit un entier  $n \geq 2$  et  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

1. (a) Énoncer le théorème de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .  
 (b) Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$ . Donner le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(x - a)^2$ .  
 (c) En déduire une caractérisation des racines de  $P$ .
2. Posons  $T_n = X^n - X + (-1)^n$ . Quel est le nombre de racines de  $T_n$  dans  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ?

**II.1.77** ENS 2023

Montrer que  $SL_2(\mathbb{Z})$  est un groupe, engendré par  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**II.1.78** Mines 2023

On note  $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$ .

Montrer que  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel dont  $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}\}$  est une base, puis que  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

**II.1.79** Centrale 2022

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau.

1. (a) Montrer que l'unique morphisme d'anneaux  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  est donné par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Z} \longrightarrow A \\ k &\longmapsto k \cdot 1_A \end{aligned}$$

- (b) Montrer qu'il existe un unique  $\kappa_A \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Ker}(f_A) = \kappa_A \mathbb{Z}$ . (Le nombre  $\kappa_A$  est appelé la *caractéristique* de l'anneau  $A$ .)
2. (a) Montrer que si  $A$  est un corps, alors  $\kappa_A = 0$  ou  $\kappa_A$  est un nombre premier.  
 (b) Montrer que si  $A$  est un corps fini, alors  $\kappa_A \neq 0$ .
3. (a) On suppose que  $A$  est un corps fini de cardinal  $p^n$  avec  $n \geq 1$  et  $p$  premier. Montrer que l'application  $F : x \mapsto x^p$  est un automorphisme de corps de  $A$ .  
 (b) Déterminer l'ordre de  $F$  dans le groupe des automorphismes de  $A$ .

**II.1.80** Centrale 2024

1. (a) Énoncer le théorème de Gauss dans  $\mathbb{Z}$ , ainsi que le petit théorème de Fermat.  
 (b) Rappeler la définition d'un idéal d'un anneau commutatif. Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble  $a\mathbb{Z}[X]$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[X]$ .  
 (c) Soit  $R$  un anneau commutatif et  $p \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $pR = \{pr \mid r \in R\}$  est un idéal de  $R$ , puis montrer que pour tous  $x, y \in R$ ,  $(x+y)^p - (x^p + y^p) \in pR$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier.
- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $R$  un anneau commutatif et  $I$  un idéal de  $R$ . On se donne  $A, B \in M_n(R)$  et on suppose que tous les coefficients de  $B$  appartiennent à  $I$ . Montrer que  $\det(A+B) - \det(A) \in I$ .  
 (b) Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$ . Montrer que  $P(X^p) - (P(X))^p \in p\mathbb{Z}[X]$ .  
 (c) Soit  $M \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $\text{Tr}(M^p) = \text{Tr}(M) \pmod{p}$ .

**II.1.81** Mines 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Pour  $x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , on note  $T(x) = \text{pgcd}(x_1, \dots, x_n)$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- i)  $\det(A) \in \{-1; 1\}$   
 ii)  $\forall x \in \mathbb{Z}^n, T(Ax) = T(x)$

**II.1.82** Mines 2024

Soit  $G$  et  $G'$  deux groupes, et  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes. Montrer que  $f$  est surjectif si, et seulement si, l'image par  $f$  de toute partie génératrice de  $G$  est  $G'$ .

**II.1.83** X 2022

On pose  $G = SO_3(\mathbb{R})$  et on considère un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que :

$$\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H.$$

Montrer que  $H = \{I_3\}$  ou  $H = G$ .

**II.1.84** ENS 2022

On considère le groupe :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Si  $B$  est un sous-groupe de  $G$ , on définit  $C(B) = \{g^{-1}Bg \mid g \in G\}$ . Montrer qu'il existe un unique sous-groupe non trivial  $H$  de  $G$  tel que  $C(H) = H$ .

**II.1.85** ENS 2023

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs  $v_1, v_2$  non colinéaires de  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $L = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$ , et on note  $\text{vol}(L) = |\det(v_1; v_2)|$ .

1. Soit  $B$  une boule d'aire strictement supérieure à  $\text{vol}(L)$ . Montrer qu'il existe  $x, y \in B$  tels que  $x - y \in L$ .
2. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I \in L, \|I\|_2 \leq 2(1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{\text{vol}(L)}{\pi}}.$$

3. Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Montrer que  $-1$  est un carré modulo  $p$ .
4. Montrer que  $p$  est somme de deux carrés.

**II.1.86** Mines-Ponts MP 2024

1. Soit  $(G, \star)$  un groupe et  $(H, \star)$  un sous-groupe de  $G$ . Déterminer le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant le complémentaire de  $H$ .
2. On suppose  $G$  fini. Soit  $S$  un sous-ensemble de  $G$ . Montrer que  $(S, \star)$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $S$  est stable pour la loi  $\star$ .

**II.1.87** CCINP MP 2022

On considère un groupe  $(G, \cdot)$  cyclique d'ordre  $n$ , engendré par  $a$ . On fixe  $r \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $f : x \in G \mapsto x^r$ . Soit encore  $d = \text{pgcd}(r, n)$ .

1. Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de  $f$ .
3. Montrer que l'image de  $f$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a^d$ .
4. Soit  $g \in G$ . Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $y = x^r$ .

**II.1.88** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{K})$  tel que, pour tout  $M \in G$ ,  $M^2 = I_n$ .

1. Montrer que  $G$  est abélien.
2. Montrer que  $|G| \leq 2^n$ .
3. Soit  $(n; p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Montrer que les deux groupes  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $GL_p(\mathbb{K})$  sont isomorphes si et seulement si  $n = p$ .

**II.1.89** ENS MP 2022

Soit  $p = \overline{a_n \dots a_0}^{10}$  un nombre premier (écriture en base 10).

On pose  $P = a_n X^n + \dots + a_0$ . Montrer que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

**II.1.90** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le sous-groupe engendré par  $A$  et  $B$ .
2. Que dire des éléments qui commutent avec  $A$  et  $B$ ?

**II.1.91** Mines-Ponts MP 2021

Une application  $p$  d'un ensemble  $E$  dans  $E$  est dite *idempotente* si  $p \circ p = p$ .

1. (a) Montrer que si  $p$  est injective et idempotente, alors  $p = \text{Id}_E$ .  
 (b) Montrer que si  $p$  est surjective et idempotente, alors  $p = \text{Id}_E$ .  
 (c) Construire une application idempotente  $p$  différente de l'identité pour l'ensemble  $E = \{a; b\}$ .
2. Montrer que  $p$  est idempotente si et seulement si, pour tout  $x \in P(E)$ ,  $p(x) = x$ .
3. Donner les trois applications idempotentes pour  $E = \{a; b\}$ , et les dix pour  $E = \{a; b; c\}$ .

**II.1.92** Centrale-Supélec MP 2021

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre commutative intègre de dimension finie  $n \geq 2$ .

1. Soit  $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ . Montrer que  $f : x \mapsto ax$  est un automorphisme. En déduire que  $a$  est inversible.
2. Soit  $a \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{R}$ . Montrer que  $\{1; a\}$  est libre et que  $\{1; a; a^2\}$  est liée.
3. Montrer l'existence de  $i \in \mathcal{A}$  tel que  $i^2 = -1$ , puis que  $\mathcal{A}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

**II.1.93** X ESPCI 2016

Soit  $n = 10101010 \dots 101$  tel qu'il y ait 2016 fois le chiffre 0.

Montrer que  $n$  n'est pas un nombre premier.

**II.1.94** Mines-Télécom MP 2019 MP

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \wedge 10 = 1$ . Montrer que  $n^4 \equiv 1 \pmod{10}$ .
2. On suppose  $a \wedge 10 = 1$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $a^{4 \cdot 10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$ .

**II.1.95** Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  et  $(g_1; g_2) \in G \times G$ . On suppose que pour tout  $g \in G$ , il existe un voisinage  $V$  de  $g$  tel que  $G \cap V = \{g\}$ . Soit  $G_1$  le sous-groupe engendré par  $g_1$  et  $G_2$  le sous-groupe engendré par  $g_1$  et  $g_2$ .

1. Décrire les éléments de  $G_1$ .
2. Décrire les éléments de  $G_2$ .
3. Soit  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{C}^*$ . Montrer que  $G \cap K$  est fini.
4. Montrer que  $\mathbb{U} \cap G$  est monogène.

**II.1.96** Mines-Ponts MP 2015

Pour  $n$  entier naturel non nul, on note  $S(n)$  la somme de ses diviseurs positifs. Montrer que  $S(n) \leq n + n \ln(n)$ .

**II.1.97** CCINP MP 2016

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau d'éléments unité 1.

1. Soit  $(a; b) \in A^2$ . Supposons que  $1 - ab$  soit inversible dans  $A$ . Montrer que  $1 - ba$  est inversible dans  $A$  et préciser son inverse.
2. Soit  $a$  un élément de  $A$  tel qu'il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que  $a^n = 0$ .
  - (a) Montrer que  $1 - a$  est inversible et préciser son inverse.
  - (b) En déduire que  $b = 1 + 2a + \dots + na^{n-1}$  est inversible dans  $A$  et préciser son inverse.
3. Soit  $(a; b) \in A^2$  tel que  $ab$  est nilpotent. Montrer que  $ba$  est nilpotent.
4. On suppose  $A$  commutatif. On note  $\text{Nil}(A)$  l'ensemble des éléments nilpotents de  $A$ . Montrer que  $\text{Nil}(A)$  est un idéal de  $A$ .

**II.1.98** ENS MP 2013

Soit  $(\mathcal{A}, \times)$  un magma associatif. Démontrer la proposition suivante généralement admise : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout  $n$ -uplet  $(a_1; \dots; a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  et tout parenthésage « admissible » de la multiplication  $a_1 \times \dots \times a_n$  (par exemple, pour  $n = 4$ ,  $(a_1 \times a_2) \times (a_3 \times a_4)$ ,  $a_1 \times (a_2 \times (a_3 \times a_4))$ ,  $(a_1 \times (a_2 \times a_3)) \times a_4$  sont des parenthésages admissibles), le résultat de la multiplication est le même.

**II.1.99** Mines-Ponts MP 2016

1. Soit  $n \geq 1$  entier. Montrer que si  $2^n + 1$  est premier, alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2^p$ .
2. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_p = 2^{2^p} + 1$ . Montrer que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \neq q \implies f_p \wedge f_q = 1.$$

3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

**II.1.100** Mines-Ponts

Soit  $(E, +, \cdot)$  un anneau non commutatif. On munit  $E$  d'une loi de composition interne  $[\cdot, \cdot]$  (crochets de Lie) définie par :

$$\forall (a; b) \in E^2, [a, b] = ab - ba.$$

1. Montrer l'identité de Jacobi :

$$\forall (a; b; c) \in E^3, [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

2. On note, pour  $a \in E$  fixé, l'application  $\varphi_a$ , qui va de  $E$  dans lui-même, définie par  $\varphi_a(x) = [a, x]$ . Montrer que :

(a) Pour tout  $(x; y) \in E^2$ ,  $\varphi_a(x + y) = \varphi_a(x) + \varphi_a(y)$ .

(b) Pour tout  $(x; y) \in E^2$ ,  $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)y + x\varphi_a(y)$ .

(c) Pour tout  $(x; y) \in E^2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\varphi_a^n(xy) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_a^k(x) \varphi_a^{n-k}(y).$$

(d) Pour tout  $(x; y) \in E^2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\varphi_a(x^n) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \varphi_a(x) x^{n-1-k}.$$

(e) Montrer que si  $a$  est *nilpotent*, c'est-à-dire s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $a^p = 0_E$ , alors  $\varphi_a$  est également *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi_a^q$  est l'application nulle de  $E$  dans  $E$ .

**II.1.101** ENS MP 2019

Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $n$ . On dit que  $G$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  si pour tout entier  $d$  divisant  $n$ , il existe au plus un sous-groupe de  $G$  de cardinal  $d$ .

1. On suppose  $G$  cyclique. Montrer que  $G$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

2. Réciproquement, si  $G$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ , montrer que  $G$  est cyclique.

3. Soit  $\mathbb{K}$  un corps fini. On note  $\mathbb{K}^*$  l'ensemble des éléments non nuls de  $\mathbb{K}$  et on rappelle que  $(\mathbb{K}^*, \cdot)$  est un groupe. Montrer que  $\mathbb{K}^*$  est cyclique.

4. On suppose que  $|\mathbb{K}| = p^2$ , où  $p$  est un premier supérieur ou égal à 3. Montrer que  $X^4 + 1$  admet une racine dans  $\mathbb{K}$ .

**II.1.102** X MP 2024

Soit  $G$  un sous-groupe du groupe des bijections du plan complexe. On suppose que :

- $G$  est cyclique d'ordre  $2^n$  avec  $n \geq 2$ ,
- $G$  contient la conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$ ,
- $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall g \in G, \forall z \in \mathbb{C}, g(mz) = mg(z)$ .

1. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , il existe  $g \in G$  tel que  $\frac{g(z)}{z} \notin \{-1; 1\}$ .
2. Déterminer les sous-groupes de  $G$  d'ordre  $2^{n-1}$ .
3. On regarde  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Est-il possible que  $G$  ne soit composé que d'applications linéaires ?

**II.1.103** CCINP MP 2025

1. Calculer  $d = \text{pgcd}(473, 220)$ .
2. Existe-t-il un couple  $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $473u + 220v = d$ ? Si oui, en déterminer un.
3. Les équations suivantes ont-elles des solutions  $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ ? Si oui, les déterminer.
  - (a)  $(E_a) : 473u + 220v = 1$
  - (b)  $(E_b) : 473u + 220v = 11$
  - (c)  $(E_c) : 473u + 220v = 22$

**II.1.104** ENS MP 2018

Donner, à isomorphisme près, les sous-groupes finis de  $O_2(\mathbb{R})$ .

**II.1.105** Mines-Télécom MPI 2024

Soit  $(G, \star)$  un groupe. On note  $\text{Aut}(G)$  l'ensemble des automorphismes de  $G$ . Soit  $a \in G$  et

$$\begin{aligned} \phi_a &: G \longrightarrow G \\ x &\longmapsto a \star x \star a^{-1} \end{aligned}$$

1. On considère :

$$\begin{aligned} \phi &: G \longrightarrow \text{Aut}(G) \\ a &\longmapsto \phi_a \end{aligned}$$

Montrer que  $\phi$  est un morphisme de groupes.

2. Montrer que  $\{\phi_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(G)$ .

**II.1.106** CCINP PC 2022

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (n; m) &\longmapsto 2^n(2m + 1) \end{aligned}$$

1. Trouver un antécédent de 56 par  $f$ .
2. L'application  $f$  est-elle injective ?
3. L'application  $f$  est-elle surjective ?
4. L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est-il dénombrable ?

**II.1.107** ENS MPI 2022

On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une structure d'espace euclidien.

Soit  $e = (e_1; \dots; e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ .

On dit qu'un sous-groupe  $L$  de  $(\mathbb{R}^n, +)$  est un *réseau* si :

- $\text{Vect}(L) = \mathbb{R}^n$  ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall R > 0, B(x, R) \cap L$  est fini.

1. Déterminer  $L$  pour  $n = 1$ .
2. On note  $L(e) = \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \mid (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ .  
Montrer que  $L(e)$  est un réseau.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $L(e) = L(e')$ .

**II.1.108** X-ENS

Soit  $p$  un nombre premier,  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{Z})$  et  $\varphi$  le morphisme de *réduction modulo  $p$*  :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{F}_p) \\ & & M \longmapsto M \pmod p \end{array}$$

Quand l'application  $\varphi$  est-elle injective ?

**II.1.109** ENS Ulm MP 2023

Soit  $p$  premier. Montrer que  $n$  divise le cardinal de  $GL_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

**II.1.110** ENS MP 2017

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $G$  s'injecte dans  $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  pour  $p \geq 3$  premier.

**II.1.111** CCINP MP 2019

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un morphisme de corps.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$ . En déduire que  $f$  est croissante.
2. Soit  $(n; x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Montrer que  $f(nx) = nf(x)$ .
3. Soit  $x \in \mathbb{Q}$ . Montrer que  $f(x) = x$ .
4. Montrer que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

**II.1.112** Mines-Télécom MP 2019

Soit  $E$  l'ensemble des matrices

$$M(a; b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $E$  est un anneau.
3. Soit la fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi(a+bi) = M(a; b)$ . Montrer que  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de  $\mathbb{C}$  dans  $E$ .
4. L'application  $\varphi$  est-elle un morphisme d'anneaux ?

**II.1.113** Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe abélien fini d'élément neutre  $e$ .

Le groupe des automorphismes de  $G$  est supposé d'ordre 3.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

est un automorphisme, puis que pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ .

2. Montrer qu'il existe un sous-groupe  $V$  de  $G$  d'ordre 4. Déterminer les automorphismes de  $V$ .
3. Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  soit isomorphe à  $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ , en conclure une absurdité.

**II.1.114** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $\varphi(n)$  le cardinal des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer  $\varphi(p)$  pour  $p$  premier, puis  $\varphi(p^\alpha)$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ .
2. Redémontrer le théorème chinois.
3. En déduire que si  $m, n \in \mathbb{N}^*$  sont tels que  $m \wedge n = 1$ , alors  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .
4. En déduire une expression générale de  $\varphi(n)$ .

**II.1.115** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $I$  un idéal de  $A$ .

1. On définit l'ensemble quotient  $A/I$  avec la relation d'équivalence suivante :

$$\forall (a; b) \in A^2, a \sim b \iff a - b \in I.$$

Montrer que  $A/I$  est un anneau pour certaines lois que l'on précisera.

2. En déduire que si  $a$  est un entier et  $p$  un nombre premier tel que  $p$  ne divise pas  $a$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**II.1.116** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  euclidien muni de son produit scalaire canonique. On définit un arc  $\Gamma$  sur  $E$  par  $x(t) = \cos^3(t)$  et  $y(t) = \sin^3(t)$ .

1. Trouver toutes les isométries de  $E$  qui conservent  $\Gamma$ .
2. Soit  $G = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f(\Gamma) = \Gamma\}$ . Montrer que  $G$  est un groupe pour la loi  $\circ$ . Puis trouver les sous-groupes de  $G$ .

**II.1.117** TPE/EIVP MP 2015

On considère un groupe fini  $(G, \cdot)$  d'élément neutre  $e$  tel que, pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ .

1. Montrer que  $G$  est commutatif.
2. On considère un sous-groupe  $H$  de  $G$ , différent de  $G$ , et  $x$  un élément de  $G$  qui n'est pas dans  $H$ . On note  $K$  le sous-groupe engendré par  $H$  et  $x$ . Montrer que  $\text{Card}(K) = 2\text{Card}(H)$ . En déduire que le cardinal de  $G$  est une puissance de 2.

**II.1.118** ENS MP 2024

Montrer qu'un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$  admet une  $\mathbb{Z}$ -base.

**II.1.119** X MP 2017

Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + n\mathbb{Z})$ . On pose :

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & d^{-\frac{1}{4}} \tan(a) \\ -d^{\frac{1}{4}} \tan(a) & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le lien entre  $T_{a+b}$  et  $T_a \cdot T_b$ .
2. Soit  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 2$ , sans valuation paire dans sa décomposition en facteurs premiers. On note :

$$A_d = \{a + b\sqrt{d} \mid (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

Montrer que  $A_d$  est un corps.

3. On note :

$$\begin{aligned} \sigma : A_d &\longrightarrow A_d \\ a + b\sqrt{d} &\longmapsto a - b\sqrt{d} \end{aligned}$$

Montrer que  $\sigma$  est un automorphisme de corps.

4. Soit  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  vérifiant  $p \wedge q = 1$  et  $q \geq 3$  impair.

Montrer que  $\tan\left(\pi \frac{p}{q}\right)$  ne peut s'écrire sous la forme  $x = r \cdot d^{\frac{1}{4}}$  avec  $d$  entier vérifiant les conditions de la question 2 et  $r \in \mathbb{Q}$ .

**II.1.120** ENS Ulm

Soit  $A$  un anneau tel que tout  $a \in A$  est soit nilpotent, soit idempotent.

1. Montrer que  $a^2 = a$  pour tout  $a \in A$  et que  $A$  est commutatif.
2. Si  $A$  est fini, montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A \cong \mathbb{F}_2^n$  en tant qu'anneau.

**II.1.121** X

1. Soit  $a$  et  $r$  premiers entre eux.

Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^k \equiv 1 \pmod{r}$ .

2. Soit  $a$  et  $r$  deux entiers relatifs avec  $a > r \geq 2$ . Montrer que la progression arithmétique de premier terme  $a$  et de raison  $r$  contient une infinité de termes ayant tous les mêmes diviseurs premiers.

**II.1.122** Mines-ponts MP 2017

Soit  $a$  un nombre impair positif et  $n$  un entier supérieur à 3.

1. Montrer que  $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ .
2. En déduire les entiers  $n$  pour lesquels le groupe des inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$  est cyclique.

**II.1.123** X-ENS

Soit  $G$  un groupe fini et  $f$  un morphisme de  $G$  dans  $G$ . Montrer que :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

**II.1.124** X MP 2017

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre et  $V$  un espace vectoriel. Si  $\tau \in L(\mathcal{A}, V)$ , on dit que  $\tau$  est une *trace* si :

$$\forall (A; B) \in \mathcal{A}^2, \tau(AB) = \tau(BA).$$

On note  $T(\mathcal{A}, V)$  l'ensemble des traces de  $\mathcal{A}$  sur  $V$ .

On note  $[A, B] = AB - BA$  et  $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \text{Vect}(\{[A, B] \mid (A; B) \in \mathcal{A}^2\})$ .

1. On dit que  $A$  est équivalent à  $B$  si  $A - B \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ . Montrer que cette relation est effectivement une relation d'équivalence.
2. On note  $L[\mathcal{A}]$  l'ensemble des classes d'équivalence et on considère l'application  $T$  de  $\mathcal{A}$  dans  $L[\mathcal{A}]$  qui à un élément associe sa classe d'équivalence. Montrer que  $L[\mathcal{A}]$  est un espace vectoriel et que  $T$  est sa trace.
3. Soit  $\tau \in T(\mathcal{A}, V)$ . Montrer qu'il existe un unique  $\bar{\tau} \in L(L[\mathcal{A}], V)$  tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \tau(A) = \bar{\tau}(T(A)).$$

4. Montrer que  $T(\mathcal{A}, V) \cong L(L([\mathcal{A}], V))$ .

**II.1.125** X 2022

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif. On dit que  $a \in A$  est un *diviseur de zéro* lorsqu'il existe  $b \in A \setminus \{0\}$  tel que  $ab = 0$ .

1. Montrer que si  $A$  est fini et sans diviseur de zéro, alors  $A$  est un corps.
2. Soit  $f \in A[X] \setminus \{0\}$ . Montrer que si  $f$  est un diviseur de zéro, alors il existe  $a \in A \setminus \{0\}$  tel que  $af = 0$ .

**II.1.126** Centrale-Supélec MP

1. Rappeler la définition de  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler et calculer  $\varphi(1176)$ .
2. Soit  $p_1, \dots, p_r$  des nombres premiers distincts. Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  un multiple de  $p_1 p_2 \cdots p_r$ . Calculer le cardinal de l'ensemble

$$E(q; p_1; \dots; p_r) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq q \text{ et } k \wedge p_1 p_2 \cdots p_r = 1\}.$$

3. En déduire une propriété connue de la fonction indicatrice d'Euler.

**II.1.127** ENS MP 2018

Soit  $f$  un morphisme de groupe de  $\mathbb{U}$  muni du produit usuel, dans lui-même.

1. Supposons  $f$  injectif. Montrer que  $f$  est l'identité ou l'application  $z \mapsto z^{-1}$ .
2. Dans le cas général, montrer que  $f$  est de la forme  $z \mapsto z^n$ , où  $n$  est fixé dans  $\mathbb{Z}$ .

**II.1.128** ENS MP 2024

On note  $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de taille  $2 \times 2$  à coefficients entiers et de déterminant 1. On définit :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$  est un groupe.
2. Montrer que  $S$  et  $T$  engendrent  $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ .
3. On admet que  $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$  est dans  $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ . Déterminer sa décomposition avec les matrices  $S$  et  $T$ .

**II.1.129** Centrale-Supélec MP 2022

1. Soit  $M \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $M \in GL_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $|\det(M)| = 1$ .
2. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^d = I_n$ . On pose  $A = \frac{M - I_n}{3}$ .  
Étudier la convergence de la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer qu'il existe une constante  $K_n$  qui majore le cardinal de tous les sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

**II.1.130** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $p$  un premier impair.

1. Montrer que le nombre de carrés dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est  $\frac{p+1}{2}$ .
2. Montrer que  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  si et seulement si  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .
3. Montrer que tout élément de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est somme de deux carrés.

**II.1.131** ENS MP 2015

Déterminer les entiers  $n$  vérifiant  $n^2 \mid 2^n + 1$ .

**II.1.132** Centrale-Supélec MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

Pour  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , on pose  $\mathcal{F}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)X^k$  et  $\hat{\mathcal{F}}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})X^k$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  et  $\hat{\mathcal{F}}$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ .
2. Calculer  $\mathcal{F} \circ \hat{\mathcal{F}}$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  induit un automorphisme sur  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ . Exprimer sa réciproque.
3. Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$ . On suppose que :
  - (a)  $\forall z \in \mathbb{U}_n, |P(z)| \leq 1$ ;
  - (b)  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{U}_n$ .

Montrer que  $X^n - 1$  divise  $P$ .

On admet que si  $A, P \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $A \neq 0$  et  $A$  de coefficient dominant 1 ou  $-1$ , le reste  $R$  dans la division euclidienne de  $P$  par  $A$  est aussi dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

**II.1.133** TPE/EIVP MP 2013

Montrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad a \equiv b \pmod{n} \implies a^n \equiv b^n \pmod{n^2}.$$

**II.1.134** Mines-Ponts MP 2019

On considère comme loi la multiplication matricielle. Décrire  $G$ , inclus dans  $M_n(\mathbb{R})$ , tel que  $G$  soit un groupe.

**II.1.135** ENS MP 2015

1. Soit  $G$  un groupe fini. Soit  $f$  un automorphisme involutif dont le seul point fixe est  $e$ . Montrer que  $G$  est abélien.
2. Soit  $G$  un groupe abélien fini. Tous les automorphismes involutifs ont-ils seulement  $e$  comme point fixe ?
3. Soit  $G$  un groupe fini et  $a \in G$ . On suppose que  $a$  est d'ordre 2, et tel que pour tout  $x \neq e$  et  $x \neq a$ ,  $ax \neq xa$ . Que peut-on dire ?

**II.1.136** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}^*$ , deux à deux premiers entre eux.

1. On pose, pour  $1 \leq k \leq r$ ,  $c_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r a_i$ .

Montrer que les  $c_k$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2. Soit  $b \in \mathbb{Z}$ .

Montrer qu'il existe un unique  $(y; x_1; \dots; x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ , avec  $0 \leq x_k < a_k$  pour tout  $k$ , tel que :

$$\frac{b}{a_1 \cdots a_r} = y + \sum_{k=1}^r \frac{x_k}{a_k}.$$

**II.1.137** X MP 2018

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $d(k)$  le nombre de diviseurs positifs de  $k$ . Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n d(k) = n \ln(n) + n(2\gamma - 1) + O(\sqrt{n}),$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

**II.1.138** ENS Lyon MP 2022

Soit  $p$  un nombre premier. On note pour tout  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $|q|_p = p^{-v_p(q)}$ .

1. Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}$  :

$$\begin{cases} |xy|_p = |x|_p |y|_p \\ |x + y|_p \leq \max(|x|_p; |y|_p) \end{cases}$$

Que peut-on dire si  $|x|_p \neq |y|_p$  ?

On note  $\mathbb{Q}_p$  le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la distance associée à  $|\cdot|_p$ .

2. Montrer que  $\mathbb{Q}_p$  est un corps.
3. Montrer que pour toute suite de Cauchy  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{Q}_p$ , la suite  $(|u_n|_p)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.
4. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{Q}_p$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

5. Montrer que  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas isomorphes en tant que corps.

**II.1.139** X MP 2021

Soit  $p$  un nombre premier et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer les carrés de l'anneau  $\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$ .

**II.1.140** X MP 2021

À quelle condition une permutation de  $\{1; \dots; n\}$  est-elle un carré ?

**II.1.141** X MP 2021

Soit  $G$  un groupe d'ordre 8 non cyclique.

1. Montrer que  $G$  admet un élément d'ordre 2 et que tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4.
2. On suppose que tous les éléments sont d'ordre au plus 2. Que dire de  $G$  ?  
On suppose désormais qu'il existe un élément  $a$  d'ordre 4. On note  $H$  le sous-groupe engendré par  $a$ .
3. Montrer que  $xHx^{-1} = H$  pour tout  $x \in G$ .
4. Soit  $b \in G \setminus H$ . Montrer que  $bab^{-1}$  vaut  $a$  ou  $a^3$ .
5. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, au plus cinq groupes d'ordre 8.
6. Exhiber cinq groupes d'ordre 8 deux à deux non isomorphes.

**II.1.142** ENS MP 2022

On note  $A = \mathbb{C}[X, Y]$ . Pour tout  $v \subset \mathbb{C}^2$ , on pose :

$$I(v) = \{P \in A \mid \forall (x; y) \in v, P(x; y) = 0\}.$$

1. Soit  $v \subset \mathbb{C}^2$ . Montrer que  $I(v)$  est un idéal de  $A$ .
2. On pose  $P(X; Y) = Y - X^2$ , et on note :

$$v(P) = \{(x; y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x; y) = 0\}.$$

Montrer que  $A/I(v(P))$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[X]$ .

**II.1.143** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{Q}[X]$  irréductible de degré supérieur ou égal à 2 tel que  $P(a) = 0$ .

1. (a) Montrer que  $\{Q(a) \mid Q \in \mathbb{Q}[X]\}$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie.  
(b) Que peut-on dire de sa dimension ?
2. Montrer que c'est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

**II.1.144** ENS Ulm MP 2019

Soit  $n \geq 1$  un entier naturel et  $S_n$  le groupe des permutations de  $\{1; \dots; n\}$ . On définit :

$$g(n) = \max_{\sigma \in S_n} \left( \min \left( \{k \geq 1 \mid \sigma^k = \text{Id}\} \right) \right).$$

Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que  $g(n)$  est impair.

**II.1.145** X MP 2023

Pour  $\sigma \in S_n$ , on note  $z(\sigma)$  l'ensemble des éléments de  $S_n$  commutant avec  $\sigma$ .

1. Montrer que  $z(\sigma)$  est un groupe, puis que pour tout automorphisme  $\phi$  de  $S_n$ ,  $z(\phi(\sigma)) = \phi(z(\sigma))$ .
2. Déterminer le cardinal de ce groupe pour une transposition et pour une composition de transpositions à supports disjoints.
3. Montrer que si  $n \neq 6$ , alors pour toute transposition  $\sigma$  et pour tout automorphisme  $\phi$  de  $S_n$ ,  $\phi(\sigma)$  est une transposition.

**II.1.146** ENS MP 2018

On considère un anneau commutatif  $A$ . On suppose que  $A$  possède  $n$  diviseurs de zéro, avec  $n > 1$ .

1. Montrer que  $A$  a au plus  $(n + 1)^2$  éléments.
2. Trouver une infinité d'anneaux du même type que  $A$ , et qui ont exactement  $(n + 1)^2$  éléments.

**II.1.147** ENS MP 2018

Classifier les sous-groupes de  $\mathbb{U}$ .

**II.1.148** ENS MP 2017

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Exprimer la permutation qui à  $k$  associe  $n + 1 - k$  à l'aide de transpositions de la forme  $(i \ i + 1)$ .

**II.1.149** X MP 2018

Soit  $d \in \mathbb{Z}$  et  $(*)$  l'équation  $x^2 - dy^2 = 1$  dont on cherche les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

1. (a) On suppose  $d \leq 0$ . Résoudre  $(*)$ .  
 (b) On suppose  $\sqrt{d} \in \mathbb{N}$ . Résoudre  $(*)$ .  
 On suppose dans la suite  $d > 0$  et  $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ .
2. (a) Soit  $(x_0; y_0)$  une solution de  $(*)$  telle que  $y_0 \neq 0$ . On pose  $z = x_0 + y_0\sqrt{d}$ .  
 i. Montrer que  $|z| \neq 1$ .  
 ii. Montrer que l'on peut construire une suite  $(x_n; y_n)$  de couples d'entiers telle que pour tout entier naturel  $n$  on ait  $z^{n+1} = x_n + y_n\sqrt{d}$ .  
 (b) En déduire que l'équation  $(*)$  admet une infinité de solutions.
3. On admet le résultat suivant :  
 Pour tout  $\alpha$  réel irrationnel, il existe une infinité de rationnels  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux, tels que  $0 < |\alpha - r| < \frac{1}{q^2}$ .  
 Montrer qu'il existe une solution  $(x_0; y_0)$  de l'équation  $(*)$  telle que  $y_0 \neq 0$ .

**II.1.150** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$  telles que pour tout entier  $k$  avec  $0 \leq k \leq 4$ , la matrice  $A + kB$  soit inversible à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer qu'il en est de même pour la matrice  $A + 5B$ .

**II.1.151** ENS MP 2013

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , avec  $p \geq 3$  premier, et  $v$  un entier avec  $0 < v < p - 1$ .

1. Montrer qu'il existe  $y \in \mathbb{K}$  tel que  $y^v \neq 1$ .
2. Calculer, pour  $u \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{x \in \mathbb{K}} x^u$ .

**II.1.152** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ , scindés dans  $\mathbb{C}[X]$ , que l'on pourra écrire :

$$P = a \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad Q = b \prod_{k=1}^s (X - \beta_k),$$

où les  $\alpha_k$  sont deux à deux distincts et les  $\beta_k$  sont deux à deux distincts.

On pose  $x = \alpha_1$  et  $y = \beta_1$ , et pour tout  $t \in \mathbb{Q}$ ,  $z_t = x + ty$  et  $R_t = P(z_t - tX)$ .

1. Justifier qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{Q}$  tel que  $R_{t_0}(y) = 0$  et pour tout  $j \geq 2$ ,  $R_{t_0}(\beta_j) \neq 0$ .  
 On pose  $\mathbb{Q}[z_{t_0}] = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\{z_{t_0}^m \mid m \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{C}$ . On admet que  $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que  $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$  est un corps.
3. Montrer que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$ .

**II.1.153** X MP 2020

On considère un corps quelconque  $\mathbb{K}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ .

1. Soit  $A$  l'ensemble des combinaisons linéaires dans  $\mathbb{K}$  des matrices  $I_2$  et  $J$ . Que dire de la structure algébrique de  $A$  ?
2. Soit  $B$  l'ensemble des matrices de  $M_2(\mathbb{K})$  qui commutent avec tout élément de  $A$ . Que dire de  $B$  ?

Dorénavant, on cherche à résoudre l'équation  $X^n = J$  dans  $M_2(\mathbb{K})$  en distinguant selon si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

3. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
  - (a) Déterminer un isomorphisme d'anneaux entre  $A$  et un autre ensemble classique. En déduire la résolution de l'équation  $X^n = J$  et son nombre de solutions.
  - (b) En fait, quelle est la structure algébrique de  $A$  ici ?
4. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
  - (a) L'ensemble  $A$  garde-t-il la même structure algébrique ?
  - (b) En s'inspirant de la méthode de 3(a), résoudre de nouveau l'équation  $X^n = J$  et dénombrer l'ensemble des solutions.

**II.1.154** Centrale MP

Soit  $p$  premier avec  $p \equiv 3 \pmod{4}$  et  $C = \{y = a^2 \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ .  
Pour tout  $x \in C$ , posons :

$$\pi_x = \prod_{\substack{y \in C \\ y \neq x}} (x + y).$$

Montrer que  $\pi_x = 1$ .

**II.1.155** Mines-Ponts MNP 2022

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note, pour tout  $X \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\Lambda(X)$  le plus grand commun diviseur des coefficients de  $X$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

- i)  $\det(A) = \pm 1$
- ii)  $\forall X \in \mathbb{Z}^n, \Lambda(X) = \Lambda(AX)$

**II.1.156** X MP 2016

1. Soit  $G$  un groupe non abélien de cardinal 8. Montrer qu'il est engendré par 2 éléments dont l'un, au moins, est d'ordre 4.
2. Déterminer des relations pertinentes entre les éléments de  $G$  dans le but de dresser sa table de loi.
3. Étude d'un exemple : caractériser le sous-groupe multiplicatif de  $GL_2(\mathbb{C})$  engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.1.157** ENS MP 2015

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $H$  un sous-groupe propre de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ . Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont congrus à aucun élément de  $H$  modulo  $q$ .

**II.1.158** Centrale MP

Soit  $u = 2 + \sqrt{3}$  et  $v = 2 - \sqrt{3}$ .

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$  et  $M_n = 2^n - 1$  (*nombre de Mersenne*).

Montrer que si  $M_n$  divise  $s_{n-2}$ , alors  $M_n$  est premier.

**II.1.159** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers unitaire de degré  $n$ .

On note  $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ , pour certains  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ .

Montrer que pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X - \lambda_1^q) \cdots (X - \lambda_n^q)$  est lui aussi unitaire à coefficients entiers.

## 2 Algèbre linéaire

### II.2.1 X-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  des nombres complexes tels que  $a_i + b_j \neq 0$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ . Calculer :

$$\det \left( \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right).$$

### II.2.2 Mines-Ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = M + M^T$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. L'application  $f$  est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .

### II.2.3 X PC 2012

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) Les matrices  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune.
- ii) Il existe  $M \in M_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AM = MB$ .

### II.2.4 X

Calculer :

$$\det \left( \left( \text{pgcd}(i, j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right).$$

### II.2.5 Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \geq 2$  un entier.

Résoudre dans  $M_n(\mathbb{R})$  l'équation  $A = \text{com}(A)$ , où  $\text{com}(A)$  est la matrice des cofacteurs de  $A$ .

### II.2.6 Mines-Ponts MP

Soit  $A, B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = A$ . Montrer que la matrice  $A$  est nilpotente.

### II.2.7 ENS 2024

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $M \in M_n(\mathbb{Z})$  telle que  $M^k = A$ . Que dire de la matrice  $A$  ?

### II.2.8 Mines-Ponts PC 2023

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X, Y$  deux vecteurs de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ . On pose  $M = XY^T$ . Étudier la diagonalisabilité de  $M$ .

**II.2.9** X-ENS

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  formé uniquement de matrices diagonalisables ?

**II.2.10** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det(A)$  et  $\det(B)$  sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices  $U$  et  $V$  dans  $M_n(\mathbb{Z})$  telles que  $AU + BV = I_n$ .

**II.2.11** X

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Résoudre l'équation  $X + X^T = \text{Tr}(X)A$ , d'inconnue  $X$ .

**II.2.12** Mines-Ponts PC 2024

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A, B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ . L'égalité  $(AB)^2 = 0$  implique-t-elle  $(BA)^2 = 0$  ?

**II.2.13** ENS PC

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. On suppose que

$$\text{Tr}(A) = 3, \text{Tr}(A^2) = 5, \text{Tr}(A^3) = 9.$$

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices  $M$  appartenant  $M_3(\mathbb{R})$ , symétriques et telles que  $\text{Tr}(AM) = 1$  et  $\text{Tr}(A^2M) = 3$ . Déterminer  $\min \{\text{Tr}(M^2) \mid M \in \mathcal{E}\}$ .

**II.2.14** Mines/Centrale

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit  $p, q, r$  trois projecteurs de  $V$  tels que  $p = \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ . Montrer que  $p = q = r = 0$ .

**II.2.15** Mines-Ponts

Montrer que la famille  $\{|x - a| \mid a \in \mathbb{R}\}$  est libre dans  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**II.2.16** Mines 2014

Soit  $A$  une matrice carrée réelle. On suppose que la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $B$ . Montrer que la matrice  $B$  est diagonalisable et de spectre inclus dans  $\{0; 1\}$ .

**II.2.17** Mines-Ponts MP/PC 2023

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice orthogonale de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}.$$

**II.2.18** Mines-Ponts MP 2008

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le déterminant de taille  $n$  :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2 \cos(\theta) & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

**II.2.19** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose  $A$  inversible.  
Montrer que  $AB$  et  $BA$  sont semblables.
2. Que dire si  $A$  n'est pas inversible ?

**II.2.20** ENS PC 2023

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Si  $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$ , montrer qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $A + tB \in GL_n(\mathbb{C})$ .
2. Si les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $M_n(\mathbb{C})$ , montrer qu'elles sont semblables dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.21** Mines-Ponts MP

Trouver toutes les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$  pour tout  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.22** Mines-Ponts PC

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B, N \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose que  $A$  et  $B$  commutent. Factoriser  $A^n - B^n$ .
2. On suppose  $N$  nilpotente. Montrer que la matrice  $I_n - N$  est inversible.
3. On suppose  $N$  nilpotente et  $AN = NA$ . Montrer que  $A - N$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible.

**II.2.23** Mines

Soit  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice  $BA$  est diagonalisable.

**II.2.24** Mines-Ponts MP

Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  possédant une unique valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $|\lambda| < 1$
- ii) La suite  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle.
- iii) La série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} M^k$  converge.

**II.2.25** CCP MP

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .
2. Montrer que  $X^3 - X - 1$  admet une seule racine réelle et strictement positive.
3. En déduire que  $\det(A) > 0$ .

**II.2.26** Mines-Télécom MP

Soit  $p$  un nombre premier.

On note  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}_2[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$ .

1. Calculer  $\text{Card}(\mathbb{K}_2[X])$ .
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}_2[X]$  non scindés.
3. En déduire qu'il existe des matrices de  $M_2(\mathbb{K})$  non trigonalisables.

**II.2.27** Mines-Ponts PC

Calculer, en fonction de  $n$ , le nombre de matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui sont orthogonales et à coefficients entiers.

**II.2.28** CCP MP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A + I_n = 0$ .

Montrer que  $n$  est pair.

**II.2.29** CCP PSI 2005

Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}.$$

**II.2.30** Mines-Télécom 2019

Déterminer le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  de deux manières différentes.

**II.2.31** X MP

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ . On pose  $r = p + q - pq$ . Montrer que  $r$  est un projecteur. Trouver son image et son noyau.

**II.2.32** Mines

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

**II.2.33** X PC/MP PSI 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique. Montrer que  $\text{Tr}(A)^2 \leq \text{rang}(A)\text{Tr}(A^2)$ .

**II.2.34** CCINP MP 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1.

1. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f^2 = \lambda f$ .
2. A-t-on  $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$ ?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - i) Il existe  $c \in \mathbb{R}^*$  tel que  $cf$  est un projecteur.
  - ii)  $f \circ f \neq 0$
  - iii)  $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$

**II.2.35** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre l'équation matricielle dans  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} M^5 = M^2 \\ \text{Tr}(M) = n \end{cases}$$

**II.2.36** Mines-Ponts PSI 2015

Soit  $M \in M_2(\mathbb{Z})$  telle que  $M^n = I_2$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $M^{12} = I_2$ .

**II.2.37** CCP MP 2021

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$  avec  $\text{Tr}(A) \neq 0$ .

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$ .
2. Caractériser  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
3. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**II.2.38** X-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.39** Mines-Ponts PSI 2019

On munit  $M_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique. Soit  $V$  le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  formé des matrices de trace nulle. Soit  $J$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de  $J$  à  $V$ .

**II.2.40** Mines-Ponts PSI

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $V$ . Prouver que :

$$\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f)).$$

**II.2.41** X PC 2016

Soit  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $1 \leq n < p$ ,  $\mathbb{K}$  un corps et  $A \in M_{p \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ . Que dire de  $\det(AB)$  ?

**II.2.42** Mines-Ponts

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont les mêmes valeurs propres.

**II.2.43** CCINP MP

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel euclidien et  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base ordonnée de  $E$ . Soit encore  $f$  l'application définie, pour tout  $x \in E$ , par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , que  $f$  est symétrique, bijective et que  $f$  admet des valeurs propres toutes strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme de  $E$  tel que  $g^2 = f^{-1}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{B} = (g(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ .

**II.2.44** X PC 2020

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $x, y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Montrer que

$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2} \max(\|x\|, \|y\|) \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

**II.2.45** X-ENS

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{Tr}(A^k) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que la matrice  $A$  est nilpotente.

**II.2.46** CCINP MP

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 3$ . Soit  $a$  et  $b$  deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de  $E$ . Soit encore  $u$  l'application définie, pour tout  $x \in E$ , par :

$$u(x) = \langle x, a \rangle b + \langle x, b \rangle a.$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(u)$ .
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ .
4. Déterminer les extrema de  $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \frac{\langle x, a \rangle \cdot \langle x, b \rangle}{\|x\|^2}$ .

**II.2.47** Mines-Ponts MP

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  non constante telle que, pour tout  $(A; B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ ,  $f(AB) = f(A)f(B)$ . Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $f(A) = 0$
- ii)  $A \notin GL_n(\mathbb{K})$

**II.2.48** X-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{K}$  un corps. Montrer que tout hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$  rencontre  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**II.2.49** Mines-Ponts PC 2023

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $H \in M_n(\mathbb{R})$  la matrice ayant tous ses coefficients égaux à 1.

Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\det(A + tH) \det(A - tH) \leq \det(A^2)$ .

**II.2.50** Centrale PC 2010

Soit  $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$  une base ordonnée de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ , où  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ .

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les composantes de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  pour que le  $n$ -uplet  $(e_1 + u; \dots; e_n + u)$  soit une base de  $\mathbb{R}^n$ .

**II.2.51** X PC 2015

Soit  $f$  un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$ .

On suppose que pour tout  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $f(AB) = f(A)f(B)$ .

Montrer que  $f$  est soit injectif, soit nul.

**II.2.52** X PC 2020

Soit  $G$  un sous-ensemble fini de  $GL_n(\mathbb{R})$ , non vide et stable par produit.

1. Montrer que  $I_n \in G$ . Soit  $A \in G$ . Montrer que  $A^{-1} \in G$ .
2. On pose  $P = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{A \in G} A$ .
  - (a) Soit  $A \in G$ . Montrer que  $AP = PA$  et que  $P$  est un projecteur.
  - (b) Déterminer les ensembles  $G$  tels que  $P = I_n$ .

**II.2.53** Centrale 2018

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est dite à *diagonale strictement dominante* lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Montrer que si  $A$  est à diagonale strictement dominante, alors  $A$  est inversible.

**II.2.54** X PC 2020

Soit  $p, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $p \leq n$  et  $\mathbb{K}$  un corps. Soit encore  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{p \times n}(\mathbb{K})$ . On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $D$ .
2. Calculer  $BA$ .

**II.2.55** Mines-Ponts MP/PSI

Quel est le nombre minimal de coefficients à modifier sur une matrice inversible pour la rendre non inversible ?

**II.2.56** Mines-Ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P$  un polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$  diagonalisable. Montrer qu'il existe  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $P(M) = A$ .

**II.2.57** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $A^p = 0$ .

1. Montrer que  $A^n = 0$ .
2. Calculer  $\det(A + I_n)$ .
3. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AM = MA$ .  
Calculer  $\det(A + M)$ .  
On pourra commencer par le cas où  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ .
4. Le résultat est-il toujours valable si  $A$  et  $M$  ne commutent pas ?

**II.2.58** ENS

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que  $u$  admet un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables. Combien y en a-t-il ? Décrire ces sous-espaces.

**II.2.59** X

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'ordre  $n$ . Montrer que  $u$  admet exactement  $n + 1$  sous-espaces vectoriels stables, et que ce sont les  $\text{Ker}(u^k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

**II.2.60** Mines-Ponts

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ . On suppose que le rang de  $u$  est fini. Montrer que le rang de  $u$  est pair.

**II.2.61** X-ENS

Déterminer l'espace tangent à  $O_n(\mathbb{R})$  en la matrice identité.

**II.2.62** CCINP

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  diagonalisable telle que  $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ .

Soit  $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\alpha + \beta = \gamma$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  non nuls.

1. Montrer que  $\chi_B = \chi_{\gamma A} \cdot \chi_{-\beta A}$ .
2. Démontrer que  $\dim(\text{Ker}(B)) = 2 \dim(\text{Ker}(A))$ .
3. Justifier que pour  $\alpha = -1, \beta = 3$ , la matrice  $B$  est diagonalisable, puis la diagonaliser.

**II.2.63** Mines/Centrale

Soit  $\Phi$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  défini, pour tout  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , par  $\Phi(A) = A^T$ . Déterminer  $\det(\Phi)$  et  $\text{Tr}(\Phi)$ .

**II.2.64** ENS PC 2024

Résoudre dans  $M_2(\mathbb{R})$  :

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**II.2.65** Centrale

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $g$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1 et  $f \in GL(E)$ . Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $f + g \in GL(E)$
- ii)  $\text{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$

**II.2.66** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R}), B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $p + \text{rang}(I_n + AB) = n + \text{rang}(I_p + BA)$ .

**II.2.67** Mines-Ponts 2019

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D : E \rightarrow E$  défini par  $D(f) = f'$ .

Existe-t-il un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  tel que  $\varphi^2 = D$  ?

**II.2.68** Mines-Ponts PC 2015

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on pose :

$$\Phi(M) = \alpha M + \beta M^T.$$

1. Montrer que  $\Phi$  induit un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .
2. Calculer le déterminant de  $\Phi$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  appartienne à  $GL(M_n(\mathbb{R}))$ .
3. Déterminer sous réserve de sens  $\Phi^{-1}$ .

**II.2.69** X MP

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f, g$  deux applications linéaires de  $E$  vers  $F$ . Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $\text{rang}(g) \leq \text{rang}(f)$
- ii) Il existe un automorphisme  $h$  de  $F$  et un endomorphisme  $k$  de  $E$  vérifiant l'égalité  $h \circ g = f \circ k$ .

**II.2.70** X PC 2013

Montrer que toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est somme de deux matrices diagonalisables.

**II.2.71** X PC

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n} \in M_{2n}(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que le déterminant de  $A$  est égal au déterminant de la matrice  $(a_{ij} + \lambda)_{1 \leq i, j \leq 2n}$ .

**II.2.72** Mines-Ponts

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit  $u, v$  deux endomorphismes diagonalisables tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Démontrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices  $u$  et  $v$  sont simultanément diagonales.
2. Plus généralement, soit  $u_1, \dots, u_m$  une famille d'endomorphismes diagonalisables de  $E$  commutant deux à deux,  $m \geq 1$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  diagonalisant tous les  $u_i$ .

**II.2.73** Mines-Ponts PC 2015

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 = -\text{Id}_E$ .

1. Montrer que  $n$  est pair.
2. Montrer que  $u$  ne laisse stable aucun hyperplan de  $E$ .

**II.2.74** Mines

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$ .

Montrer que  $n$  est pair et que  $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z}_-$ .

**II.2.75** X-ENS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K}$  un corps et  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable.

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres de  $A$  et  $n_1, \dots, n_r$  leur multiplicité.

1. Calculer la dimension de  $\mathbb{K}[A]$  et celle du commutant de  $A$  noté  $C(A)$ .
2. Montrer que  $\dim(C(A)) = n$  si et seulement si  $r = n$  si et seulement si  $C(A) = \mathbb{K}[A]$ .

**II.2.76** X-ENS

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que l'algèbre des endomorphismes de  $E$  est simple.

**II.2.77** CCINP PSI 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A(A^T A)^2 = I_n$ .

1. Montrer que  $A$  est inversible.
2. Montrer que  $A$  est symétrique.
3. Montrer que  $A = I_n$ .

**II.2.78** Mines-Télécom MP

1. Soit  $A \in M_2(\mathbb{C})$  non diagonalisable. Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $N \in M_2(\mathbb{C})$  non nulle, nilpotente et vérifiant  $A = \alpha I_2 + N$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre l'équation  $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.79** X PSI

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $u(e_i) = e_{i+1}$  si  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  et  $u(e_n) = 0$ .

Trouver les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  stables par  $u$ .

**II.2.80** Mines-Ponts PSI 2018

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(t_0; t_1; \dots; t_n)$  un  $(n+1)$ -uplet de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que  $(P(X+t_0); P(X+t_1); \dots; P(X+t_n))$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**II.2.81** Mines-Ponts

Soit un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Soit  $n+1$  nombres réels distincts  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(P(\alpha_0X); P(\alpha_1X); \dots; P(\alpha_nX))$  soit une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**II.2.82** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $M_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $A$  et  $B$  appartenant à  $M_n(\mathbb{C})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$  converge vers une matrice que l'on notera  $e^A$ .
2. Montrer que  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ .

**II.2.83** X ESPCI 2024

Montrer que l'espace vectoriel

$$\left\{ f \in D^1(]0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid \forall x > 0, f(x) = xf' \left( \frac{x}{2} \right) \right\}$$

est de dimension infinie.

**II.2.84** Mines-Ponts PSI 2023

Soit  $\theta \in ]0; \pi[$ . On note  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel réel. Donner une base.
2. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour quelles valeurs de  $\theta$  existe-t-il une suite non nulle de  $E$  telle que  $u_0 = u_{p+1} = 0$  ?
3. Soit  $A \in M_p(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $(i; j) \in \{1; \dots; p\}^2$ ,  $a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$ . Déterminer les éléments propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.85** ENS PC 2019

Résoudre dans  $M_n(\mathbb{R})$  l'équation  $e^M = -I_n$ .

**II.2.86** x

1. Soit  $a_1, \dots, a_p$  des réels distincts deux à deux et  $c_1, \dots, c_p$  des réels non tous nuls. On pose  $f(t) = c_1 e^{a_1 t} + \dots + c_p e^{a_p t}$ . Montrer que  $f$  admet au plus  $p - 1$  zéros.
2. Soit  $a_1 < \dots < a_p$  et  $b_1 < \dots < b_p$  des réels. On pose  $M = (e^{a_i b_j})_{1 \leq i, j \leq p}$ . Montrer que  $\det(M) > 0$ .

**II.2.87** X-ENS

Pour tout  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on définit la suite  $(A_k)_{k \geq 0}$  en posant  $A_0 = A$  et pour tout  $k \geq 1$  :

$$A_k = A \left( A_{k-1} - \frac{1}{k} \text{Tr}(A_{k-1}) I_n \right).$$

Montrer que  $A_n = 0$ .

**II.2.88** Centrale MP 2007

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux annule la matrice  $A$ .
2. En déduire que si  $\text{Tr}(A) \neq 0$ , alors  $A$  est diagonalisable. Que dire si  $\text{Tr}(A) = 0$  ?
3. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$  est diagonalisable et trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

**II.2.89** x

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension supérieure ou égale à 1, et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer l'existence d'un unique couple  $(d; n)$  d'endomorphismes de  $E$  tel que :

- $u = d + n$ ,
- $d$  et  $n$  commutent,
- $d$  est diagonalisable et  $n$  est nilpotent.

Vérifier en outre que  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ .

**II.2.90** ENS Ulm MP

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice stochastique. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  de module 1 et  $X = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé.

1. Si  $x_i$  est une composante de  $X$  de module maximal, montrer que  $\lambda x_i$  est encore une composante de  $X$  de module maximal.
2. En déduire que  $\lambda$  est une racine  $m^{\text{ème}}$  de l'unité avec  $m \leq n$ .
3. On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $a_{ii} \neq 0$ . Montrer que la seule valeur propre de  $A$  de module 1 est 1.

**II.2.91** Mines-Ponts PSI

Soit la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  la matrice  $A$  est-elle inversible ?

**II.2.92** X MP 2022

Soit  $\Phi$  l'endomorphisme « moyenne de Cesàro » de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  défini par :

$$\Phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left( \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Déterminer le spectre, les sous-espaces propres et l'expression des vecteurs propres de l'endomorphisme  $\Phi$ .

**II.2.93** X MP 2006

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On pose  $\text{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ .

Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si  $0 \in \overline{\text{sim}(A)}$ .

**II.2.94** Mines

Soit  $n \geq 2$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On pose  $P_A(X) = \det(XI_n - A)$  et on note :

$$P_A(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(A) X^{n-k}.$$

1. Rappeler l'expression de  $\chi_A$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et  $\det(A)$ .
2. Que valent  $c_0(A)$  et  $c_1(A)$  ?
3. Montrer que  $c_2(A) = \frac{\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)}{2}$ .

**II.2.95** Mines-Ponts*Cas particulier :*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  appartenant à  $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ .

Soit encore  $M = AB^T + BA^T$ .

1. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de  $M$ .
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 et montrer qu'il est orthogonal à  $\text{Vect}(\{A; B\})$ . (L'espace est muni du produit scalaire canonique.)

*Cas général :*

Soit  $A$  et  $B$  appartenant à  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  linéairement indépendants.

1. Montrer que  $M = AB^T + BA^T$  est diagonalisable.
2. Montrer que 0 est une valeur propre de  $M$  et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Donner une condition (suffisante) pour que  $A + B$  soit un vecteur propre de  $M$ .

**II.2.96** ENS MP 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On pose  $\text{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{sim}(A)$  est fermée.

**II.2.97** CCP MP

1. Soit  $P(X) = X^n - X + 1$ . Montrer que le polynôme  $P$  admet  $n$  racines complexes distinctes  $z_1, \dots, z_n$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $\det(A) = 2 \cdot (-1)^n$ .

**II.2.98** Mines-Ponts MP

Soit  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; n\}}$  une famille libre dans un espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On suppose que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

1. Montrer que pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $\|e_i\| \leq 1$ .
2. Montrer que pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $\|e_i\| \geq 1$ .
3. En déduire que  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; n\}}$  est une base orthonormée de  $E$ .

**II.2.99** Centrale PC 2024

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on définit  $G : E \rightarrow E$  par :

$$G(f)(x) = \int_0^1 \min(x; t) f(t) dt.$$

1. Montrer que  $G$  est bien défini et est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $G$ .
3. Déterminer les éléments propres de  $G$ .

**II.2.100** CCP MP

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
 Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\langle f(x), x \rangle > 0$ .
2. Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ . On considère :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

- (a) Montrer que les dérivées partielles de  $g$  existent, et les calculer.
- (b) Montrer que  $g$  admet un unique point critique  $z$ .
- (c) Montrer que  $g$  admet un minimum en  $z$ .

**II.2.101** Mines-Ponts PC 2016

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que

$$\forall (x; y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = k\|x\|$ .

**II.2.102** Centrale MP 2019

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $E = M_n(\mathbb{C})$ .

1. Soit  $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Calculer  $\text{com}(\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ un}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-r \text{ zéro}}))$ .
2. Montrer que pour tout  $(A; B) \in E^2$ ,  $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$ .
3. En déduire  $\text{rang}(\text{com}(A))$  en fonction de  $\text{rang}(A)$ .
4. Soit  $\varphi : E \rightarrow E$ ,  $A \mapsto \text{rang}(A)$ .  
 L'application  $\varphi$  est-elle injective ? surjective ? Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$ .

**II.2.103** CCINP PC 2021

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer la norme de  $P_n = \sqrt{n}(1 - X)^n$ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $T \in \mathbb{R}[X]$  tel que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\langle T, P \rangle = P(0)$ .

**II.2.104** CCP MP

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 3$  et  $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer le rang de  $M_a$ . Donner une valeur propre évidente de  $M_a$  et sa multiplicité.
2. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

Exprimer  $\sum_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2$  en fonction de  $M$ .

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $M_a$  soit diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.105** X-ENS

1. Soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ . Calculer  $\det((x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n})$ .
2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) telle que  $\text{Tr}(A^k) = 0$  pour  $k = 1, \dots, n$ . Montrer que  $A$  est nilpotente.

**II.2.106** CCINP MP 2023

Soit  $n \geq 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Diagonaliser la matrice  $A$ .
2. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .

**II.2.107** Mines-Télécom PSI 2022

Soit  $n \geq 2$  et  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Diagonaliser la matrice  $A$ .
2. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .

**II.2.108** x

Trouver une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites complexes périodiques.

**II.2.109** x MP

Soit  $E = C([0; 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est un *opérateur positif* (ce que l'on note  $u \geq 0$ ), si  $u(f) \geq 0$  pour tout  $f \geq 0$ .

1. Soit  $u$  un endomorphisme positif de  $E$ . Montrer que  $u$  est continu.
2. Soit  $f \in E$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x; y) \in [0; 1]^2, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + c(y - x)^2.$$

3. (*Théorème de Korovkin*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $e_k$  l'élément de  $E$  défini par  $e_k : x \mapsto x^k$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs positifs de  $E$ .

On suppose que pour  $k \in \{0; 1; 2\}$ , la suite de fonctions  $(u_n(e_k))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e_k$  dans  $(E, \|\cdot\|)$ .

Montrer que pour tout  $f \in E$ , la suite de fonctions  $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

**II.2.110** x-ENS

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$  si et seulement si  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .

**II.2.111** Centrale-Supélec PC 2023

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente.

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\lambda = 0$ .
2. On suppose que  $A$  commute avec  $A^T$ . Montrer que  $A$  est la matrice nulle.

**II.2.112** Mines-Ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. On dit que  $A$  est *positive* (resp. *définie positive*) si

$$\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A X \geq 0 \quad (\text{resp. } X^T A X > 0)$$

1. Montrer que  $A$  est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que  $A$  est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

**II.2.113** x ESPCI

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = \text{rang}(f + g)$
- ii)  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_E\}$  et  $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$

**II.2.114** CCINP 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Trouver des endomorphismes diagonalisables  $f$  de  $E$  vérifiant  $f^3 - f^2 + f - \text{Id}_E = 0$ .

**II.2.115** X-ENS

Déterminer les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

**II.2.116** X ESPCI 2023

Soit  $n \geq 3$  un naturel impair et  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Pour  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose  $M = \alpha A + \beta A^T$ . Montrer que  $\det(M)$  est un multiple de  $\alpha + \beta$ .

**II.2.117** Mines

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice  $A$ .

**II.2.118** CCINP PC 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $u^3 = u^2$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $u$  est un projecteur.

**II.2.119** CCP MP

Soit  $E$  un espace euclidien muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de norme associée  $\|\cdot\|$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq \|x\|$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .

Soit  $g$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $A^T = (g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .

1. (a) Montrer que :

$$\forall (x; y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

- (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|g(x)\| \leq \|x\|$ .

2. Soit  $y \in E$ .

(a) Si  $f(y) = y$ , montrer que  $\|g(y) - y\|^2 = \|g(y)\|^2 - \|y\|^2$ .

(b) En déduire que  $f(y) = y$  si et seulement si  $g(y) = y$ .

3. (a) Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(g)^\perp$ .

(b) Montrer que  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \boxplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ .

**II.2.120** Mines MP 2024

Calculer  $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Vect}(\mathbb{U}_5))$ , où  $\mathbb{U}_5 = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{5}} \mid 0 \leq k \leq 4 \right\}$ .

**II.2.121** Mines-Télécom MP 2023

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  tel que  $f \circ f = 0$ . Montrer que  $\text{rang}(f) \leq 2$ .

**II.2.122** Mines

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension impaire. Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer que  $p$  et  $q$  ont une droite propre commune.

**II.2.123** CCINP MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0, \dots, a_{n-1}$  appartenant à  $\mathbb{C}$  et

$$M(a_0; \dots; a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On pose  $J = M(0; 1; 0; \dots; 0)$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $J$ . Montrer que  $J$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $M(a_0; \dots; a_{n-1})$  est un polynôme en  $J$ . La matrice  $M(a_0; \dots; a_{n-1})$  est-elle diagonalisable ?
3. Soit  $\mathcal{T} = \{M(a_0; \dots; a_{n-1}) \mid (a_0; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$ . Montrer que l'ensemble  $\mathcal{T}$  est une sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{C})$ . Quelle est sa dimension ?

**II.2.124** X PC 2020

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

**II.2.125** Mines-Ponts

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. On suppose que  $f^2$  est diagonalisable. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

**II.2.126** Mines-Télécom MP

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  antisymétrique et  $B \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique telles que  $AB = BA$ . La norme euclidienne sur  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  est notée  $\|\cdot\|$ .

1. Soit  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $(AX)^T B X = 0$ , puis que :

$$\|(A + B)X\| = \|(A - B)X\|.$$

Pour la suite, on suppose en plus que  $B \in GL_n(\mathbb{R})$ .

2. Montrer que  $A + B$  et  $A - B$  sont inversibles.
3. Montrer que  $(A + B)(A - B)^{-1}$  est orthogonale.

**II.2.127** Mines-Télécom MP

Soit  $f$  un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien  $E$  tel que, pour tout  $(x; y) \in E^2$ ,  $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$ .

1. Montrer que  $s = f \circ f$  est symétrique.
2. Soit  $a$  une valeur propre de  $s$  et  $V_a$  l'espace propre associé.
  - (a) Soit  $x \in V_a \setminus \{O_E\}$ . Montrer que  $\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$ .
  - (b) En déduire que  $a < 0$ .
  - (c) Soit  $F = \text{Vect}(\{x; f(x)\})$ . Montrer que  $F$  et  $F^\perp$  sont stables par  $f$ .
3. Montrer que  $\dim(F) = 2$ .

**II.2.128** CCP MP

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . On pose  $H = u^\perp$ . Soit encore  $s$  la réflexion (la symétrie orthogonale) par rapport à  $H$  et  $f \in O(E)$ .

1. Montrer que  $f \circ s \circ f^{-1}$  est une symétrie, et déterminer ses espaces propres caractéristiques.
2. Montrer que  $f$  et  $s$  commutent si et seulement si  $u$  est un vecteur propre de  $f$ .
3. En déduire l'ensemble  $\mathcal{C} = \{f \in O(E) \mid \forall g \in O(E), f \circ g = g \circ f\}$ .

**II.2.129** CCP MP

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes, et  $g$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ .

1. Montrer que tout vecteur propre de  $f$  est aussi vecteur propre de  $g$ .
2. Montrer que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré au plus  $n - 1$  tel que  $P(f) = g$ .

**II.2.130** CCP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B} = \{e_1; \dots; e_n\}$  une base de  $E$ . On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$ , où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

1. Donner le rang de  $f$ .
2. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
3. Avec les données de l'énoncé, exprimer  $\text{Tr}(f)$ .

**II.2.131** Centrale

Trouver les matrices  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $MM^T M = I_n$ .

**II.2.132** Mines-Ponts

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices appartenant à  $M_n(\mathbb{C})$  n'ayant pas de valeur propre commune.

1. Montrer que  $\chi_A(B)$  est inversible.
2. Soit  $Y \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $X \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX - XB = Y$ .



**II.2.138** X PC 2012

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $a_0, \dots, a_p$  appartenant à  $\mathbb{K}$  tels que

$$A^{-1} = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p.$$

Autrement dit, montrer que  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ .

**II.2.139** X PC 2014

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u$  et  $v$  deux projecteurs de  $E$ . On suppose que  $\text{Id}_E - u - v$  est inversible. Montrer que  $\text{rang}(u) = \text{rang}(v)$ .

**II.2.140** X PC 2019

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux.

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Sous quelle condition la suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

**II.2.141** X PC 2019

Soit  $q \in \mathbb{R}^*$  et

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & q(q+1) \\ q(q-1) & -q \end{pmatrix}.$$

1. Soit  $p$  et  $q$  deux nombres réels non nuls et distincts. Les matrices  $A(p)$  et  $A(q)$  sont-elles semblables ?
2. Même question pour les matrices  $B(q) = q^{-2}A(q)$ .
3. On considère les matrices  $C \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $C^2 = (A(q))^2$ . Combien parmi celles-ci ne sont pas semblables à  $A(q)$  ?

**II.2.142** X PC 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie et  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g.$$

Montrer que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

**II.2.143** X PC 2019

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u^3 = 0$  et  $u^2$  soit non nul. Trouver l'ensemble des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  qui commutent avec  $u$ .

**II.2.144** CCP 2015

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calcul, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.145** CCP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$ . Justifier les propositions suivantes :

1.  $A$  est inversible ;
2.  $A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$  ;
3.  $\det(A) > 0$

**II.2.146** CCP 2015

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 + A = 0$ .

Que peut-on dire du rang de  $A$  ?

**II.2.147** CCP 2015

Déterminer toutes les matrices  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , de trace égale à 7 et vérifiant l'égalité  $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$ .

**II.2.148** Mines-Ponts 2015

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  sans point fixe autre que le vecteur nul, tel que  $f^2 - 2f$  est diagonalisable. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**II.2.149** X-ENS 2015

Trouver toutes les racines carrées de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**II.2.150** Centrale 2015

Résoudre dans  $M_2(\mathbb{C})$  l'équation  $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**II.2.151** Mines 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 13 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

Trouver  $P, Q \in GL_4(\mathbb{R})$  telles que  $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.152** Mines 2015

À quelle(s) condition(s) la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.153** Mines 2015

Donner une condition sur  $z \in \mathbb{C}$  pour que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**II.2.154** CCP 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  deux matrices de  $M_2(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $AM - MA$ .
2. L'endomorphisme  $f : M \mapsto AM - MA$  est-il diagonalisable dans  $M_2(\mathbb{R})$  ?

**II.2.155** CCP 2015

Montrer qu'une matrice nilpotente de  $M_n(\mathbb{C})$  a un indice de nilpotence inférieur ou égal à  $n$ . En déduire qu'il n'existe pas de matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.156** CCP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A^2 - A + I_n$ . Montrer que  $\text{Tr}(A) = \dim(E_1)$ , où  $E_1$  est le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.

**II.2.157** CCP 2015

On considère l'application  $f$  qui, à tout polynôme de  $\mathbb{R}_3[X]$ , fait correspondre le reste de la division euclidienne de  $X^2P(X)$  par  $X^4 - 1$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Est-il diagonalisable ? injectif ?

**II.2.158** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  dont le polynôme caractéristique est scindé simple.

1. Montrer que la famille  $\{I_n; A; \dots; A^{n-1}\}$  est libre.
2. Soit  $B \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AB = BA$ . Montrer que  $B$  est une combinaison linéaire des matrices  $I_n, A, \dots, A^{n-1}$ .

**II.2.159** CCP 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  appartenant à  $M_3(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une matrice  $R$  telle que  $R^2 = A$ . (On ne demande pas de calculer  $R$ .)
3. Montrer que toute matrice  $R$  appartenant à  $M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = R^2$  est diagonalisable.

**II.2.160** Mines 2015

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$ , à valeurs réelles. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f; g) &\longmapsto f(0)g(0) + \int_{-1}^1 f'(t)g'(t) dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur  $E$ . Trouver une base orthonormée du sous-espace vectoriel  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$ .

**II.2.161** CCP 2015

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $M_n(\mathbb{R})$  défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), u(M) = \frac{1}{3}(2M - M^T).$$

1. Rechercher les éléments propres de  $u$ .
2. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
3. Calculer  $\text{Tr}(u)$  et  $\det(u)$ .

**II.2.162** Centrale 2015

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace euclidien  $E$ . Soit  $f : F \rightarrow G$  et  $g : G \rightarrow F$  des applications linéaires telles que :

$$\forall (x; y) \in F \times G, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(g)^\perp \cap F$ .
2. Montrer que  $F = \text{Ker}(f) \boxplus \text{Im}(g)$ .
3. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $g$  est surjective.
4. Montrer que  $g$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.

**II.2.163** Centrale 2015

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ . Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

**II.2.164** Centrale 2015

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  est une matrice de rotation si et seulement si il existe  $h \in ]0; \frac{4}{27}[$  tel que  $a, b$  et  $c$  soient les racines du polynôme  $X^3 - X^2 + h$ .

**II.2.165** Centrale 2015

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix}$ .

À quelle condition sur  $A$ , la matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?  
On pourra commencer par étudier le cas  $n = 1$ .

**II.2.166** CCP 2015

Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^3 = I_3$  et  $M \neq I_3$ . Soit encore  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

On cherche à démontrer que  $M$  est semblable à  $A$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{C})$  et donner son spectre. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{R})$  ?
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{C})$  et que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1; j; j^2\}$ .  
Montrer que  $j$  et  $j^2$  ont la même multiplicité algébrique.  
En déduire les valeurs propres de  $M$ .
3. Montrer que  $M$  est semblable à  $A$  dans  $M_3(\mathbb{C})$ , puis dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

**II.2.167** Petites Mines 2015

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$  une base orthonormée de  $E$ . On considère l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme orthogonal de  $E$ .
2. Déterminer la nature de  $f$  et ses caractéristiques géométriques.

**II.2.168** Mines-Ponts 2015

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire

$$(P; Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

Montrer que l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \int_0^1 (t+x)^n P(t) dt$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et qu'il est symétrique.

**II.2.169** Centrale 2015

On considère les endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  vérifiant :

$$u^2 = v^2 = \text{Id}_{\mathbb{C}^n} \quad \text{et} \quad u \circ v = -v \circ u.$$

Montrer qu'il en existe une infinité si  $n = 4$  et aucun si  $n = 3$ .

**II.2.170** Mines-Ponts

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonale.

1. Montrer que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| < n\sqrt{n}$ .
2. Montrer que  $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$ .

**II.2.171** X-ENS PC 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . Montrer qu'il existe un élément  $v$  de  $E$  tel que  $\{v; f(v); \dots; f^{n-1}(v)\}$  soit une base si et seulement si  $f$  possède  $n$  valeurs propres distinctes.

**II.2.172** X-ENS 2015

Soit  $(U_1; U_2; \dots; U_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique. Montrer que la matrice  $A = (\langle U_i, U_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$  est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont strictement positives.

**II.2.173** Centrale 2015

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto AM - MA \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que si  $A$  est nilpotente,  $f$  l'est aussi.
3. Montrer que si  $A$  est diagonalisable,  $f$  l'est aussi.

**II.2.174** CCP MP

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ . Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour tout  $P \in E$ , on pose  $f(P) = P - P'$ .

1. Démontrer que  $f$  est bijectif de deux manières :
  - (a) sans utiliser de matrice de  $f$  ;
  - (b) en utilisant une matrice de  $f$ .
2. Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P$  tel que  $f(P) = Q$ .  
Indication : si  $P \in E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?
3. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**II.2.175** X MP 2021

Déterminer les matrices de  $M_n(\mathbb{K})$  semblables uniquement à elles-mêmes.

**II.2.176** CCP MP

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
- Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$  et  $B = aI_3 + bA + cA^2$ , où  $I_3$  désigne la matrice identité d'ordre 3. Dédurre de la question 1 les éléments propres de  $B$ .

**II.2.177** CCP MP

Soit  $E$  un espace euclidien.

- Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .
- Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - Démontrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
  - Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**II.2.178** CCP MP

Soit un entier  $n \geq 1$ . On considère la matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on désigne par  $D_n$  le déterminant de  $A_n$ .

- Démontrer que  $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ .
- Déterminer  $D_n$  en fonction de  $n$ .
- Justifier que la matrice  $A_n$  est diagonalisable. Le nombre réel 0 est-il valeur propre de la matrice  $A_n$ ?

**II.2.179** CCP MP

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .  
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$  est  $\text{Vect}(\{I_2; A\})$ .

**II.2.180** CCP MP

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ . On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un vecteur unique  $y_0$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

- Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

**II.2.181** X MP 2021

Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  dont toute valeur propre est de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite  $(M^k)_{k \geq 0}$  converge vers 0.

**II.2.182** CCP MP

- On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

- Justifier, sans calcul, que  $A$  est diagonalisable.
- Déterminer les valeurs propres de  $A$  puis une base de vecteurs propres associés.

- On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases},$$

$x, y, z$  désignant trois fonctions de la variable  $t$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

En utilisant la question 1 et en le justifiant, résoudre ce système.

**II.2.183** CCP MP

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Démontrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.
- On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $A$ . Trouver une base  $(v_1; v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .

On donnera explicitement les valeurs de  $a, b$  et  $c$ .

- En déduire la résolution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

**II.2.184** CCP MP

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).  
Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
Prouver que si  $P$  annule  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est une racine de  $P$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $E = M_n(\mathbb{R})$ .  
Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice de  $E$  définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\forall M \in E, u(M) = M + \text{Tr}(M)A.$$

- (a) Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .
- (b) L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?  
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1).

**II.2.185** CCP MP

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que la série  $\sum x_n^2$  converge.

1. (a) Démontrer que, pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , la série  $\sum x_n y_n$  converge.

$$\text{On pose alors } \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

- (b) Démontrer que  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire dans  $\ell^2$ . On suppose que  $\ell^2$  est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , on pose  $\varphi(x) = x_p$ .  
Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire et continue de  $\ell^2$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. On considère l'ensemble  $F$  des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
  - (a) Déterminer  $F^\perp$ .
  - (b) Comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

**II.2.186** Mines 2015

Rechercher les matrices  $M \in M_3(\mathbb{R})$ , de trace nulle, telles que  $M^2 + M^T = I_3$ .

**II.2.187** CCP MP

Soit  $E$  un espace vectoriel réel ou complexe.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ .

1. Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
2. Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  :
  - (a) en utilisant le lemme des noyaux;
  - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que  $E$  est de dimension finie.  
Prouver que  $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .

**II.2.188** CCP MP

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On pose, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
(b) Dans quel cas a-t-on l'égalité? Le démontrer.
2. Soit  $E = \{f \in C([a; b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a; b] f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t) dt \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \mid f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

**II.2.189** CCP MP

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel  $E$ .

1. Soit  $\lambda$  un réel non nul. Prouver que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $v \circ u$ .
2. On considère, sur  $E = \mathbb{R}[X]$ , les endomorphismes  $u$  et  $v$  définis par

$$u : P \longmapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v : P \longmapsto P'.$$

Déterminer  $\text{Ker}(u \circ v)$  et  $\text{Ker}(v \circ u)$ . Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour  $\lambda = 0$ ?

3. Si  $E$  est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour  $\lambda = 0$ .

**II.2.190** CCP MP

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de  $P(X)$  dans la base  $(1; X - a, (X - a)^2; \dots; (X - a)^n)$ .
  - (b) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que :  
le nombre  $a$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $r$  si et seulement si  $P^{(r)}(a) \neq 0$  et pour tout  $k \in \llbracket 0; r - 1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$ .
  - (c) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**II.2.191** CCP MP

Soit  $a$  un nombre complexe. On note  $E$  l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \text{ avec } (u_0; u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de  $E$ .
2. Dans cette question, on considère la suite de  $E$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ . Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre complexe  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**II.2.192** CCP MP

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières :
  - (a) sans calcul,
  - (b) en calculant directement le déterminant  $\det(\lambda I_3 - A)$ , où  $I_3$  est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
  - (c) en utilisant le rang de la matrice,
  - (d) en calculant  $A^2$ .
2. On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

**II.2.193** CCP MP

Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ , sur le plan  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ , parallèlement à la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
2. Soit  $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

**II.2.194** Mines 2015

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\varphi(P(X)) = P(2 - X)$ . Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

**II.2.195** CCP 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $2A^3 - 7A^2 + 9A - 4I_n = 0$ . Justifier les assertions suivantes :

1.  $A$  est inversible ;
2.  $A$  est diagonalisable ;
3.  $\det(A) > 0$ .

**II.2.196** X MP 2021

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  pair et  $M \in M_n(\mathbb{Z})$ . On suppose que les coefficients diagonaux de  $M$  sont nuls et que les termes en dehors de la diagonale appartiennent à  $\{-1; 1\}$ . Montrer que la matrice  $M$  est inversible.

**II.2.197** CCP MP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère  $E = M_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On pose, pour tout  $(a; b) \in E^2$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ , où  $\text{Tr}$  désigne la trace et  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$ .

1. Prouver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$ .  
Une matrice  $A$  de  $E$  est dite *antisymétrique* lorsque  $A^T = -A$ .  
On note  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E$ .  
On admet que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - (a) Prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) Prouver que  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ . Déterminer  $F^\perp$ .

**II.2.198** CCP MP

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  des réels ou des complexes. On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

1. Démontrer que :  $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ ,  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .
2. (a) Démontrer que :  $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ ,  $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ .  
(b) Démontrer que, pour tout  $(P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  :  
 $P$  polynôme annulateur de  $u \implies PQ$  polynôme annulateur de  $u$
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ .
  - (b) En déduire que le polynôme  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**II.2.199** CCP MP

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  sont des nombres réels.

1. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{R})$  ?
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{C})$  ?

**II.2.200** CCP 2016

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  vers  $F$ . Montrer que :

$$|\text{rang}(f) - \text{rang}(g)| \leq \text{rang}(f + g) \leq \text{rang}(f) + \text{rang}(g).$$

**II.2.201** CCP MP

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Démontrer que  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos(x)$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ . Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2(x)$ .

**II.2.202** CCP MP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels deux à deux distincts.

- Montrer que si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont des réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant :

$$\deg(P) \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

- Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

- Prouver que, pour tout  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

**II.2.203** CCP MP

On définit dans  $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par  $\varphi(A; A') = \text{Tr}(A^T A')$ , où  $\text{Tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ . On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $M_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Déterminer la projection orthogonale de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

**II.2.204** CCP MP

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ . On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

- Montrer que  $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$ .
- (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.  
(b) En déduire que  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .
- On suppose que  $u$  est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Justifier la réponse.

**II.2.205** Mines PSI 2016

Soit  $A \in M_2(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $-A$  si et seulement si  $\text{Tr}(A) = 0$ .

**II.2.206** CCP 2016

Soit  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $U$  l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt.$$

1. Montrer que  $U$  est un endomorphisme de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. L'endomorphisme  $U$  est-il surjectif?
3. Déterminer le noyau de  $U$ .

**II.2.207** CCP MP

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$  où  $a$  est un nombre réel.

1. Déterminer le rang de  $A$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$ , la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.208** Petites Mines 2016

Soit  $A$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  définie comme suit :

$$a_{ij} = \binom{j}{i} \text{ si } i \leq j \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**II.2.209** CCP MP

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant,  $\pi_A$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X-1)^2$  et en déduire la valeur de  $A^n$ .

**II.2.210** Mines PSI 2016

Soit  $A, B, M \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres complexes non nuls et distincts tels que :

$$\begin{cases} A + B = I_n \\ \lambda A + \mu B = M \\ \lambda^2 A + \mu^2 B = M^2 \end{cases}$$

1. Montrer que  $M$  est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que  $A$  et  $B$  sont des matrices de projecteurs.
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

**II.2.211** Mines 2016

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = A^2 + A + I_n$ . Montrer que  $A$  et  $B$  commutent.

**II.2.212** Mines 2016

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Déterminer la dimension de  $W = \{u \in L(E, F) \mid G \subset \text{Ker}(u)\}$ .

**II.2.213** CCP 2016

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que :

$$H \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset H$$

2. Déterminer les sous-espaces de  $E$  stables par  $f$ ,  $f$  étant un endomorphisme de  $E$  qui a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans une base  $\mathcal{B}$ .

**II.2.214** CCP

Soit  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  telle que  $f(P)(X) = X(X+1)P'(X) - nXP(X)$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres de  $f$ .

**II.2.215** CCP 2016

Soit  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Déterminer la nature et les caractéristiques de  $f$ , endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ .

**II.2.216** Mines 2016

On considère l'espace vectoriel  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et le sous-espace vectoriel  $F$  engendré par les fonctions  $S : x \mapsto \sin(x)$  et  $C : x \mapsto \cos(x)$ . On désigne par  $D$  l'application dérivation.

1. Montrer que  $F$  est stable pour  $D$  et qu'il existe un endomorphisme  $u$  de  $F$  tel que  $u \circ u = \tilde{D}$ , où  $\tilde{D}$  est l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $F$ .
2. Existe-t-il un endomorphisme  $v$  de  $E$  tel que  $v \circ v = D$  ?

**II.2.217** CCP

Existe-t-il une base de  $M_n(\mathbb{C})$  formée de matrices diagonalisables ?

**II.2.218** CCP 2016

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . À quelle(s) condition(s) existe-t-il un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$  ?

**II.2.219** ENSAM 2016

Soit  $A$  une matrice non nulle de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $f : X \mapsto X + \text{Tr}(X)A$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{Tr}(A) \neq -1$ .
3. Dans le cas où  $\text{Tr}(A) = -1$ , trouver  $\text{Ker}(f)$ . En déduire  $\text{rang}(f)$ .
4. On se place dans  $M_2(\mathbb{R})$ . Écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ . Retrouver le résultat de la partie 2.

**II.2.220** TPE/EIVP 2016

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.221** TPE/EIVP 2016

Soit  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases}$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables ?

**II.2.222** Centrale 2016

1. Écrire un développement limité à l'ordre 3 de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ .
2. Soit  $N \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente d'ordre inférieur ou égal à 4. Montrer que la matrice  $I_n + N$  admet au moins une *racine carrée* dans  $M_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire qu'il existe  $M \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $M^2 = I_n + N$ .

**II.2.223** Centrale PSI 2016

Soit  $E$  un espace euclidien et  $p$  un projecteur de  $E$ .

1. Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors  $p$  est un endomorphisme symétrique et est 1-lipschitzien.
2. On suppose que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs orthogonaux.
  - (a) Prouver que le polynôme caractéristique de  $p + q$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
L'endomorphisme  $p + q$  est-il nécessairement un projecteur ?
  - (b) Montrer que les valeurs propres de  $p + q$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 2]$ .
3. Donner un exemple de problème faisant intervenir des projecteurs orthogonaux.

**II.2.224** TPE/EIVP 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $A$  est inversible et que  $\det(A) > 0$ .

**II.2.225** CCP 2016

On considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : M_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

**II.2.226** CCINP 2024

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique.  
Prouver que  $A$  est positive si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$ .
2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique. Montrer que  $A^2$  est positive.
3. Soit  $A$  et  $B$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose  $A$  symétrique et  $B$  symétrique positive. Montrer que :

$$AB = BA \implies A^2B \text{ est symétrique positive}$$

4. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique positive.  
Prouver qu'il existe une matrice  $B$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ , symétrique positive, telle que  $A = B^2$ .

**II.2.227** CCINP 2024

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire de  $x$  et de  $y$ , et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \|x\|$ .  
(a) Démontrer que, pour tout  $(x; y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .  
(b) Démontrer que  $u$  est bijectif.
2. On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .  
Autrement dit,  $\mathcal{O}(E) = \{u \in L(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$ .  
Démontrer que  $\mathcal{O}(E)$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
3. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $e = (e_1; e_2; \dots; e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .  
Prouver que  $u \in \mathcal{O}(E)$  si et seulement si  $(u(e_1); u(e_2); \dots; u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

**II.2.228** X MP/PSI 2023

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  symétriques positives.  
Montrer que  $\det(A + B) \geq \max(\det(A); \det(B))$ .

**II.2.229** X MP/PSI

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  symétriques positives.  
Montrer que  $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$ .

**II.2.230** Mines-Télécom PC 2018

Soit la matrice  $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$ .

Discuter de la diagonalisabilité de  $A(\ell)$  suivant les valeurs de  $\ell \in \mathbb{R}$ .

**II.2.231** Mines-Télécom 2022

On cherche à résoudre cet exercice avec le minimum de calculs possible.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ .

On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

1. Donner  $\text{rang}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$ .
2. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im}(f)$ . Expliciter  $g$ .
3. L'endomorphisme  $g$  est-il diagonalisable ?

**II.2.232** Mines-Ponts 2022

Soit  $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Combien de sous-espaces vectoriels stables par  $A$  existe-t-il ?
3. Étudier  $C_A = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$ .

**II.2.233** ENSAM

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $D$  l'application de dérivation :

$$\begin{array}{lcl} D & : & E \longrightarrow E \\ & & P \longmapsto P' \end{array}$$

1. Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $E$ . Déterminer son noyau et son image.
2. Montrer que  $D$  est nilpotent et calculer son indice de nilpotence.
3. On note  $I$  l'endomorphisme identité. Montrer que  $I - D$  est inversible et déterminer son inverse.
4. Résoudre dans  $E$ , puis dans  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'équation différentielle  $y' - y = \frac{x^n}{n!}$ .

**II.2.234** X ESPCI

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$$

**II.2.235** ENSIIE 2015

On considère une matrice  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$\det(A) = 10, \quad \text{Tr}(A) = -6 \quad \text{et} \quad A - I_3 \text{ n'est pas inversible.}$$

Montrer que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  comme un polynôme de la matrice  $A$ .

**II.2.236** CCINP

Déterminer toutes les formes linéaires  $f$  de  $M_n(\mathbb{K})$  telles que  $f(AB) = f(BA)$  pour tout  $(A; B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ .

**II.2.237** CCP 2017

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ , non nulle.

1. Quel est le rang de la matrice  $A$  ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général. On pose  $B = 2A - \text{Tr}(A)I_n$ . Calculer le déterminant de  $B$ .
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit inversible.
5. Calculer  $B^2$ . Calculer  $B^{-1}$  dans le cas où  $B$  est inversible.

**II.2.238** CCP 2017

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$  en posant, pour  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ .

2. Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On note  $S_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $M_3(\mathbb{R})$ .

Calculer la distance de  $M$  à  $S_3(\mathbb{R})$ .

3. Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des matrices de  $M_3(\mathbb{R})$  de trace nulle. Montrer que  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension.
4. Soit  $J$  la matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{H}$ .

**II.2.239** CCP 2017

On considère une forme linéaire non nulle  $\varphi$  sur un espace vectoriel  $E$  et  $x_0$  un vecteur non nul de  $E$ . On pose, pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) = x + \varphi(x)x_0$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que 1 est une valeur propre de  $u$ . Donner la dimension du sous-espace propre associé.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  soit diagonalisable. Indiquer alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $u$ .

**II.2.240** Petites Mines 2017

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) - P(X-1) \end{aligned}$$

Déterminer l'image de  $\varphi$ .

**II.2.241** Mines-Ponts 2017

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$A \text{ est symétrique } \iff A^T A = A^2$$

**II.2.242** Centrale 2017

Soit  $n \geq 2$  un entier. Pour tout  $\omega \in \mathbb{C}$ , soit  $X(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $\omega_0 = 1$  et  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  les racines  $n^{\text{èmes}}$  non réelles de l'unité. Montrer que la famille  $\{X(\omega_0); \dots; X(\omega_{n-1})\}$  est libre.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.243** Centrale 2017

1. Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$  est un espace vectoriel.
2. Donner une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans laquelle la matrice de l'application dérivée  $D : P \mapsto P'$  est composée seulement de 0 et 1.
3. (a) Montrer que pour tout  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P - P' = Q$ .  
 (b) Montrer que si  $Q \geq 0$ , alors  $P \geq 0$ .  
 (c) Montrer que si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et à racines simples, alors  $Q$  l'est aussi.

**II.2.244** Mines-Ponts 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

$$T : P \mapsto P(X + 1) \quad \text{et} \quad S : P \mapsto P(1 - X).$$

Trouver les vecteurs propres.

**II.2.245** Mines 2017

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et sa transposée sont semblables dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

**II.2.246** X-ENS PSI 2017

1. Montrer que pour toutes matrices de  $M_n(\mathbb{C})$ , les matrices  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.
2. On considère deux endomorphismes inversibles  $f$  et  $g$  d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f \circ g$ . On note  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $f \circ g$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et  $F_\lambda$  le sous-espace propre de  $g \circ f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .
  - (a) Montrer que  $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$  et que  $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$ .  
En déduire que  $E_\lambda$  et  $F_\lambda$  ont même dimension.
  - (b) Montrer que si  $f \circ g$  est inversible,  $g \circ f$  l'est aussi.
3. Trouver deux matrices carrées  $X$  et  $Y$  telles que  $XY$  soit diagonalisable mais pas  $YX$ .

**II.2.247** X ESPCI 2017

1. Trouver une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 \neq M$  et  $M^2 = M^3 \neq 0$ .
2. Soit  $A \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $\det(A) > 0$  et  $A^{-1} = A^T$ .  
Montrer qu'il existe un vecteur colonne  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $AX = X$ .

**II.2.248** Mines-Ponts PSI 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M$  une matrice réelle de taille 2 telle que  $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $M$  est diagonalisable dans  $M_2(\mathbb{C})$  et donner ses valeurs propres.
2. Montrer qu'il existe  $k \in \llbracket 0 ; 2n - 1 \rrbracket$  et  $P$  inversible dans  $M_2(\mathbb{C})$  telle que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}.$$

3. Montrer qu'il existe  $P$  pour la même relation, mais réelle.

**II.2.249** Mines-Ponts PSI 2024

Soit  $(a_0; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  distincts deux à deux et  $(A; B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ .

On définit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0); \dots; P(a_n)) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme.

En déduire l'existence de polynômes  $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$  ( $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ) tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, k \neq i, L_i(a_k) = 0 \text{ et } L_i(a_i) = 1.$$

2. Exprimer le polynôme caractéristique de  $A$  en fonction des  $L_i$ .
3. Montrer que

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M &\longmapsto \chi_M \end{aligned}$$

est continue.

4. Montrer que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

**II.2.250** ENSEA/ENSIIE PSI 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Soit  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $H_1, \dots, H_p$  des hyperplans vectoriels de  $E$  deux à deux distincts.

Montrer que  $\dim \left( \bigcap_{k=1}^p H_k \right) \geq n - p$ .

Indication : considérer

$$\begin{aligned} \phi : H_1 \times \dots \times H_p &\longrightarrow E^{p-1} \\ (x_1; \dots; x_p) &\longmapsto (x_2 - x_1; \dots; x_p - x_1) \end{aligned}$$

**II.2.251** CCP 2017

Soit  $A \in M_6(\mathbb{R})$  inversible et vérifiant  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ , ainsi que  $\text{Tr}(A) = 8$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de  $A$  ?
3. Donner une matrice diagonale semblable à  $A$ .
4. Déterminer le polynôme caractéristique et l'ensemble des polynômes annulateurs de  $A$ .

**II.2.252** CCP 2017

Soit  $M$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant la relation  $M^2 + M^T = I_n$ .

1. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de  $M$ , et que  $M$  n'est pas inversible.
3. Montrer que  $M$  admet un polynôme annulateur de degré 2, que  $M$  est symétrique et de trace nulle.

**II.2.253** X MP 2021

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

**II.2.254** Mines-Ponts MP 2021

Existe-t-il une norme  $N$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ ,  $N(AB) = N(A)N(B)$  ?

**II.2.255** X PSI 2023

Déterminer le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  engendré par les matrices orthogonales.

**II.2.256** CCP 2012

On considère trois nombres réels  $a, b, c$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .
2. Exprimer, suivant la parité de  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  en fonction de  $A$  ou de  $A^2$ .  
On pourra utiliser l'égalité  $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
3. Montrer que  $\exp(A) = I_3 + \frac{\sin(r)}{r}A + \frac{1 - \cos(r)}{r^2}A^2$ .

**II.2.257** Mines 2012

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ . Montrer que  $\text{Tr}(A) \leq 0$ .

**II.2.258** Centrale 2012

Soit  $A \in M_p(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^n = A^T$  et on pose  $B = A^{n+1}$ .

1. Montrer que  $B$  est symétrique et que ses valeurs propres sont positives.
2. (a) Calculer  $B^n$ .  
(b) En déduire les valeurs propres de  $B$ .  
(c) Quelle est la nature de  $B$  ? (On assimilera une matrice à son endomorphisme canoniquement associé.)
3. Montrer que  $\mathbb{R}^p = \text{Ker}(B) + \text{Im}(B)$  et que la somme est orthogonale.
4. (a) Montrer que  $\text{Ker}(B)$  et  $\text{Im}(B)$  sont stables par  $A$ .  
(b) Montrer que l'endomorphisme induit par  $A$  sur  $\text{Im}(B)$  est une isométrie.  
(c) Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par  $A$  sur  $\text{Ker}(B)$  ?
5. Caractériser les matrices  $A \in M_p(\mathbb{R})$  telles que  $A^n = A^T$ .

**II.2.259** Centrale 2012

Soit  $n \geq 2$  un entier et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que pour tout  $P \in E$ , il existe  $Q \in E$ , unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)Q(x) = \int_1^x P(t) dt,$$

et que l'application  $f$  qui à  $P$  associe  $Q$  est un endomorphisme de  $E$ .

2. Montrer que  $f$  est diagonalisable.
3. Trouver tous les endomorphismes de  $E$  tels que  $g^2 = f$ .

**II.2.260** Mines-Ponts 2012

Montrer qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si  $A$  admet un polynôme annulateur qui prend en 0 la valeur 1.

**II.2.261** Mines 2012

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  antisymétrique.

1. Montrer que si  $n$  est impair, alors  $A$  n'est pas inversible.
2. Montrer que si  $n$  est pair, alors  $\det(A) \geq 0$ . Sous quelle(s) condition(s) l'inégalité est-elle stricte ?

**II.2.262** ENSEA/ENSIIE 2012

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Calculer  $A^2$ .
3. Donner les valeurs propres de  $A$  sans utiliser le polynôme caractéristique.

**II.2.263** CCP 2012

On considère une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et la matrice  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$  définie par blocs.

1. Calculer  $B^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , puis, pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , exprimer  $P(B)$  en fonction de  $P(A)$  et  $P'(A)$ .
2. Montrer que si  $B$  est diagonalisable, alors  $A$  l'est aussi, et que ce n'est possible que si  $A = 0$ .

**II.2.264** CCP 2012

Soit  $n \geq 2$  un entier. À tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  on associe  $\Phi(P) : x \mapsto \int_x^{x+1} P(t) dt$ .

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Calculer  $\det(\Phi)$ .

**II.2.265** CCP 2017

Soit  $A \in \mathbb{R}^n$  une matrice colonne non nulle.

1. Montrer que  $B = AA^T$  est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de  $B$ .
3. Calculer  $B^2$ .
4. Donner les éléments propres de  $A$ .
5. Calculer  $\det(I_n + B)$  en fonction du vecteur  $A$ .

**II.2.266** CCP 2017

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que 0 est une valeur propre de  $A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.267** CCP 2017

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Avec un minimum de calculs, déterminer les valeurs propres de  $A$  et une matrice diagonale  $D \in M_3(\mathbb{R})$  semblable à  $A$ .
2. Montrer que si une matrice  $M$  commute avec  $D$ , alors elle est diagonale.
3. Déterminer toutes les matrices  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^7 + M + I_3 = A$ .

**II.2.268** CCINP PSI 2021

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que :

1. Si  $\text{rang}(u) = 2$  et  $u^2 = 0$ , alors il existe une base dans laquelle  $u$  est représenté

par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. Si  $\text{rang}(u) = 3$  et  $u^4 = 0$ , alors  $\text{Ker}(u^2) = \text{Im}(u^2)$  et il existe une base dans

laquelle  $u$  est représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.269** ENS Rennes 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  de trace nulle coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

**II.2.270** CCP 2017

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n > 1$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes.

1. Que peut-on dire de  $u$  ?
2. Montrer que si  $g$  est un endomorphisme de  $E$  solution de l'équation  $(E) : g^2 = u$ , alors tout vecteur propre de  $u$  est aussi vecteur propre de  $g$ .
3. Combien l'équation  $(E)$  admet-elle de solutions ?

**II.2.271** Centrale PSI

Soit  $S : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'application qui à  $f$  associe  $S(f) : x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ .

1. Montrer que, si  $S(f) = 0$ , alors  $f$  est périodique.
2. L'application  $S$  est-elle injective ? surjective ?
3. Soit  $n \geq 2$ . Montrer que  $S$  induit un endomorphisme sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , noté  $s$ . L'endomorphisme  $s$  est-il bijectif ? diagonalisable ?

**II.2.272** Centrale PSI

Soit  $M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ .

1. Déterminer le polynôme minimal  $\pi_M$  de la matrice  $M$ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $A \in M_4(\mathbb{R})$  semblable à  $M$ .

**II.2.273** Centrale PSI

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f, g$  des endomorphismes de  $E$  tels que  $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$  et  $f \circ g + g \circ f = 0$ .

1. Montrer que la dimension de  $E$  est paire.
2. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont  $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.274** CCP

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

À quelle(s) condition(s) portant sur  $a$  et  $b$ , la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.275** CCP PC

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que  $f \circ f$  est un projecteur. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f^3 = f$ .

**II.2.276** Petites Mines PC

Soit  $n \geq 2$  un entier, un nombre réel  $m$  et la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$  où  $a_{ij} = 1$  si  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  et  $a_{in} = m$  si  $1 \leq i \leq n$ .

1. On suppose que  $m \neq 1 - n$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. On suppose que  $m = 1 - n$ . Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  dont tous les coefficients sont nuls excepté  $b_{12} = 1$ .

**II.2.277** TPE/EIVP PC

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\Phi_A : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $\Phi_A$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$ . Déterminer les matrices  $A$  de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $\Phi_A = 0$ .
2. Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$ , comparer  $\Phi_{P(A)}$  et  $P(\Phi_A)$ .
3. Montrer que  $\Phi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

**II.2.278** CCP PC

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $p$  un projecteur orthogonal de  $E$  de rang  $r$  et  $(e_1; \dots; e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$ .

**II.2.279** Centrale PSI

Soit  $p$  et  $q$  deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien  $E$ . Soit encore  $u = p + q$ .

1. Soit  $x$  un vecteur de norme 1. Encadrer  $\langle x, p(x) \rangle$  et  $\langle x, q(x) \rangle$ . En déduire que  $\text{Sp}(u) \subset [0; 2]$ .
2. Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .
3. Déterminer  $\text{Ker}(u - \text{Id})$ .

**II.2.280** TPE/EIVP PSI

Soit  $S$  une matrice symétrique réelle et  $D$  une matrice diagonale dont tous les coefficients sont ceux de la diagonale de  $S$ . On suppose que  $S$  et  $D$  sont semblables. Calculer  $\text{Tr}(S^2)$  de deux manières et en déduire que  $S = D$ .

**II.2.281** CCP 2017

On considère un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$ , non nul, tel que  $f^3 + f = 0$ .

1. Montrer que  $f$  n'est pas inversible.
2. Montrer que  $f$  n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont supplémentaires.
4. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}(f)$ ,  $(f(x); f^2(x))$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .
5. Calculer la trace de  $f$ .

**II.2.282** TPE/EIVP PSI

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle  $\pi$  et d'axe dirigé par le vecteur  $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$ .

**II.2.283** x

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  et  $M = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & ab & ac \\ ab & 1 + b^2 & bc \\ ac & bc & 1 + c^2 \end{pmatrix}$ .

Étudier l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $M$ .

**II.2.284** CCP

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 - m & m - 2 & m \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A_m$ .
2. Les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont-elles diagonalisables dans  $M_3(\mathbb{R})$ ? dans  $M_3(\mathbb{C})$ ?
3. Étudier la diagonalisabilité de  $A_m$  en général.

**II.2.285** x ESPCI

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\det(A) = 0$  si et seulement s'il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $AB = BA = 0$ .

**II.2.286** Mines-Ponts PSI

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . On suppose que  $u$  est nilpotent et que  $E = F + \text{Im}(u)$ . Montrer que  $E = F$ .

**II.2.287** CCP

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On considère une matrice  $A$  symétrique réelle telle que  $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$ . Étudier les valeurs propres et la diagonalisabilité de  $A$ . Que peut-on en conclure?

**II.2.288** CCP

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Reconnaître  $f$  et donner ses caractéristiques géométriques.

**II.2.289** CCP

On définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice  $A$  qui représente  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Justifier que  $A$  est inversible, et calculer  $A^{-1}$ .

**II.2.290** CCP PSI

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$ . Montrer que :

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$$

**II.2.291** Mines-Ponts PSI

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $f^2 = 0$  si, et seulement si, il existe un endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que  $f \circ g = f$  et  $g \circ f = 0$ .

**II.2.292** X MP MPI

Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien  $E$ . Montrer que :

1. l'endomorphisme  $p \circ q \circ p$  est autoadjoint positif ;
2.  $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(q) + (\text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p))$  ;
3. l'endomorphisme  $p \circ q$  est diagonalisable ;
4. le spectre de  $p \circ q$  est inclus dans  $[0; 1]$ .

**II.2.293** Mines-Ponts

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère le déterminant de taille  $n$  :

$$\Delta_n(a; b; c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que l'application  $x \mapsto \Delta_n(a+x; b+x; c+x)$  est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Calculer  $\Delta_n(a; b; c)$  en fonction de  $a, b, c$  et  $n$ .

**II.2.294** Centrale PSI

Soit  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  et  $\Phi : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$ . Calculer la trace de  $\Phi$ .

**II.2.295** Centrale PSI 2021

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$  tel que toute matrice non nulle de  $F$  soit inversible.

1. Ici  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Montrer que, si les matrices  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\alpha A - B$  n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de  $F$  ?
2. Ici  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Examiner le cas où  $n$  est impair. Donner un exemple où la dimension de  $F$  est 2. Montrer que, si  $n$  est pair, alors  $\dim(F) \leq n$ .

**II.2.296** TPE/EIVP PSI

1. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $u : P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (x - a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$ . Trouver les éléments propres de  $u$ .
2. En déduire l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  divisibles par leur dérivée.

**II.2.297** Mines-Ponts PSI

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Trouver  $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_n(\mathbb{R}), (\text{Tr}(A))^2 \leq \lambda \text{Tr}(A^T A)\}$ .
2. Trouver  $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) \leq \lambda \text{Tr}(A^T A)\}$ .

**II.2.298** Mines-Ponts PC

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  symétriques.  
Montrer que  $2\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(B^2)$ .

**II.2.299** CCP PC

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + I_n$  ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$  tel que  $AX = iX$  et  $X \neq 0$ .
2. Montrer qu'il existe  $U$  et  $V$  dans  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  libres tels que  $AU = -V$  et  $AV = U$ .

**II.2.300** CCP PSI

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A \neq 0$  et  $A^3 + A = 0$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.301** Centrale PC

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

1. Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$  autoadjoint tel que  $\langle g(z), z \rangle = 0$  pour tout  $z \in E$ . Montrer que  $g = 0$ .
2. Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$  autoadjoint tel que  $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$  pour tout  $z \in E$ . Montrer que  $g$  est un projecteur.

**II.2.302** Mines-Ponts PSI

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\chi_A, \chi_B$  leur polynôme caractéristique respectif.

1. Montrer que si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune, alors il existe  $U$  et  $V$  non nuls dans  $M_{n \times 1}(\mathbb{C})$  tels que  $AUV^T = UV^T B$ .
2. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que si  $AM = MB$ , alors  $\chi_B(A)M = 0$ .
3. À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices  $A$  et  $B$  ont-elles une valeur propre commune ?

**II.2.303** CCP PSI

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ . On note  $(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$  le spectre ordonné par ordre croissant de  $S$ . Si  $\mu$  est une valeur propre réelle de  $A$ , montrer que  $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$ .

**II.2.304** Mines-Ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique.

1. Montrer que  $\text{Tr}(M)^2 \leq \text{rang}(M)\text{Tr}(M^2)$ .
2. Caractériser par leurs valeurs propres les matrices symétriques réelles vérifiant le cas d'égalité.
3. Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique et définie positive.
  - (a) Montrer que  $M$  est inversible et que pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  :

$$\langle MX, X \rangle \langle M^{-1}Y, Y \rangle \geq \langle X, Y \rangle^2.$$

- (b) En déduire  $\inf\{\langle MX, X \rangle \cdot \langle M^{-1}X, X \rangle \mid \|X\| = 1\}$ .

**II.2.305** CCP PC

1. On définit l'endomorphisme  $\varphi$  de  $M_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = 2M + M^T.$$

Déterminer un polynôme annulateur de  $\varphi$ . Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

2. Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et

$$\varphi_{a,b} : M \longmapsto aM + bM^T.$$

Montrer que  $\varphi_{a,b}$  est inversible si, et seulement si,  $a^2 \neq b^2$ .

**II.2.306** ENSAM PSI

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $J$  est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ ? Quel est son spectre?
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ ? Quel est son spectre?

**II.2.307** TPE/EIVP PSI

Discuter, dans  $M_3(\mathbb{R})$ , la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel  $a$  de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}.$$

**II.2.308** Centrale PSI

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $E = F \oplus G$  et on note  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $q = \text{Id}_E - p$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $q \circ f \circ p = 0$ .

**II.2.309** Mines-Ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & & & \vdots \\ \vdots & 2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer  $\det(A + mI_n)$  pour chaque entier  $m$  avec  $1 \leq m \leq n$ .
2. Montrer que  $\chi_A$  est un polynôme scindé.
3. Montrer que, pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \lambda} = 1.$$

4. Calculer la somme et le produit des valeurs propres de  $A$ .

**II.2.310** ENS MPI 2025

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices appartenant à  $S_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A \leq B$  si  $B - A$  appartient à  $S_n^+(\mathbb{R})$ . On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

Montrer que  $f$  est décroissante.

**II.2.311** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[-1; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose, pour tout  $(f; g) \in E^2$  :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
2. Soit  $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) = 0\}$ . Calculer  $F^\perp$ .
3. Que vaut  $F + F^\perp$  ?

**II.2.312** X-ENS

Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

**II.2.313** x

Soit  $V_1, \dots, V_p$  des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  de réunion égale à  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que l'un des  $V_i$  est égal à  $\mathbb{R}^n$ .

**II.2.314** x

Donner deux modes de description d'un plan de  $\mathbb{R}^4$ .

**II.2.315** x

On note  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit  $A$  une matrice antisymétrique de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $SA$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  à spectre imaginaire pur.

**II.2.316** x

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si il existe  $(S; H) \in S_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $M = SH$ .

**II.2.317** x MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  - i) Toutes les valeurs propres (complexes) de  $A$  sont égales à 1.
  - ii)  $A = \text{Id} + N$  où  $N^n = 0$ .
2. On suppose  $A$  à coefficients rationnels. Montrer qu'il existe une matrice  $B$  appartenant à  $M_n(\mathbb{Q})$  telle que  $A = B^2$ .

Indication : on peut commencer par le cas réel.

**II.2.318** CCP MP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit  $P_n$  le polynôme caractéristique de  $A_n$ .

1. Montrer que  $P_{n+1}(X) = (X - n)P_n(X) - X(X - 1) \cdots (X - n + 1)$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ ,  $(-1)^{n-k} P_n(k) > 0$ .
3. En déduire que chaque intervalle  $]0; 1[$ ,  $]1; 2[$ ,  $\dots$ ,  $]n - 1; +\infty[$  contient exactement une valeur propre de  $A_n$ .

**II.2.319** ENS Ulm

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : M_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_3(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^3 \end{aligned}$$

Déterminer l'image de  $\Phi$ .

**II.2.320** ENS

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A, B, C$  trois matrices de  $M_2(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe un triplet  $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$  tel que  $\alpha A + \beta B + \gamma C$  ait une valeur propre double.

**II.2.321** Mines-Ponts PC

Soit un entier  $n \geq 2$ . On note  $A$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $A$  et les espaces propres correspondants.

**II.2.322** Mines-Ponts PC

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{R})$  et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.
2. On considère l'équation

$$(E) : X^2 - 3X = A,$$

en la matrice inconnue  $X$  de  $M_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Vérifier que toute solution de  $(E)$  commute avec  $A$ .
  - (b) Déterminer toutes les solutions de  $(E)$ .
3. Calculer  $A^n$  où  $n \geq 2$ .

**II.2.323** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $(e_1; e_2; e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  euclidien. Donner la matrice de rotation  $R$  autour de la droite  $D$  d'équation  $x - y + z = x + y + z = 0$  et telle que  $R(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$ .

**II.2.324** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  et  $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  tels que  $\text{rang}(f \circ g) = 2$ . Calculer  $\text{rang}(f)$  et  $\text{rang}(g)$ .

**II.2.325** Mines-Télécom MP 2024

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 - m \\ m - 2 & 0 & 1 \\ 2m & m - 2 & m - 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Déterminer le rang de  $A$  en fonction de  $m$ .

2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2y + (2 - m)z = 2 - m \\ (m - 2)x + z = 1 \\ 2mx + (m - 2)y + (m - 2)z = m - 2 \end{cases}$$

**II.2.326** X FUF 2024

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $N_1, \dots, N_n$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  nilpotentes qui commutent. Montrer que  $N_1 \cdots N_n = 0$ .

**II.2.327** CCINP MP 2021

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$ , un entier  $n \geq 3$  et

$$A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & 0 & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang}(A) = 2$ .
2. On suppose que  $\text{rang}(A) = 2$ .
  - (a) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  si et seulement si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$ .
  - (b) Donner les expressions des valeurs propres de  $A$ .
  - (c) Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur  $a, b$  et  $c$ ) pour que  $A$  soit diagonalisable.

**II.2.328** X FUF 2024

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . Soit encore  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $p^2 - 4q \leq 0$ . Montrer que  $\det(A^2 + pAB + qB^2) \geq 0$ .

**II.2.329** Mines-Télécom MP 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique telle que  $A^{2023} = A^{2024}$ .

1. Montrer que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{rang}(A)$ .
2. Le résultat reste-t-il vrai si  $A$  est seulement diagonalisable ?

**II.2.330** CCINP MP 2024

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  non colinéaire à  $I_n$  telle que  $(A + I_n)^3 = 0$ .

1. Montrer que  $A$  est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Soit  $p$  un entier naturel. Exprimer  $A^p$  en fonction de  $A^2$ , de  $A$  et de  $I_n$ .

**II.2.331** CCINP MP 2019

1. Montrer que le polynôme  $P = X^5 + 2X + 1$  admet une unique racine réelle strictement négative.
2. Soit  $A \in M_{15}(\mathbb{R})$  telle que  $P$  soit annulateur de  $A$ . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de  $A$  ? Montrer que  $\det(A) < 0$ .

**II.2.332** CCINP MP 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère les deux matrices suivantes de  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice identité de  $M_n(\mathbb{R})$ .

1. Écrire  $A$ , puis  $A^2$  sous forme de combinaisons linéaires de  $J$  et  $I$ .
2. En déduire un polynôme annulateur de  $A$ . Donner son polynôme minimal  $\pi_A$  et ses valeurs propres possibles.
3. La matrice  $A$  est-elle inversible ?
4. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme associée. Soit  $(e_1; \dots; e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  tels que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\|e_i\| = 1$  et pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ , avec  $i \neq j$ ,  $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$ .  
Montrer que  $(e_1; \dots; e_n)$  est une base de  $E$ .

**II.2.333** Mines-Ponts MP 2021

Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

**II.2.334** Mines-Ponts MP 2021

$$\text{Soit } D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que  $D = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

**II.2.335** Mines-Télécom MPI 2024

1. Montrer que

$$(P; Q) \mapsto \varphi(P; Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Calculer  $\varphi(X^p; X^q)$  pour tout  $(p; q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .
3. Orthonormaliser la base  $(1; X; X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

**II.2.336** CCINP MP 2017

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $A^n = I_n$  et telle que la famille  $\{I_n; A; A^2; \dots; A^{n-1}\}$  est libre. Démontrer que la trace de  $A$  est nulle.

**II.2.337** Mines-Ponts MP

Soit

$$\Delta = \inf_{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n} \left( \int_0^1 (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2 dt \right).$$

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \int_0^1 A(t)B(t) dt$ .

On note  $Q$  la projection de orthogonale de 1 sur  $\text{Vect}(\{X; \dots; X^n\})$ .

1. Justifier l'existence et l'unicité de  $(q_1; \dots; q_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Q = -\sum_{k=1}^n q_k X^k$  et montrer que

$$\Delta = \int_0^1 (1 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_n t^n)^2 dt.$$

2. On pose :

$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{q_1}{X+2} + \dots + \frac{q_n}{X+n+1}.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ ,  $F(k) = 0$ .

- (b) En déduire que  $F(0) = \frac{1}{(n+1)^2}$ .

3. Calculer  $\Delta$  et  $(q_1; \dots; q_n)$ .

**II.2.338** CCINP MP

Soit  $\Phi$  une application de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dans lui-même telle que

$$\Phi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'.$$

- Vérifier que  $\Phi$  stabilise  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
- On admet que  $\Phi$  est linéaire. Donner la matrice représentative de  $\Phi$  dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?
- Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
- Supposons  $\lambda$  une valeur propre de  $\Phi$  associée au vecteur propre  $P$  telle que  $\lambda \neq 1$ . Montrer que 1 est une racine de  $P$  et donner sa multiplicité.

**II.2.339** CCINP MP 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- Soit  $\omega \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$  de multiplicité  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\bar{\omega}$  est une valeur propre de  $A$  de multiplicité  $p$ .
- (a) Montrer que le polynôme  $X^3 - 3X - 4$  admet une unique racine réelle.  
(b) On suppose que  $A^3 - 3A - 4I_n = 0$ . Montrer que  $\det(A) \geq 0$ .
- On suppose que  $A^2 + A + I_n = 0$ . Montrer que  $n$  est pair.

**II.2.340** CCINP PSI 2021

Dans cet exercice,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

1. Calculer  $\chi_C(X)$ .
2. Soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $E$ , où  $\dim(E) = n+1$ . On dit que  $\varphi$  est *cyclique* s'il existe  $x \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que  $(x; \varphi(x); \varphi^2(x); \dots; \varphi^n(x))$  soit une base de  $E$ . Montrer que si  $\varphi$  est cyclique, alors sa matrice est de la forme de  $C$ .

**II.2.341** CCINP MP 2019

On se place dans l'espace  $E = C([-1; 1], \mathbb{R})$ . On pose :

$$\Phi : (f; g) \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

On appelle  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{I}$ ) le sous-espace vectoriel des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que  $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire.
3. Montrer que  $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$ .
4. Déterminer l'image de  $f$  par la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{P}$ .

**II.2.342** Centrale-Supélec MP 2022

Le but de l'exercice est de montrer que toute matrice carrée réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $P \in O_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit à éléments diagonaux nuls.
2. Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que  $u$  admet deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $\lambda\mu < 0$ . On considère deux vecteurs propres de  $u$ ,  $x$  et  $y$ , unitaires, orthogonaux et respectivement associés à  $\lambda$  et  $\mu$ . Montrer qu'il existe  $z$  unitaire tel que  $z \in \text{Vect}(\{x; y\})$  et  $\langle u(z), z \rangle = 0$ .
3. Montrer le résultat souhaité pour une matrice symétrique réelle.
4. Montrer le résultat souhaité pour toute matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.343** Mines-Ponts MP 2021

On note :

- $\mathcal{H}$  l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  de trace nulle ;
  - $\mathcal{N}$  l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de  $M_n(\mathbb{R})$ .
1. L'ensemble  $\mathcal{N}$  est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
  2. Montrer que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ .
  3. A-t-on  $\mathcal{N} = \mathcal{H}$  ?

**II.2.344** CCINP MP 2018

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , soit

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit encore  $U$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer  $\det(A(-1))$ .
2. On note  $P(x) = \det(A(a) + xU)$ . Montrer que  $P$  est polynomial de degré inférieur ou égal à 1.
3. Calculer  $P(-a)$  et  $P(1)$ . En déduire  $\det(A(a))$ .
4. Étudier la continuité de  $a \mapsto \det(A(a))$  et retrouver la valeur de  $\det(A(-1))$ .

**II.2.345** CCINP MP 2025

Soit  $x \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la matrice  $A_n \in M_n(\mathbb{C})$  définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On note  $C_n = \det(A_n)$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$C_{n+2} = (1+x^2)C_{n+1} - x^2C_n.$$

2. Calculer les valeurs exactes de  $C_1$  et  $C_2$ , puis déterminer  $C_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Discuter le résultat obtenu en fonction de  $x$ .
3. Étudier l'inversibilité de la matrice  $A_n$  en fonction de la valeur de  $x$ .

**II.2.346** Mines-Télécom 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer toutes les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$MM^TMM^TM = I_n.$$

**II.2.347** CCINP PSI 2025

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_a$  de  $M_a$ .  
 (b) Effectuer la division euclidienne de  $3\chi_a$  par  $\chi'_a$ .  
 (c) La matrice  $M_a$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ?
2. On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $M_a$  telle que  $|\lambda| > 1$ .  
 (a) Montrer que  $|a| > \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} > \frac{1}{2}$ .  
 (b) Montrer que la suite  $((M_a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle pour  $a$  suffisamment petit.

**II.2.348** CCINP MP 2025

Soit  $(a; b) \in \mathbb{C}^2$  et  $f$  l'endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}.$$

1. Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution  $z \in \mathbb{C}$  non nulle si et seulement si  $|a| = |b|$ .  
 On suppose maintenant que  $a = e^{i\alpha}$  et  $b = e^{i\beta}$ , avec  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $f$ .
3. Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f$  soit diagonalisable.

**II.2.349** TPE/EIVP PC 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $T(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer que le spectre de  $T$  est  $\{0\}$ . Déterminer le sous-espace propre associé. L'endomorphisme  $T$  est-il diagonalisable ?
3. Montrer que  $T^{n+1} = 0$ . (On pourra comparer les degrés de  $T(P)$  et  $P$  pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .)
4. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) = 0.$$

(Utiliser l'endomorphisme  $D = T + \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ .)

**II.2.350** Mines-Ponts MPI 2024

Soit  $B$  et  $M$  deux matrices de  $M_3(\mathbb{C})$  telles que  $M^3 = B$ . Que dire sur  $B$  et  $M$  ?

**II.2.351** CCINP PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AA^T = A^T A$ . On suppose que  $P = X^p$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

1. Montrer que  $P$  est annulateur de  $A^T A$ .
2. En déduire que  $A = 0$ .

**II.2.352** Mines-Ponts PSI 2022

Soit  $(a_0; a_1; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $\chi_A$ .
2. Montrer que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \chi_A \text{ est scindé à racines simples.}$$

Pour le sens direct, on montrera l'implication par deux méthodes différentes.

**II.2.353** CCINP PSI

On note  $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$ . On définit sur  $E$  le produit scalaire :

$$\forall (f; g) \in E^2, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) dt.$$

On note :

- $\mathcal{V} = \{f \in E \mid f'' = f\}$ ,
- $\mathcal{W} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ ,
- $\mathcal{H} = \{f \in E \mid f(0) = \cosh(1) \text{ et } f(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $\{\cosh; \sinh\}$  est une base de  $\mathcal{V}$ .
2. Montrer que, pour tout  $(f; g) \in \mathcal{F} \times E$  :

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0).$$

Calculer  $\langle \cosh, \sinh \rangle$ ,  $\|\cosh\|^2$  et  $\|\sinh\|^2$ .

3. Montrer que pour tout  $(f; g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ ,  $\langle f, g \rangle = 0$ .
4. Soit  $f \in \mathcal{H}$ .

Calculer  $\langle f, \cosh \rangle$  et  $\langle f, \sinh \rangle$ .

En déduire les composantes dans la base  $(\cosh; \sinh)$  de la projection orthogonale  $\Pi_{\mathcal{V}}(f)$  sur  $\mathcal{V}$ .

5. Calculer :

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} \int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2 dt.$$

**II.2.354** ENSEA/ENSIIE MP 2021

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Calculer  $\exp(A)$ .

**II.2.355** Mines-Ponts PC 2025

Soit  $(A; B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ .

On suppose qu'il existe  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $AB = \alpha A + \beta B$ .

Montrer qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  soient triangulaires supérieures.

**II.2.356** Mines-Ponts MP 2016

1. Soit  $A$  une matrice antisymétrique réelle de taille  $n$ . Montrer que  $A^2$  est diagonalisable. Montrer que ses valeurs propres sont négatives ou nulles. En déduire des informations sur  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale des zéros et des blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**II.2.357** Mines-Ponts MP 2024

Déterminer la dimension du  $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  engendré par les racines cinquièmes de l'unité.

**II.2.358** CCINP PC 2022

Pour toute matrice  $M$  de  $M_d(\mathbb{C})$ , on pose :

$$\|M\|_\infty = \max \{|m_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

1. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. On pose  $N = A - I_3$ . Calculer  $N^2$ , puis les autres puissances de  $N$ .
3. Déterminer la limite de  $\|A^n\|_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. Vérifier que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $M_d(\mathbb{C})$ .
5. Pour tout couple  $(M; N)$  de matrices de  $M_d(\mathbb{C})$ , prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leq d\|M\|_\infty\|N\|_\infty.$$

6. On suppose que  $M$  est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Déterminer la limite de  $\|M^n\|_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**II.2.359** Mines-Ponts PSI 2023

Soit  $A \in M_4(\mathbb{R})$  telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $A^k = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $p \leq 4$  entier tel que  $A^p = 0$  et  $A^{p-1} \neq 0$ .
2. On suppose que  $p = 4$ . Montrer que  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.360** CCINP MP 2021

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit encore  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que si  $u$  est nilpotent, alors  $u^n = 0$ .
2. On suppose  $n \geq 2$ , où  $n$  est tel que  $u^n = 0$  et  $u^{n-1} \neq 0$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  telle que la matrice  $A$  de  $u$  dans la base  $e$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Résoudre l'équation  $X^2 = A$ , avec  $X \in M_n(\mathbb{K})$ .

**II.2.361** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\det(\lambda A^2 + I_n) \geq 0$ .
2. On suppose maintenant que  $A$  est antisymétrique.  
Montrer que le résultat précédent est alors valable pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**II.2.362** CCINP MP 2022

Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $a^2 + b^2 \neq 0$  et  $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $MM^T$ . En déduire  $\det(M)$ .
2. (a) Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ , montrer que  $\text{rang}(M) = 4$ .  
(b) Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ , montrer que  $\text{rang}(M) = 2$ .
3. Soit  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$ .
  - (a) Quelles sont les valeurs propres de  $M$  ?
  - (b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.363** CCINP PC 2017

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Calculer  $M^2$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

**II.2.364** Mines-Télécom MP 2018

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Montrer qu'il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que  $A - \lambda I_3$  soit nilpotente.

**II.2.365** CCINP MP 2017

Considérons l'ensemble  $E$  des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel. Trouver la dimension de  $E$ .  
(On pourra utiliser l'application  $u \mapsto (u_0; u_1; u_2)$ .)
2. Déterminer les solutions de l'équation  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . En déduire une base de  $E$ .

$$3. \text{ On considère la matrice réelle } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{2}{3}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}2^n \\ \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{4}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}2^n \end{pmatrix}.$$

4. On fixe  $(u_0; u_1; u_2) \in \mathbb{R}^3$ , définissant une suite  $u$  de  $E$ .

$$\text{Calculer } A \cdot U_0, \text{ où } U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  ainsi que de  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .

**II.2.366** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $L \neq 0$ .

**II.2.367** Mines-Ponts PSI 2021

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  diagonalisables dans  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $A^2 = B^2$  et  $A^3 = B^3$ .  
Montrer que  $A = B$ . Est-ce toujours vrai si  $A$  et  $B$  ne sont pas diagonalisables ?

**II.2.368** Mines-Ponts MP 2024

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f^2 = 0$ . Soit  $F$  un plan vectoriel stable par  $f$ .  
Montrer que  $\text{Im}(f) \subset F$ .

**II.2.369** ENSAE MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $u$  un endomorphisme n'ayant que  $E$  et  $\{0\}$  pour seuls sous-espaces vectoriels stables.

1. Montrer que  $u$  ne possède pas de valeur propre.
2. En déduire que  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ , la famille  $(x; u(x); u^2(x); \dots; u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .
4. Comment est la matrice de  $u$  dans cette base ?

**II.2.370** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $P = \chi_f$ .

1. Montrer que si  $P$  est irréductible, alors les seuls sous-espaces stables par  $f$  sont  $E$  et  $\{0_E\}$ .
2. La réciproque est-elle vraie ?

**II.2.371** CCINP PSI 2024

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  ayant le même polynôme caractéristique  $P$ .

1. On suppose que  $P$  admet  $n$  racines. Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

**II.2.372** Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k).$$

1. Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles nécessairement semblables ?
2. Traduire par une condition sur les valeurs propres de  $A$  et  $B$  l'hypothèse de l'exercice.
3. Montrer que  $\chi_A = \chi_B$ .

**II.2.373** Mines-Télécom MP 2019

On note  $P_n$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\{0; 1\}$ , telles qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que toute matrice  $P_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**II.2.374** CCINP PSI 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u^2 = 0$  et  $\text{rang}(u) = n$ .

Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$  et qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $u$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{3n}$  tel que  $u^3 = 0$  et  $\text{rang}(u) = 2n$ .

Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$  et qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $u$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

**II.2.375** CCINP MP 2022

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 - \alpha & \alpha - 2 & \alpha \end{pmatrix}$ .

- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la matrice  $A_\alpha$  est-elle diagonalisable ?
- Calculer  $A_2^n$  et  $A_1^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.376** Mines-Ponts MP 2021

- Montrer que si  $H$  est un hyperplan d'un espace vectoriel  $E$ , alors il existe une forme linéaire  $\varphi$  non nulle de  $E$  telle que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ .
- Soit  $H$  un hyperplan de  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $H$  contient au moins une matrice inversible.

**II.2.377** Centrale-Supélec MP 2021

- Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  nilpotente.  
Montrer l'existence de  $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0\}$  et que  $d \leq n$ .
- Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  nilpotente.  
Montrer que  $M^2 - I_n$  est inversible et déterminer son inverse.
- Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$ .  
Montrer que  $\text{Tr}(M) \leq n$ , puis étudier le cas d'égalité.

**II.2.378** Mines-Télécom MP 2023

- Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ .  
Montrer que  $\det(AB - I_n) = \det(BA - I_n)$ .
- Généraliser le résultat avec  $A$  non inversible.  
Indication : on pourra considérer la suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $A_p = A - \frac{1}{p}I_p$ .

**II.2.379** Mines-Ponts MP 2022

Pour  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $n \geq 2$ , calculer le déterminant  $n \times n$  :

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z - \frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z - \frac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z - \frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

**II.2.380** CCINP PC 2023

Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2}(P(X) - P(1 - X)) \end{aligned}$$

1. Calculer  $\varphi^2$ .
2. Démontrer que :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect} \left( \left\{ X - \frac{1}{2}; \left(X - \frac{1}{2}\right)^3 \right\} \right) \text{ et } \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect} \left( \left\{ 1; \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \right).$$

3. Montrer que  $\varphi$  est un projecteur et en identifier les éléments géométriques.

**II.2.381** CCINP PSI 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p$  et  $q$  deux endomorphismes de  $E$  tels que :

$$p + q = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rang}(p) + \text{rang}(q) \leq n.$$

Montrer que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs.

**II.2.382** CCINP PSI 2024

Soit  $A \in M_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $A^3 + A = 0$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset \{0; i; -i\}$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ?
3. On suppose que  $A \in M_3(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?

**II.2.383** Mines-Télécom MP 2024

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le plan  $P$  d'équation  $x + 2y + z = 0$ . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $P$ .

**II.2.384** CCINP PC 2023

- On note  $F$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ , stable par produit. Donner la dimension de  $F$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - 1$  ne contenant pas  $I_n$  et stable par produit.
  - Rappeler la valeur de  $E_{ij} \cdot E_{kl}$  avec  $i, j, k, l \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .  
(On rappelle que  $E_{ij}$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice  $(i; j)$  qui vaut 1.)
  - Montrer que  $M_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(\{I_n\})$ .
- Soit  $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$  et  $p : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  le projecteur sur  $\text{Vect}(\{I_n\})$  parallèlement à  $F$ .  
Montrer que  $p(MM') = p(M)p(M')$ .
  - Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .  
Montrer que si  $M^2 \in F$ , alors  $M \in F$ .
- Déduire des questions précédentes que  $E_{ij} \in F$  pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ , puis conclure.
- Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - 1$ . Est-il stable par produit ?

**II.2.385** TPE/EIVP MP 2018

Calculer le déterminant de la matrice  $A = (\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**II.2.386** Mines-Télécom PC 2022

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

Trouver les éléments propres de  $A$ .

Indication : calculer  $\text{Tr}(A^2)$ .

**II.2.387** Centrale-Supélec TSI 2021

Soit  $P$  le plan d'équation cartésienne  $x + y + z = 0$ . Déterminer les endomorphismes  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $\text{Im}(f) = P$  et  $\text{Ker}(f) \subset P$ .

**II.2.388** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$  tel que  $f^3 + f = 0$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.389** CCINP PSI 2022

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que la matrice de  $f$  dans toute base de  $E$  soit égale à une même matrice  $A$ .

1. Montrer que, pour tout  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $PA = AP$ .
2. Soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) En déduire que  $AB = BA$ .
  - (c) Montrer que  $f$  est une homothétie.

**II.2.390** CCINP PC 2024

Soit  $n \geq 2$  entier.

1. Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ .

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $J$ .

2. Montrer qu'il n'existe pas de forme linéaire  $\varphi$  de  $M_n(\mathbb{C})$  telle que pour toute matrice  $M$  de  $M_n(\mathbb{C})$ , le nombre  $\varphi(M)$  est une valeur propre de  $M$ .

**II.2.391** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A^T A$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

**II.2.392** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Considérons une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$ .

1. Rappeler la définition de  $\text{Ker}(f)$  et de  $\text{Im}(f)$ .  
Démontrer que ce sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.
2. Démontrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f)$  est réduit à  $\{0_E\}$ .

**II.2.393** CCINP TSI 2019

Soit  $A_{2n}$  la matrice de  $M_{2n}(\mathbb{R})$  donnée par

$$A_{2n} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } j = 2n + 1 - i \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner  $A_2$  et  $A_4$ .
2. On note  $\Delta_{2n} = \det(A_{2n})$ .  
Calculer  $\Delta_2$  et  $\Delta_4$ .
3. Calculer  $\Delta_{2n}$  si  $a = 0$ .
4. Calculer  $\Delta_{2n}$  si  $a \neq 0$ .

**II.2.394** CCINP PC 2017

Soit  $M(a; b; c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$  et  $E = \{M(a; b; c) \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$ .

1. On note  $J = M(0; 1; 0)$ . Calculer  $J^2$ . Exprimer  $M(a; b; c)$  en fonction de  $I_3$ ,  $J$  et  $J^2$ .
2. L'ensemble  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ ? Si oui, quelle est sa dimension? Est-il stable par produit?
3. La matrice  $J$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Donner ses valeurs propres en fonction de  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ?
5. Montrer que  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $b = c$ .
6. On note  $f_{a,b,c}$  l'endomorphisme associé à la matrice  $M(a; b; c)$ . Donner des conditions portant sur  $a, b, c$  pour que  $f_{a,b,c}$  soit un projecteur. Donner alors son image et son noyau.

**II.2.395** Mines-Ponts MP 2024

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{pmatrix}.$$

**II.2.396** CCINP MP 2022

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$  avec  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ .

1. À quelles conditions sur  $(a; b; c)$ , la matrice  $M$  est-elle la matrice d'une isométrie vectorielle directe?
2. On pose  $\alpha = a + b + c$  et  $\beta = ab + ac + bc$ , et on donne l'identité suivante :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 2(ab + ac + bc)(a + b + c)^2.$$

Traduire le système de la question 1 avec  $\alpha$  et  $\beta$ .

3. Montrer l'équivalence suivante :  
La matrice  $M$  appartient à  $SO_3(\mathbb{R})$  si et seulement si il existe  $k \in \left[0; \frac{4}{27}\right]$  tel que  $a, b$  et  $c$  soient les racines du polynôme  $X^3 - X^2 + k$ .
4. On suppose que  $M \in SO_3(\mathbb{R})$  et que  $M \neq I_3$ . La matrice  $M$  est donc la matrice canoniquement associée à une rotation de l'espace  $\mathbb{R}^3$  orienté, notée  $r$ . Déterminer l'axe  $D$  de la rotation  $r$ .
5. Orienter l'axe  $D$  et déterminer l'angle de  $r$ .

**II.2.397** ENS MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A + A^T = I_n$ . Montrer que  $\det(A) > 0$ .

**II.2.398** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $A = (|a_i - a_j|)_{(i,j) \in [1;n]} \in M_n(\mathbb{R})$ .

Calculer  $\det(A)$ .

**II.2.399** ENSEA/ENSIIE MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de polynôme caractéristique scindé et  $P$  un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que la matrice  $P'(A)^2 - P(A)P''(A)$  est inversible.

**II.2.400** CCINP PC 2019

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

On note  $S = a + b + c$  et  $\sigma = ab + bc + ca$ .

1. Montrer que  $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff S = \pm 1$  et  $\sigma = 0$ .
2. Préciser une condition pour  $A$  appartienne à  $SO_3$ .

**II.2.401** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $M$  la matrice carrée antidiagonale réelle de taille  $2n$ , d'éléments antidiagonaux  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit diagonalisable.

**II.2.402** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & \dots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**II.2.403** Mines-Ponts PC 2023

On fixe  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  et on pose  $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la matrice  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$ .

1. Trouver un nombre réel  $\theta$  tel que  $M^3 = -\theta M$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer l'égalité  $M^{2n} = (-\theta)^{n-1} M^2$ .
3. Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Sa limite est notée  $S_\infty$ .
4. Trouver deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $S_\infty = I_3 + \alpha M + \beta M^2$ .

**II.2.404** CCINP PSI 2023

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A^T$ ,  $A \neq I_2$  et  $A$  inversible.

1. Déterminer un polynôme annulateur de  $A$ .
2. Déterminer le spectre de  $A$ .
3. Montrer que  $A$  est une matrice orthogonale.
4. Calculer  $\det(A)$ .
5. Déterminer les matrices  $A$ .

**II.2.405** Mines-Ponts PC 2018

On fixe  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$ .

1. La matrice  $A_n$  est-elle diagonalisable dans  $M_2(\mathbb{R})$ ? dans  $M_2(\mathbb{C})$ ?  
Déterminer ses éléments propres.
2. On pose  $z_n = 1 + \frac{i\alpha}{n}$  et  $u_n = (z_n)^n$ .
  - (a) Montrer que  $z_n$  possède un argument  $\theta_n$  dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .
  - (b) Trouver un équivalent de  $\theta_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - (c) Déterminer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**II.2.406** Centrale-Supélec PC 2022

1. Donner un exemple de matrice de  $M_2(\mathbb{C})$  non diagonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de  $M_2(\mathbb{C})$  symétrique et non diagonalisable.

**II.2.407** Mines-Ponts MP 2018

On note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices nilpotentes et on prend  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . A-t-on l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- i)  $M$  est diagonalisable ;
- ii)  $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(M) \in \mathcal{N} \implies P(M) = 0$  ?

**II.2.408** Mines-Télécom MP 2025

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer sans calculs :
  - (a) l'image et le noyau de  $A$  (exhiber une base) ;
  - (b) les espaces propres de  $A$  (trouver les valeurs propres et une base pour chaque sous-espace).
2. Diagonaliser la matrice  $A$ .

**II.2.409** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \|A^n\|_\infty \leq M.$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.410** TPE/EIVP PSI 2019

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -a & 4+a & -(1+a) \\ 4+a & 1+a & a \\ 1+a & -a & -(4+a) \end{pmatrix}$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $A$  appartienne à  $SO_3(\mathbb{R})$ .
2. Quel est l'endomorphisme associé à  $A$  dans ce cas ?

**II.2.411** CCINP PSI 2017

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments deux à deux distincts d'un corps (commutatif)  $\mathbb{K}$ .

1. Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $M$  commute avec  $D$  si et seulement si  $M$  est diagonale.
2. Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré au plus  $n - 1$  tel que  $M = P(D)$ .

**II.2.412** CCINP PSI 2016

Une *matrice à diagonale propre* est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note  $\varepsilon_n$  l'ensemble des matrices à diagonale propre de  $M_n(\mathbb{R})$ .

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.

2. Soit la matrice antisymétrique  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Est-ce que  $A$  est une matrice à diagonale propre ?

3. Soit  $A$  appartenant à  $\varepsilon_n$  antisymétrique.
  - (a) Donner les valeurs propres de  $A$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $p \geq 2$  tel que  $A^p = 0$ .
  - (c) Calculer  $(A^T A)^p$  et en remarquant que  $A^T A$  est symétrique, montrer que  $A = 0$ .
  - (d) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel  $A_n(\mathbb{R})$  des matrices antisymétriques de  $M_n(\mathbb{R})$ .
  - (e) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\varepsilon_n$ . Montrer que  $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .

**II.2.413** ENS MP 2024

Déterminer les matrices  $M \in M_n(\mathbb{R})$  qui sont semblables à  $2M$ .

**II.2.414** Mines-Télécom MP 2024

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto -A + \text{Tr}(A)I_n\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(\text{Tr})$  est un hyperplan de  $M_n(\mathbb{R})$ .
4. Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

**II.2.415** Mines-Ponts PC 2023Soit  $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ .

On suppose que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $AB$  est une matrice de projection.
2. Montrer que  $BA = I_2$ .

**II.2.416** X MP 2017Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda \leq \mu$  les valeurs propres de  $A$ .Montrer que  $\lambda \leq a \leq \mu$ .**II.2.417** CCINP PSI 2024Soit  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $MM^T = M^T M$  et  $M^2 + 2I_2 = 0$ .

1. Montrer que  $M^T M$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $\text{Sp}(M^T M) \subset \{-2; 2\}$ .
3. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M^T M)$ ,  $\lambda \geq 0$ . En déduire  $\text{Sp}(M^T M)$ .
4. Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{2}}M$  est orthogonale.
5. Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{2}}M$  est la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  à déterminer.
6. Déterminer toutes les matrices  $M$  possibles.

**II.2.418** Mines-Télécom MP 2021On note  $E = C([0; 1])$ . On munit  $E$  du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) dt.$$

Soit  $H = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$ . Déterminer le projeté orthogonal sur  $H$  de la fonction  $g : x \mapsto x$ .

**II.2.419** Mines-Ponts PC 2019

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et  $u$  dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , on pose  $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .
2. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $\text{Ker}(\Delta^p)$ .
3. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $u$  dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , expliciter  $\Delta^p(u)$ .

**II.2.420** CCINP MP 2017

1. Démontrer que l'application  $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\phi(P; Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$$

est un produit scalaire.

2. Calculer  $\phi(X^p; X^q)$  pour tous  $p$  et  $q$  entiers naturels.
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**II.2.421** Mines-Télécom PC 2021

1. Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ .

Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau de  $M$ .

2. Toujours sans calcul, diagonaliser la matrice  $M$ .

**II.2.422** X MP 2016

On définit sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel un « pseudo produit scalaire » par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

Soit  $M \in M_2(\mathbb{C})$ . Montrer alors l'équivalence des propriétés suivantes :

- i)  $M$  est diagonalisable dans une base « pseudo orthonormée » ;
- ii)  $\exists (y; z) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in ]0; 2\pi[$  tels que

$$M \text{ est diagonale ou } M = \begin{pmatrix} y & ze^{i\theta} \\ ze^{-i\theta} & y + \mu z \end{pmatrix};$$

- iii)  $\overline{M^T} M = M \overline{M^T}$ .

**II.2.423** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k = I_n$ .  
Montrer que  $A^2 = I_n$ .

**II.2.424** CCINP MP 2021

Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 3. On définit le produit scalaire suivant : si  $X, Y \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ . Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1. Une matrice  $A \in M_m(\mathbb{R})$  est dite de *type*  $n$  lorsque  $A^T = A^n$ .

- Comment appelle-t-on une matrice de type 1 ?  
Pour la suite, on prendra  $n \geq 2$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $N(x)$  suivante :

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

- Montrer que pour tout  $k > 0$ ,  $N(x)^k = N(kx)$ .
- Déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $N(x)$  est une matrice de type  $n$ .  
Pour la suite, on prendra  $m = 3$ .  
Soit  $A \in M_m(\mathbb{R})$  une matrice de type  $n$ . Soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = A^{n+1}$ .
- Montrer que  $A^{n^2} = A$ .
- Montrer que  $B^n = B$  puis que  $B$  est symétrique. Quelles sont les valeurs possibles de  $B$  ?
- Montrer que  $-1$  ne peut pas être valeur propre.

**II.2.425** Mines-Télécom MP 2021

- Soit  $a > 0$ .  
On définit une suite récurrente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $x_0 > 0$  et  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ .  
Étudier la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  (ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives). Montrer qu'il existe une unique matrice  $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .

**II.2.426** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $f$  un endomorphisme de  $M_2(\mathbb{C})$  tel que  $\text{Tr}(f(I_2)) = 0$  et pour toute matrice  $N$  nilpotente,  $f(N) = 0$ . Montrer que  $f$  est nilpotente.

**II.2.427** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $P \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice de projection. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto PM + MP \end{aligned}$$

- Démontrer que pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on a

$$f^2(M) = PM + 2PMP + MP.$$

- Démontrer que  $f$  est diagonalisable.
- Déterminer la trace de  $f$  en fonction de  $n$  et du rang de  $P$ .

**II.2.428** CCINP PSI 2019

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  et le système  $(S)$  
$$\begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \text{Tr}(M) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que si  $M$  vérifie  $(S)$ , alors les valeurs propres de  $M$  sont les racines du polynôme  $P = X^3 - 4X^2 + 4X$ .
2. Déterminer toutes les matrices  $M$  de  $M_n(\mathbb{R})$  qui vérifient  $(S)$ .

**II.2.429** Mines-Télécom MP 2022

On considère l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application  $u$  est un endomorphisme.
2. Montrer que  $u$  est diagonalisable et exprimer son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de  $u$ .

**II.2.430** Mines-Ponts MP 2014

Déterminer toutes les matrices  $A$  et  $B$  telles que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AMB) = \frac{1}{n} \text{Tr}(AB) \text{Tr}(M) ?$$

Indication : commencer par le cas  $B = I_n$ .

**II.2.431** CCINP MP 2024

Soit  $u$  l'application de  $M_3(\mathbb{C})$  qui à  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$  associe la matrice  $\begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ z & y & x \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres associés à l'endomorphisme  $u$ .
3. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
4. Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de  $u$ .

**II.2.432** Mines-Télécom MP 2024

Soit

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

**II.2.433** Mines-Ponts MP 2019

On note  $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0_n\}$ .

1. L'ensemble  $A$  est-il un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  ?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$ , contenu dans  $A$  ?
3. Qu'en est-il dans  $\mathbb{R}$  ? On s'intéressera surtout au cas  $n = 2$ .

**II.2.434** CCINP MP 2017

Considérons l'application  $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $T(M) = M^T$ .

1. Étudier le rang de  $T$ .
2. Donner la matrice de  $T$ .
3. Déterminer le déterminant de  $T$  et sa trace.
4. Étudier la diagonalisabilité de  $T$ .
5. Que peut-on dire de la matrice  $M + M^T - 2I_n$  si  $M \in M_n(\mathbb{R})$  ?

**II.2.435** Mines-Télécom MP 2019

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $\text{com}(A)$  sa comatrice. On suppose que  $A$  est inversible. Déterminer le spectre de  $\text{com}(A)$  en fonction de celui de  $A$ .

**II.2.436** Mines-Ponts MP 2025

Montrer que pour tout  $A \in \mathbb{C}$ ,

$$A^2 = A \iff \text{rang}(A) \leq \text{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \text{rang}(I_n - A) \leq \text{Tr}(I_n - A).$$

**II.2.437** Centrale-Supélec 2017

1. Rappeler le théorème du rang.
2. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  tel que l'on ait  $f^{n-1} = 0$  et  $f^{n-2} \neq 0$ .  
Montrer que, pour tout  $0 < k < n$ ,  $\dim(\text{Ker}(f^k)) = k + 1$ .
3. Montrer qu'il existe une base de  $E$  telle que l'écriture matricielle de  $f$  dans cette base est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.438** Mines-Ponts PSI 2021

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $B = A^3 + A + I_n$ .  
Montrer que  $A \in \mathbb{R}[B]$ .

**II.2.439** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $f$  un endomorphisme de  $M_2(\mathbb{R})$  tel que :

- $f(N) = 0$  pour toute matrice nilpotente  $N$  ;
- $\text{Tr}(f(I_2)) = 0$ .

Montrer que  $f \circ f = 0$ .

**II.2.440** CCINP MP 2021

1. (a) Déterminer trois polynômes  $A, B, C \in \mathbb{R}_2[X]$  tels que :

- $A(-1) = 1, A(0) = 0, A(1) = 0,$
- $B(-1) = 0, B(0) = 1, B(1) = 0,$
- $C(-1) = 0, C(0) = 0, C(1) = 1.$

(b) Montrer que  $(A; B; C)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Soit  $v$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], v(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C.$$

(a) Montrer que  $\text{rang}(v) \leq 3$ . Qu'en déduit-on sur  $\text{Ker}(v)$  ?

(b) Déterminer une base de  $\text{Ker}(v)$ .

(c) Déterminer les valeurs propres de  $v$ . L'endomorphisme  $v$  est-il diagonalisable ?

**II.2.441** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On définit une application  $u : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$  telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, u(P)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n.$$

1. Montrer que  $u$  est bien définie et que  $u$  est un automorphisme.

2. Donner les valeurs propres de  $u$ .

**II.2.442** Mines-Ponts PC 2016

Soit  $S = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre  $n$ .

1. Pour tout  $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , montrer que :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

2. En déduire que :

$$\det(S) \leq \left( \frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n.$$

3. Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ii} > 0$ .

4. On note  $D = \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \right)$  et  $A = DSD$ .

(a) Montrer que  $A$  est symétrique définie positive.

(b) En déduire que  $\det(S) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .

**II.2.443** Centrale-Supélec MP 2017

Soit  $G$  l'ensemble des matrices  $M(a)$  de la forme

$$\begin{pmatrix} -3 & 9a & -4 + 3a \\ -1 & 1 + 3a & -1 + a \\ 3 & -9a & 4 - 3a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ réel.}$$

1. Montrer que  $G$  est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?
2. Qu'est-ce que  $M(0)$  géométriquement. Déterminer  $\text{Ker}(M(0))$  et  $\text{Im}(M(0))$ .
3. Montrer qu'il existe  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.444** Mines-Télécom MP 2023

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$A^2 = -I_n \implies \det(A) = 1.$$

**II.2.445** Mines-Ponts PC 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } AB = BA = 0.$$

2. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{N}^*, (A + B)^k = A^k + B^k.$$

**II.2.446** CCINP MP 2021

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ .

1. Montrer que  $\varphi : (f; g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Calculer  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Donner une base orthonormée de  $F = \mathbb{R}_2[X]$ .
4. Déterminer le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $F$ .
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt}.$$

**II.2.447** CCINP PC 2018

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$ .
2. Quelles déductions peut-on faire sur les valeurs propres de  $A$  ?

**II.2.448** CCINP PC 2024

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $a, b \in E$ .

On pose :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + \langle a, x \rangle b \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si  $\langle a, b \rangle \neq 0$ .

**II.2.449** CCINP PC 2024

On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique. On suppose que  $A$  et  $B$  sont des matrices réelles symétriques telles que  $A^2 = B^2$ . On admet que, pour toute matrice diagonale,  $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$ . L'objectif de l'exercice est de montrer l'existence d'une matrice orthogonale  $P$  telle que  $PA = B$ .

1. Montrer que :

$$\forall X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}), (AX)^T AX = (BX)^T BX.$$

2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de  $A$ .
  - (a) Montrer que  $A$  est inversible. Montrer alors que  $BA^{-1}$  est orthogonale.
  - (b) Conclure.
3. On suppose maintenant que 0 est valeur propre de  $A$ , de multiplicité  $p$ .
  - (a) Montrer que  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^2)$ . En déduire que  $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$ .
  - (b) Montrer que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$  et en déduire que 0 est valeur propre de  $B$ . Préciser sa multiplicité.

**II.2.450** CCINP MPI 2025

On note  $T$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - 5X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de  $T(X^n)$  pour tout entier naturel  $n$ . Calculer  $T(X^k)$  pour  $k = 0, \dots, 4$ .
2. Montrer que si  $P$  est colinéaire à  $T(P)$ , alors  $P$  est de degré 3.
3. L'endomorphisme  $T$  est-il injectif ? surjectif ?
4. Montrer que la restriction de  $T$  à  $\mathbb{R}_3[X]$ , notée  $T_1$ , définit un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de  $T_1$  dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de  $T_1$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**II.2.451** Mines-Télécom PSI 2025

Soit  $a > 0$  fixé. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que  $M$  admet une unique valeur propre réelle  $r$ .  
On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = \text{Tr}(M^n)$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{r^n}$ .

**II.2.452** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe un polynôme annulateur  $P$  de  $f$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ . Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires.

**II.2.453** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $F$  une matrice réelle symétrique de taille  $n$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall t \in [-\alpha; \alpha], \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \text{Tr}(F^k)\right) = \det((I_n - tF)^{-1}).$$

**II.2.454** ENS MP 2025

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB - BA$  est de rang 1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables.

**II.2.455** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{Z})$  telles que, pour tout  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $A + kB \in GL_n(\mathbb{Z})$ . Quelle est la valeur de  $|\det(A)|$  ? de  $\det(B)$  ?

**II.2.456** CCINP PC 2017

Soit  $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

1. Calculer  $\det(A_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Les matrices  $A_n$  sont-elles inversibles pour tout  $n \geq 1$  ?

**II.2.457** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . On définit  $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$  :

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & B & A \\ A & B & B \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de  $M$ .
2. Calculer  $M^{-1}$ , lorsqu'elle existe, en fonction de  $A^{-1}$  et de  $(B - A)^{-1}$ .

**II.2.458** Mines-Ponts PC 2022

On considère une famille  $\mathcal{F} = \{F_1; \dots; F_p\}$  d'éléments de  $M_{p \times 1}(\mathbb{R})$  et une famille  $\mathcal{G} = \{G_1; \dots; G_n\}$  d'éléments de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

Pour tout  $i \in \{1; \dots; p\}$  et pour tout  $j \in \{1; \dots; n\}$ , on pose  $M_{ij} = F_i \times G_j^T$ .

1. Montrer que la famille  $\{M_{ij}\}_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$  est une base de  $M_{n \times p}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une base de  $M_{p \times 1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{G}$  est une base de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .
2. Soit un entier  $r \leq \min(p; n)$ . Déterminer le rang de la matrice  $\sum_{k=1}^r M_{kk}$ .

**II.2.459** Mines-Télécom MP 2023

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Pour quels réels  $a$  la suite  $(a^n A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle vers une limite non nulle ?

**II.2.460** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. On suppose que  $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A)$ . Montrer que  $A$  est la matrice d'un projecteur.

**II.2.461** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0; 1]$  à valeurs réelles. On pose  $\phi : f \mapsto F$ , avec

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x \neq 0$$

et  $F(0) = f(0)$ .

1. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\phi$ .

**II.2.462** Mines 2023

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $N \in M_n(\mathbb{K})$  nilpotente. Montrer que  $\exp(N) - I_n$  est nilpotente.

**II.2.463** Mines

On considère la matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $C$  est diagonalisable.

**II.2.464** Mines 2024

Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{com}(A) \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

**II.2.465** Mines 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $p \geq 1$  tel que  $M^{p+2} = M^2$  et que  $\text{Tr}(M) = n$ . Déterminer  $M$ .

**II.2.466** Mines 2024

1. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Trouver une relation entre  $\chi_A$  et  $\chi_{A^{-1}}$ .
2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Trouver une relation entre  $\chi_A$ ,  $\chi_{A^2}$  et  $\chi_{-A}$ .

**II.2.467** Mines 2024

Soit  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ .  
Quel est le rang de la matrice  $(P_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  ?

**II.2.468** Mines 2022

Soit  $A$  une matrice symétrique de  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}| \leq n \sqrt{\text{rang}(B)}.$$

**II.2.469** CCP 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A^T A$ .

1. Montrer que, pour tout  $\mu \in \mathbb{R}^*$  :

$$\text{Ker}(A^2 - \mu^2 I_n) = \text{Ker}(A - \mu I_n) \oplus \text{Ker}(A + \mu I_n).$$

2. En déduire le polynôme caractéristique de  $A$ , et discuter le caractère diagonalisable de  $A$ .

**II.2.470** Centrale 2022

On note  $N_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $M_n(\mathbb{C})$ . Pour  $M \in N_n(\mathbb{C})$ , on désigne par  $d(M)$  l'indice de nilpotence de  $M$ . On note enfin  $\mathbb{C}[M]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en  $M$ .

1. Soit  $N \in N_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $\mathbb{C}[N]$  est un espace vectoriel de dimension  $d(N)$ .
2. Soit  $N \in N_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $N + I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ , puis que  $N^2 + 2N \in N_n(\mathbb{C})$  avec  $d(N^2 + 2N) = d(N)$ .
3. Montrer que  $\phi : N \mapsto N^2 + 2N$  réalise une injection de  $N_n(\mathbb{C})$  dans lui-même.

**II.2.471** Mines 2024

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On dit qu'un endomorphisme de  $E$  est une transvection lorsque :

$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n + \lambda E_{ij}$$

pour une certaine base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , un certain  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $i, j \in \{1; \dots; n\}$  distincts. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- i)  $u$  est une transvection ;
- ii)  $\text{rang}(u - \text{Id}) = 1$  et  $(u - \text{Id})^2 = 0$ .

**II.2.472** Mines 2024

On considère  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ainsi que :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables, alors il en est de même pour :

$$C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}.$$

**II.2.473** ENS 2023

Pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on note  $\varphi_A : M \mapsto AM$ .

1. Montrer que  $\|\varphi_A\| \leq \|A\|_2$ .
2. Donner une sous-algèbre stricte de  $M_n(\mathbb{R})$  stable par transposition.
3. On définit la sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \mid (M_1; M_2) \in M_p(\mathbb{R}) \times M_q(\mathbb{R}), p + q = n \right\}.$$

On admet que  $B = \{\varphi_A \mid A \in \mathcal{S}\}$  est une sous-algèbre de  $L(M_n(\mathbb{R}))$ . Décrire l'ensemble des endomorphismes de  $M_n(\mathbb{R})$  qui commutent avec tous les éléments de  $B$ .

**II.2.474** CCP 2023

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .
3. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire  $\exp(A)$ .
4. Montrer que  $A$  est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Trouver une autre méthode pour calculer  $A^n$ .

**II.2.475** CCP 2023

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de  $A$ .
3. Calculer le polynôme minimal et les valeurs propres de  $A$ . En déduire le polynôme caractéristique de  $A$ .

**II.2.476** Centrale 2022

Pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on pose  $\varphi_A : M \mapsto \text{Tr}(AM)$  et  $\tau_A : M \mapsto MA - AM$ .

1. On suppose que  $A$  est nilpotente. Montrer que  $\text{Ker}(\tau_A) \subset \text{Ker}(\varphi_A)$ .
2. On suppose qu'il existe  $B \in M_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = BA - AB$ .  
Calculer  $BP(A) - P(A)B$  pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ . En déduire que  $A$  est nilpotente.
3. Caractériser les hyperplans  $H$  de  $M_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $\text{Im}(\tau_A) \subset H$ . En déduire l'existence de  $B \in M_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = BA - AB$ .
4. Montrer que  $A \exp(I_n + B) = \exp(B)A$ .

**II.2.477** Mines 2024

Soit  $n \geq 1$  entier. On considère le produit scalaire suivant sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

On se donne  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$ , et pour  $P \in E$ , on pose :

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} \Pi(x+t)P(t)e^{-t} dt.$$

1. Montrer que  $u$  est auto-adjoint et bijectif.
2. On considère une base orthonormée  $(P_0; \dots; P_n)$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ , chaque  $P_i$  étant associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$\Pi(x+y) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)P_k(y).$$

**II.2.478** Mines 2024

1. Existe-t-il une norme  $\|\cdot\|$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$  ?
2. Existe-t-il une norme  $\|\cdot\|$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $P \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$  ?
3. Même question que la première avec une semi-norme.

**II.2.479** Mines 2023

Pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ , on pose  $\|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ .

On considère  $b \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|b| < 1$ , et  $f : P \mapsto P(b)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Montrer que  $f$  est continue pour  $\|\cdot\|$ .
3. Déterminer  $\|f\|$  sous réserve d'existence.

**II.2.480** Mines 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On pose, pour  $x \in E$  :

$$N(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left| \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right|}{\sum_{k=1}^n t^{2k-2}}.$$

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. Comparer  $N$  et  $\|\cdot\|_2$ .

**II.2.481** Centrale 2022

1. Montrer que si  $U \in S_n^+(\mathbb{R})$ , alors  $U$  admet une unique racine carrée.
2. Montrer que si  $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$ , alors  $\text{Tr}(UV) \geq 0$ .
3. Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

On considère une fonction dérivable  $f : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  ainsi que  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $\text{Tr} \circ P \circ f$  est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée.

**II.2.482** Mines 2024

Soit  $S$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(v) \in S \quad \text{et} \quad v - f(v) \in S^\perp.$$

Montrer que  $S$  est un espace vectoriel et que  $f$  est la projection orthogonale sur  $S$ .

**II.2.483** Centrale 2023

Soit  $E$  un espace euclidien et  $s$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Établir l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.
2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
  - i)  $\exists c \geq 0, \forall x, y \in E, \langle s(x), s(y) \rangle = c \langle x, y \rangle$  ;
  - ii)  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y) \rangle = 0$ .
3. Trouver tous les endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que  $u(V^\perp) \subset u(V)^\perp$  pour tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$ .

**II.2.484** CCP 2023

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^3)$  vérifiant  $f \neq 0$  et  $f^3 = -f$ . On pose  $F = \text{Ker}(f)$  et  $G = \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ .

1. Montrer que  $F \neq \{0\}$  et  $G \neq \{0\}$ .
2. Soit  $v \in G \setminus \{0\}$ . Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$  et que  $(v; f(v))$  est une base de  $G$ .
3. Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = -A$ . Montrer que  $A$  est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.485** Mines 2024

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in L(E)$ . On pose :

$$G = \{u \in L(E) \mid u \circ f = f \circ u, u^2 \circ f = f, \exists p \in \mathbb{N}, f^{p+1} \circ u = f^p\}.$$

1. Soit  $u \in G$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $u^{k+1} \circ f^k = u$ .
2. Soit  $u, v \in G$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u^k \circ f^{k+1} \circ v$  et  $v \circ f^{k+1} \circ u^k$ .
3. En déduire que  $G$  possède au plus un élément.

**II.2.486** CCP 2024

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On considère  $f, g \in L(E)$  telles que :

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

L'objectif est de montrer que  $f$  est nilpotente de trois manières différentes.

1. (a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ .
- (b) Conclure en étudiant l'application :

$$u : L(E) \longrightarrow L(E) \\ h \longmapsto h \circ g - g \circ h$$

2. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P(f)$ , puis conclure.
3. (a) Montrer que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\text{Tr}(f^k) = 0$ .
- (b) Montrer que  $f$  ne possède qu'une seule valeur propre, puis conclure.

**II.2.487** Mines 2022

Soit  $n \geq 2$  et  $p < n$ . On considère  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $A \in GL_p(\mathbb{R})$ .

1. (a) Montrer que l'application  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto Y$  induit un isomorphisme de  $\text{Ker}(M)$  vers  $\text{Ker}(D - CA^{-1}B)$ .
- (b) Montrer que  $\text{rang}(M) = p$  si, et seulement si,  $D = CA^{-1}B$ .
2. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ . On pose  $p = \max_{M \in V} \text{rang}(M)$ .  
On souhaite majorer  $\dim(V)$ .
- (a) Montrer que l'on peut supposer  $J_p \in V$ , condition que l'on supposera vérifiée pour la suite.
- (b) On pose  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \mid (B; D) \in M_{n-p \times p}(\mathbb{R}) \times M_{n-p \times n-p}(\mathbb{R}) \right\}$ .  
Étudier  $V \cap W$ .

**II.2.488** Mines 2022

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que l'application  $f : x \mapsto \det(A + xB)$  est polynomiale et donner son degré.

**II.2.489** Mines 2024

Soit  $\alpha > 0$  et  $u \in L(\mathbb{C}^n)$ . Montrer qu'il existe une base ordonnée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$  telle que, pour tous  $i, j \in \{1; \dots; n\}$  :

$$i \neq j \implies \left| \left( (u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)_{ij} \right| \leq \alpha.$$

**II.2.490** Mines 2022

Trouver une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^3 - M = I_n$ . Montrer que  $M$  vérifie nécessairement  $\det(M) > 0$ .

**II.2.491** X 2022

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- i)  $B$  est nilpotente et  $BA = 0$
- ii)  $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \chi_{AM} = \chi_{AM+B}$

**II.2.492** X 2023

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

On considère  $a, b \in L(E)$  et on pose  $[a, b] = ab - ba$ . On suppose que  $[a, b] = f \circ v$ , où  $f \in L(\mathbb{C}, E)$  et  $v \in L(E, \mathbb{C})$  vérifient  $v \circ f = 0$ .

1. Calculer  $\det([a, b])$ .
2. Montrer que  $a$  et  $b$  sont trigonalisables dans une même base.

**II.2.493** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $E$  un espace euclidien et  $x, y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Quelle(s) condition(s) y a-t-il sur  $x$  et  $y$  pour que le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(\{y\})$  soit égal au projeté orthogonal de  $y$  sur  $\text{Vect}(\{x\})$  ?

**II.2.494** Centrale-Supélec MP 2013

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles. On étudie l'application qui à une suite  $u$  associe la suite  $v$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + (n+1)u_n}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que si  $u$  converge, alors  $f(u)$  converge également. Préciser sa limite.
2. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .
4. On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des suites bornées. On le munit de la norme infinie. Montrer que  $F$  est stable par  $f$ , que  $f$  est continue pour la norme considérée et préciser sa norme subordonnée.

**II.2.495** Mines-Télécom MP 2023

On pose  $E = C([0; 1])$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On pose :

$$\forall f \in E, u(f)(x) = \int_0^1 \inf(x; t) f(t) dt.$$

Montrer que  $u$  est un endomorphisme continu de  $E$  et calculer  $\|u\|$ .

**II.2.496** Mines-Télécom PSI 2023

Soit  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Résoudre  $B^3 = A$  dans  $M_2(\mathbb{R})$ , puis dans  $M_2(\mathbb{C})$ .
3. Résoudre  $X' = AX$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

**II.2.497** Mines-Télécom PSI 2023

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer le rang de  $A$ . En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $A$ .
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.498** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2$  est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.499** CCINP MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $u$  un endomorphisme orthogonal de  $E$  (i.e. tel que  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ ). On considère  $v = \text{Id}_E - u$ .

1. (a) Montrer que  $\text{Ker}(v) = (\text{Im}(v))^\perp$ .  
(b) En déduire que  $\text{Ker}(v)$  et  $\text{Im}(v)$  sont des supplémentaires orthogonaux.
2. Soit  $p$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Ker}(v)$ .  
(a) Montrer que  $p \circ u = u \circ p = p$ .  
(b) Pour tout  $x \in E$ , montrer qu'il existe  $y \in E$  tel que  $p(x) = x + u(y) - y$ .  
(c) En déduire que :

$$\forall x \in E, p(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \right).$$

**II.2.500** Mines-Télécom MP 2018

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $(b_1; \dots; b_n) \in \mathbb{C}^n$ .

On pose :  $A = (a_i b_j)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in M_n(\mathbb{C})$ .

Dans quels cas la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Déterminer alors ses éléments propres.

**II.2.501** CCINP MP 2018

On cherche à déterminer les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^4 = A^2$  et  $\text{Tr}(A) = n$ .

1. Montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.
2. Conclure.

**II.2.502** Mines-télécom MP 2018

Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\sqrt[n]{\det(A)} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$ .

**II.2.503** Mines-Télécom MP 2018

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Calculer  $A^3$ .

**II.2.504** CCINP MP 2025

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4.

1. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
2. Soit  $f \in L(E)$  tel que son polynôme minimal s'écrive :  $P(X) = (X^2+1)(X^2+4)$ .  
Montrer qu'il existe  $x, y$  non nuls dans  $E$  tels que  $f^2(x) = -x$  et  $f^2(y) = -4y$ .
3. Montrer que la famille  $(x; f(x); y; f(y))$  est une base de  $E$ .
4. Exprimer la matrice canoniquement associée à  $f$  dans cette base.

**II.2.505** Mines-Ponts MPI 2025

1. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Trouver les  $n \in \mathbb{N}$  tels qu'il existe  $M \in M_n(\mathbb{Z})$  vérifiant  $M^3 + M + I_n = 0$ .

**II.2.506** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $F \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall t \in [-\alpha; \alpha], \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \text{Tr}(F^k)\right) = \det((I_n - tF)^{-1}).$$

**II.2.507** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in L(E)$  tel que  $\text{Tr}(u) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ .
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  a une diagonale nulle.

**II.2.508** CCINP MP 2025

On définit les deux matrices de  $M_3(\mathbb{R})$  :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi que  $C(N) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid NM = MN\}$ .

1. Montrer que  $C(N)$  est un espace vectoriel. Déterminer-le.
2. Montrer que  $N$  est un polynôme de degré 2 en  $T$ .

On définit  $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid M^8 = T\}$ .

3. Montrer que pour tout  $M \in E$ ,  $M$  est un polynôme en  $N$ .
4. Déterminer  $E$ .

**II.2.509** CCINP MPI 2025

On note  $T$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de  $T(X^n)$  pour tout  $n$  entier naturel  $n$ . Calculer  $T(x^k)$  pour  $k = 0, \dots, 4$ .
2. Montrer que si  $P$  est colinéaire à  $T(P)$ , alors  $P$  est de degré 3.
3. L'endomorphisme  $T$  est-il injectif? surjectif?
4. Montrer que la restriction de  $T$  à  $\mathbb{R}_3[X]$ , notée  $T_1$ , est un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de  $T_1$  dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de  $T_1$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**II.2.510** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $ABAB = 0$ . A-t-on nécessairement  $BABA = 0$ ?

**II.2.511** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Tr}(A) = 0$ . Montrer qu'il existe deux matrices nilpotentes  $N_1$  et  $N_2$  telles que  $A = N_1 + N_2$ .

**II.2.512** Mines-Télécom MP 2021

On note  $(e_1; \dots; e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\sigma \in S_n$ , on note  $f^\sigma$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $f^\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ . Enfin, on pose :

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f^\sigma.$$

1. Soit  $(\sigma; \tau) \in S_n^2$ . Calculer  $f^\sigma \circ f^\tau$ .
2. Montrer que l'application  $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$  est une bijection de  $S_n$ .
3. Montrer que  $p$  est un projecteur.

**II.2.513** X ESPCI 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . À quelle condition existe-t-il deux matrices  $A$  et  $B$  diagonalisables, de rang 1, telles que  $M = A + B$  ?

**II.2.514** CCINP MP 2021

Résoudre le système suivant d'inconnue  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  en fonction du paramètre  $m$  :

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$

**II.2.515** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui commutent. On suppose qu'il existe  $n+1$  réels deux à deux distincts  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  tels que, pour tout  $i$  entre 1 et  $n+1$ , la matrice  $C_i = A + t_i B$  soit nilpotente. Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.

**II.2.516** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et  $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(M) \text{ est nilpotent}\}$ . Déterminer  $I$ .

**II.2.517** CCINP PSI 2021

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ .

1. Donner le rang de  $B$  en fonction du rang de  $A$ .
2. Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

3. On suppose que  $A$  est diagonalisable. Montrer que  $B$  l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

**II.2.518** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $A \in M_3(\mathbb{C})$ .

Montrer que  $A$  et  $-A$  sont semblables si et seulement si  $\text{Tr}(A) = 0$  et  $\det(A) = 0$ .

**II.2.519** Mines-Télécom MP 2018

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\int_0^1 A(t) dt \neq 0$ . On pose :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt \cdot A - \int_0^1 A(t) dt \cdot P.$$

1. Montrer que  $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .
3. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

**II.2.520** Mines-Télécom MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Si  $\dim(E) = 2$ , montrer qu'il existe  $f \in L(E)$  tel que  $f^2 = -\text{Id}_E$ .
2. On revient au cas général et on suppose l'existence d'un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f^2 = -\text{Id}_E$ .
  - (a) Montrer que  $f$  n'admet pas de valeur propre et que  $\dim(E)$  est paire.
  - (b) Montrer que pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $\text{Vect}(\{x; f(x)\})$  est stable par  $f$ .
  - (c) En posant  $\dim(E) = 2p$ , montrer qu'il existe une famille de vecteurs de  $E$ ,  $\{e_1; \dots; e_p\}$ , telle que  $\{e_1; f(e_1); \dots; e_p; f(e_p)\}$  soit une base de  $E$ .

**II.2.521** Mines-Télécom MP 2018

On donne les deux matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles semblables ?

**II.2.522** Mines-Télécom MP 2018

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $(e_1; \dots; e_n)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  tels que, pour tous  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$ ,  $\|e_i - e_j\| = 1$ . Démontrer que  $(e_1; \dots; e_n)$  est une base de  $E$ .

**II.2.523** Centrale-Supélec MP 2018

Soit  $r$  et  $s$  deux rotations vectorielles de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que si les axes de  $r$  et  $s$  sont identiques, alors  $r$  et  $s$  commutent.
2. Montrer que si  $r$  et  $s$  sont des rotations d'angles  $\pi$  et d'axes orthogonaux, alors  $r$  et  $s$  commutent.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $r$  et  $s$  commutent.

**II.2.524** ENSEA/ENSIIE MP 2018

Soit  $M$  une matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^4 = 0$ . Montrer que  $M^3 = 0$ .

**II.2.525** CCINP MP 2023

On considère un espace euclidien  $E$  dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,  $\langle x, y \rangle$ . On fixe deux vecteurs non nuls  $u$  et  $v$  de  $E$ .

1. Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose :  $(u \otimes v)(x) = \langle v, x \rangle u$ .
  - (a) Justifier que  $u \otimes v$  est linéaire et donner son rang.
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $u \otimes v$ .
  - (c) L'endomorphisme  $u \otimes v$  est-il diagonalisable ?
2. Calculer  $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$  et retrouver le résultat de la question 1.c.
3. Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $g^*$  son adjoint. Montrer que  $g$  commute avec  $u \otimes v$  si et seulement si il existe un réel  $\alpha$  tel que  $g(u) = \alpha u$  et  $g^*(v) = \alpha v$ .

**II.2.526** Mines-Télécom MP 2023

1. Rappeler le théorème spectral.
2. On munit  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel. Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que les sous-espaces propres de  $A$  sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et on suppose que  $A + A^T$  est nilpotente. Montrer que  $A$  est antisymétrique.

**II.2.527** Mines-Télécom PSI 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, a_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Étudier la diagonalisabilité de  $A$  et donner ses éléments propres.

**II.2.528** CCINP MP 2023

Soit  $a, b, c, d, e, f$  des réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice  $A$  est trigonalisable.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour la matrice  $A$  soit diagonalisable.
3. Dans ce cas, trouver une base de vecteurs propres.

**II.2.529** CCINP PSI 2024

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour tout  $k$  entier naturel compris entre 1 et  $n$ , on pose  $f_k(x) = e^{kx}$ . Montrer que la famille  $\{f_1; \dots; f_n\}$  est libre.
3. Montrer, sans les calculer, que le polynôme  $P(X) = X^3 + X + 1$  admet trois racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ , que l'on notera  $\alpha, \beta, \gamma$ .
4. Résoudre le système suivant, composé de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$$

**II.2.530** Mines-Ponts MPI 2023

Soit  $n \geq 2$  et  $S \in S_n(\mathbb{R})$ . Notons :

$$\mathcal{E} = \{\|X\| \mid X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Tr}(X^T S X) = 1\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  possède un maximum si et seulement si  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le maximum de  $\mathcal{E}$  si  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**II.2.531** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  admettant une unique valeur propre  $\lambda$ .

1. Montrer que  $A - \lambda I_n$  est nilpotente.
2. Soit le système différentiel  $(E) : Y' = AY$ . Montrer que les solutions de  $(E)$  sont bornées si et seulement si  $A = \lambda I_n$  et  $\lambda \in i\mathbb{R}$ .

**II.2.532** Mines-Ponts PSI 2024

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $f \in L(E)$ .

Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que  $\|f^2(x)\| \geq C\|f(x)\|$  pour tout  $x \in E$  si, et seulement si,  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

**II.2.533** Mines-Télécom 2024

Soit  $\mathcal{E}$  une partie de  $M_n(\mathbb{R})$ . On appelle *centre* de  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices commutant avec tous les éléments de  $\mathcal{E}$ .

1. Déterminer le centre de  $M_n(\mathbb{R})$ .
2. Démontrer que  $\text{Vect}(GL_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$ . En déduire le centre de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.534** Mines-Télécom 2025

On étudie les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui vérifient la condition :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=0}^n (X - a_{kk}) \quad (1),$$

c'est-à-dire les matrices pour lesquelles les valeurs propres sont réelles et sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice.

1. On pose  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les matrices  $M_1$  et  $M_2$  vérifient-elles la condition (1) ?

2. Soit  $(u; v) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$ .

À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice  $M_{u,v}$  vérifie-t-elle la condition (1) ?

3. Quelles sont les matrices de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifient la condition (1) ?

**II.2.535** Mines-Ponts MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket, \operatorname{Tr}(A^k) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(A^n) \neq 0.$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.536** CCINP 2025

Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  et  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ .

1. Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .
2. Trouver les matrices  $D$  et  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

On souhaite résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$$

3. On pose  $U(t) = P^{-1}X(t)$ .

Trouver un système d'équations vérifié par  $U(t)$  et effectuer la résolution de ce système.

On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant :

$$(S') : \begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$$

4. On pose  $V(t) = P^{-1}X(t)$ .

Trouver un système d'équations vérifié par  $V(t)$ .

5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de  $(S')$  est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?

**II.2.537** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f \in L(E)$  tel que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in E, f(x) = x \implies f^*(x) = x,$$

où  $f^*$  est l'adjoint de  $f$ .

2. Étudier la suite  $u$  de  $L(E)^{\mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^k.$$

**II.2.538** CCINP TSI 2019

Soit  $\varphi$  définie pour tout  $(P; Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$  par  $\varphi(P; Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée  $(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
3. Soit  $M_i = \sup_{t \in [-1; 1]} |Q_i(t)|$ ,  $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ . Montrer que  $M_i = Q_i(1)$ .

**II.2.539** CCINP MP 2025

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|.$$

- (b) Montrer que  $\text{Ker}(f) = E$  ou  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .
2. Supposons  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $E$ .
  - (a) Montrer que les  $\|f(e_i)\|$  sont tous égaux à un même entier ( $1 \leq i \leq n$ ).
  - (b) Montrer qu'il existe un entier  $k$  tel que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|.$$

3. Montrer que le résultat précédent reste valable en dimension infinie.
4. Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle.$$

**II.2.540** MP ENS 2025

Une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est dite de *Bourdeaud* si tous ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdeaud si et seulement si elle est trigonalisable.
2. Existe-t-il une matrice complexe, symétrique et de Bourdeaud qui ne soit pas diagonalisable ?
3. Une matrice est dite *normale* si elle commute avec sa transposée. Quelles sont les matrices réelles, symétriques et normales de Bourdeaud ?

**II.2.541** ENSEA/ENSIIE MP 2022

On pose  $E = \mathbb{R}[X]$  et on définit  $f \in L(E)$  par :

$$\forall P \in E, f(P) = (X - 3)(X + 1)P' - XP.$$

Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .

**II.2.542** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $E$  un espace euclidien. Soit  $\{e_1; \dots; e_n\}$  une famille liée génératrice de vecteurs unitaires de  $E$ , deux à deux distincts, pour laquelle il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = \alpha.$$

1. Montrer que  $\sum_{i=1}^n e_i = 0$  et  $\alpha = -\frac{1}{n-1}$ .
2. Montrer que  $\dim(E) = n - 1$ .

**II.2.543** Mines-Ponts PC 2023

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . On note :

$$\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle = 0\}.$$

1. Dans cette question, on prend  $n = 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}_A$ .

2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  - i)  $\mathcal{C}_A = \text{Ker}(A)$ ;
  - ii)  $\mathcal{C}_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ;
  - iii)  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$  ou  $-A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

**II.2.544** CCINP MP 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $U_n$  la matrice carrée réelle de taille  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Sans calculer le déterminant, trouver les valeurs propres de  $U_n$  avec leur multiplicité.
2. Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique ordonnée de  $\mathbb{R}^n$ . On définit :

$$\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, f_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{i-1} e_k - e_i.$$

Montrer que  $(f_i)_{2 \leq i \leq n}$  est une base orthogonale du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de  $U_n$ , pour le produit scalaire canonique.

3. En déduire une base orthonormée formée de vecteurs propres de  $U_n$ . Donner la formule de diagonalisation de  $U_n$ .

**II.2.545** Mines-Ponts PC 2023

Trouver tous les couples  $(u; v)$  d'isométries qui anticommulent dans un espace euclidien de dimension 2.

**II.2.546** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \frac{1}{a} & 0 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Donner une condition sur  $a, b$  et  $c$  afin que  $A$  soit diagonalisable.
2. Soit  $f$  l'endomorphisme associé à  $A$ . Quels sont les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  ?

**II.2.547** Mines-Télécom PSI 2019

On considère :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P; Q) &\longmapsto \sum_{k=-2017}^{2017} P(k)Q(k) \end{aligned}$$

Quelles sont les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\varphi$  est un produit scalaire ?

**II.2.548** CCINP MP 2018

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Calculer  $\chi_C$  et  $\pi_C$ .
2. Montrer qu'il existe  $A$  et  $B$  dans  $M_5(\mathbb{R})$  telles que :

$$C = A + B, \quad A^2 = A, \quad B^2 = 3B \quad \text{et} \quad AB = BA = 0.$$

3. Déterminer le rang de  $A$  et le rang de  $B$ .
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C^n$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $A$  et  $B$  dont on déterminera les coefficients.

**II.2.549** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A$  une matrice réelle symétrique,  $B$  une matrice réelle antisymétrique et  $M$  une matrice réelle inversible telle que  $A = M^{-1}BM$ . Montrer que  $A = B = 0$ .

**II.2.550** X MP 2018

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  ses valeurs propres.

Trouver le lieu de  $(a; c)$  sachant que les deux valeurs propres de  $A$  sont fixées.

**II.2.551** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \geq 2$  entier. Résoudre dans  $M_n(\mathbb{C})$  :

$$M^2 - \text{Tr}(M)M + \det(M)I_n = 0.$$

**II.2.552** CCINP MP 2018

Soit  $x$  un nombre réel et  $E_x$  l'ensemble des matrices  $M \in M_n(\mathbb{C})$  vérifiant l'égalité  $M^2 + M + xI_n = 0$ .

1. Si  $x \neq 0$ , montrer qu'une matrice  $M \in E_x$  est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à  $E_0$  ?
2. Trouver  $\alpha$  réel tel que, si  $x < \alpha$ , alors  $M \in E_x$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ .
3. Ici,  $x = -2$ . Déterminer l'ensemble  $T$  des traces des éléments de  $E_x$ . Quel est son cardinal ?

**II.2.553** TPE/EIVP PC 2018

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . Pour tous  $P, Q \in E$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Calculer la distance entre le polynôme  $X^2$  et le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_1[X]$ .

**II.2.554** TPE/EIVP MP 2018

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X^T - X \end{array}$$

L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**II.2.555** Mines-Ponts PC 2022

Soit  $A \in M_{3n}(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A^3 = 0$  et que  $\text{rang}(A) = 2n$ . Montrer qu'il existe  $P \in GL_{3n}(\mathbb{R})$  telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.556** CCINP PSI 2022

Soit  $f, g$  des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f = g \circ g$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On suppose que  $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Soit  $e_1$  et  $e_3$  des vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3. Montrer que  $g(e_1)$  et  $g(e_3)$  sont aussi des vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3.
3. Montrer que  $e_1$  et  $e_3$  sont aussi des vecteurs propres de  $g$ .
4. L'endomorphisme  $g$  est-il diagonalisable ?
5. Quelles sont les valeurs propres possibles de  $g$  ?

**II.2.557** Mines-Ponts MP 2018

Étudier les classes de similitude de  $M_3(\mathbb{R})$ .

**II.2.558** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $a$  un vecteur normé de  $E$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle a, x \rangle a$ , endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que :

$$\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2, f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$

2. Déterminer les  $\alpha$  tels que  $f_\alpha$  soit bijectif.
3. Trouver les valeurs propres de  $f_\alpha$ .

**II.2.559** CCINP PSI 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice qui vérifie la relation :

$$A^3 + 9A = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que le spectre de  $A$  est inclus dans  $\{0; 3i; -3i\}$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$  ?
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$  ?
4. On suppose  $n$  impair. Montrer que  $A$  n'est pas inversible.
5. Montrer que si  $A$  est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation (1).

**II.2.560** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $u$  l'application qui à  $f$  de  $E$  associe  $x \mapsto f(px+q)$ , avec  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ .

1. Montrer que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Montrer que les valeurs propres de  $u$  sont dans  $] - 1; 1]$ .
3. Montrer que si  $f$  est un vecteur propre, alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f^{(k)} = 0$ .
4. Trouver les valeurs propres de  $u$  et les vecteurs propres associés.

**II.2.561** CCINP MP 2023

Soit

$$f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. Redéfinir la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ . Écrire la matrice de  $f$  dans cette base.
3. Donner les éléments propres de  $f$ .
4. L'application  $f$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de  $f$  dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définir  $f^n$ .

**II.2.562** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $E_n$  l'ensemble des  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$ .

1. Montrer que  $E_n$  est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de  $E_n$ .
3. Donner une base de  $E_n$ .

**II.2.563** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $\mathcal{F} \subset M_n(\mathbb{C})$  une partie non vide stable par produit. Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{F}$  telle que  $\text{Tr}(A) \in \{0; \dots; n\}$ .

**II.2.564** Centrale-Supélec PSI 2023

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  admet une valeur propre simple notée  $b$  et une valeur propre double notée  $a$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré 2 tel que :

$$P(b) = f(b), \quad P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$

On note  $P_f$  ce polynôme.

3. Donner  $P_f$  dans le cas où  $f$  est l'application  $x \mapsto \frac{x}{2}$ , puis  $x \mapsto \frac{x}{3}$ .

**II.2.565** CCINP MP 2023

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Démontrer que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si ou bien  $ab > 0$ , ou bien  $a = b = 0$ .

2. On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $(e_1; \dots; e_n)$ , de taille  $n$ , est :

$$\begin{pmatrix} & & & & a_n \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $n$  pair.

- (a) Donner les sous-espaces vectoriels  $u$ -stables de dimension 2.
- (b) Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si

$$a_i = a_{n+1-i} = 0 \text{ ou } a_i a_{n+1-i} > 0 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

**II.2.566** CCINP MP 2021

On se place dans  $M_2(\mathbb{R})$ . On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{b2} \end{pmatrix}.$$

On pose également :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}I_2 & a_{12}I_2 \\ a_{21}I_2 & a_{22}I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}.$$

On suppose  $A$  et  $B$  diagonalisables. Si  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  et  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $B$ , on pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $U_1$  et  $U_2$  sont des vecteurs propres de  $\tilde{A}$  et que  $V_1$  et  $V_2$  sont des vecteurs propres de  $\tilde{B}$ .
2. Montrer que  $W = x_1V_1 + x_2V_2$  est vecteur propre de  $\tilde{A}$  et de  $\tilde{B}$ .
3. Comment former une base de  $\mathbb{R}^4$  avec des vecteurs propres communs à  $\tilde{A}$  et à  $\tilde{B}$  ?
4. La matrice  $M = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable dans  $M_4(\mathbb{R})$  ?

**II.2.567** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $E = \mathbb{C}[X]$ . Pour tout  $P \in E$ , on pose :

$$T(P) = (-3X + 8)P + 5(X^2 + X)P' - 2(X^3 - X^2)P''.$$

1. Soit  $P \in E$  de degré  $n$ . Déterminer le coefficient de  $X^{n+1}$  de  $T(P)$ . En déduire que les vecteurs propres éventuels de  $T$  sont tous de même degré.
2. Montrer que  $\mathbb{C}_3[X]$  est stable par  $T$ . On note alors  $T_3$  l'endomorphisme induit par  $T$  sur  $\mathbb{C}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $T_3$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_3[X]$ .
3. La matrice  $T_3$  est-elle diagonalisable ? inversible ?
4. On note :

$$(E) : 2(x^3 - x^2)y'' - 5(x^2 + x)y' + (3x + 14)y = 0.$$

- (a) Déterminer les solutions polynomiales de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Comment peut-on trouver des solutions non polynomiales de  $(E)$  sur  $]0; 1[$  ?

**II.2.568** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et  $D$  une matrice diagonale non nulle. Montrer que  $S + D$  est semblable à  $D$  si, et seulement si,  $S$  est nulle.

**II.2.569** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f, g \in L(\mathbb{C}^n)$  tels que  $f \circ g = 0$  et  $f + g$  soit bijective. Montrer que  $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$ .

**II.2.570** Mines-Télécom MP 2021

Soit

$$\begin{aligned} \phi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto M \mapsto \text{Tr}(AM) \end{aligned}$$

Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme.

**II.2.571** Mines-Ponts PSI 2016

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1) \end{aligned}$$

1. Déterminer des bases de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
2. Trouver les éléments propres de  $f$ .
3. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**II.2.572** CCINP PC 2016

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Soit  $a$  et  $b$  des vecteurs de  $E$  avec  $a$  et  $b$  non nuls. On considère :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x - \langle a, x \rangle b \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si  $\langle a, a \rangle \neq 1$ .
2. Si  $f$  est bijective, calculer  $f^{-1}$ .

**II.2.573** Mines-Télécom MP 2016

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par :

$$f(a + bX + cX^2) = (2a + c)(1 - X^2) + (a + b + c)X.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ? La matrice  $A$  est-elle inversible ?
3. Trouver les vecteurs propres de  $A$ .
4. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

**II.2.574** Mines-Télécom MP 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique telle que  $A^{2014} = A^{2016}$ .

1. Montrer que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{rang}(A)$ .
2. Ce résultat demeure-t-il vrai si  $A$  est seulement diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?

**II.2.575** TPE/EIVP MP 2016

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On note  $\pi_u$  le polynôme minimal de  $u$ .

1. Montrer que  $P(u)$  est inversible si, et seulement si,  $P$  et  $\pi_u$  sont premiers entre eux.
2. Montrer que si  $P(u)$  est inversible, alors  $P(u)^{-1} \in \mathbb{C}[u]$ .

**II.2.576** TPE/EIVP MP 2017

Soit  $t \in \mathbb{R}$  et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1-t \\ 1-t & 1 & 1-t \\ t-1 & t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $A(t)$  est-elle diagonalisable? Donner ses sous-espaces propres.
2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + (1-t)y(t) + (1-t)z(t) \\ y'(t) = (1-t)x(t) + y(t) + (1-t)z(t) \\ z'(t) = (t-1)x(t) + (t-1)y(t) + (2t-1)z(t) \end{cases}$$

**II.2.577** Centrale-Supélec MP 2017

1. On note  $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x+3y & -6x+6y \\ x-y & 3x-2y \end{pmatrix} \mid (x; y) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ .

Montrer que  $\mathcal{E}$  est un plan vectoriel d'éléments tous diagonalisables.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha \neq \beta$ .

On suppose que pour tout nombre complexe  $t$ ,  $B + tA$  est diagonalisable.

Montrer que  $b = c = 0$ .

3. Si  $\mathbb{K}$  est un corps, on note  $d_n(\mathbb{K})$  la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$  dont tous les éléments sont diagonalisables. Calculer  $d_2(\mathbb{C})$ , puis  $d_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.578** CCINP PSI 2017

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Soit  $D$  la matrice diagonale portant les valeurs propres de  $A$ . Montrer que si une matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  commute avec  $D$ , alors elle est diagonale.
3. Soit  $P(X) = X^7 + 4X^3 + 1$ . Trouver toutes les matrices  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telles que  $P(M) = A$ .

**II.2.579** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que  $p + q$  admet des vecteurs propres.
2. Montrer que  $E$  peut se décomposer en somme directe de plans ou de droites stables par  $p$  et  $q$ .

**II.2.580** CCINP MP 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ . Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . On note  $a$  la plus petite valeur propre de  $f$ ,  $b$  la plus grande.

1. Montrer que :

$$a\|x\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq b\|x\|^2.$$

2. Montrer que s'il existe un réel  $r$  tels que, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x, f(x) \rangle \leq r\|x\|^2$ , alors  $r \geq b$ .
3. Soit  $k$  un réel fixé. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que  $b \leq k + 2$ .

**II.2.581** CCINP MP 2019

Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_4[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X) + 2X^4P\left(\frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ .

**II.2.582** Mines-Télécom MP 2019

1. Montrer que l'ensemble  $E$  des suites

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = 2a\}$$

est un espace vectoriel réel.

2. Montrer que  $\Psi : u \mapsto (a; u_0; u_1)$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
3. Montrer que les suites  $n \mapsto 1$ ,  $n \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  et  $n \mapsto \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  forment une base de  $E$ .

**II.2.583** CCINP MP PSI 2019

Soit  $M \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $\frac{1}{3}(I_n + 2M) \in O_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle Mx, x \rangle = \|x\|^2$ .
2. Conclure sur  $M$ .

**II.2.584** Mines-Ponts MP 2019

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ , où  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$  et  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n$ .

On pose  $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ .

1. Trouver  $F^\perp$  et vérifier que l'on n'a pas  $F \oplus F^\perp = E$ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P$  tel que  $\text{dist}(1; F) = \|1 - P\|$ .  
Indication : on pourra s'aider des polynômes définis par  $P_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{n}$ .

**II.2.585** ENS MP 2012

Soit  $p$  un nombre premier. Est-ce que toute matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est trigonalisable ?

**II.2.586** Mines-Ponts PC 2013

Soit deux formes linéaires indépendantes  $f_1$  et  $f_2$  de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $f_1(x_1) = 1$ ,  $f_1(x_2) = 0$ ,  $f_2(x_1) = 0$ ,  $f_2(x_2) = 1$ .

**II.2.587** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $M$  une matrice de  $GL_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^T = -M^2$ . Que peut-on dire de  $M$  ?

**II.2.588** Mines-Ponts MP 2014

Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (X^2 + 1)P'' - 2XP' \end{aligned}$$

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\sqrt{1-x^2} dx.$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme symétrique.
2. Prouver qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de  $\Phi$ .
3. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! T_n \in \mathbb{R}[X], \forall \theta \in ]0; \pi[, T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

4. Montrer que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormée de vecteurs propres de  $\Phi$ .

**II.2.589** Mines-Ponts MP 2014

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$  et  $\det(A + B) > 0$ .  
Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\det(A^p + B^p) > 0$ .

**II.2.590** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . On suppose que tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1, et que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Trouver des conditions sur  $n$  et  $\alpha$ .

**II.2.591** Mines-Ponts MP 2014

Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \cos(\beta) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ 1 & \cos(\gamma) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix}.$$

**II.2.592** X PC 2023

Soit  $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\text{Tr}(e^A e^B) > 0$ .
2. Montrer que  $\text{Tr}(e^{A+B}) \leq \text{Tr}(e^A e^B)$ .

**II.2.593** Centrale-Supélec PSI 2015

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M^T M$  est inversible et symétrique, de spectre inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $\Omega$  et une matrice symétrique  $S$  à valeurs propres strictement positives telles que  $M = \Omega S$ .
3. Trouver  $\Omega$  et  $S$  telles que  $M = \Omega S$  lorsque :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $\Omega'$  et une matrice triangulaire  $T$  à valeurs propres strictement positives telles que  $M = \Omega' T$ .
5. Trouver  $\Omega'$  et  $T$  telles que  $M = \Omega' T$  lorsque :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**II.2.594** Mines-Ponts MP 2014

On considère le système :

$$\begin{cases} M^2 + I_n = 0 \\ MM^T = M^T M \end{cases}$$

1. Résoudre le système dans  $M_n(\mathbb{R})$  pour  $n$  impair.
2. Résoudre le système dans  $M_n(\mathbb{R})$  pour  $n$  pair.

**II.2.595** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

1. Existe-t-il un polynôme  $P$  tel que  $P(A^2) = A$  ?
2. Que dire pour  $P(A^k) = A$ , avec  $k$  impair ?

**II.2.596** CCINP MP 2016

Soit  $n \geq 2$  entier,  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à  $a$ .

1. La matrice  $A$  est-elle inversible ?
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?
3. Le polynôme  $X^n - (na)^{n-1}X$  est-il un polynôme annulateur de  $A$  ?
4. Quel est le polynôme caractéristique de  $A$  ?

**II.2.597** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $M$  une matrice symétrique de  $M_n(\mathbb{R})$  à valeurs propres positives. Montrer que :

$$\sqrt[n]{\det(I_n + M)} \geq 1 + \sqrt[n]{\det(M)}.$$

**II.2.598** Mines-Télécom MP 2016

On considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(1)X + P(2)X^2 \end{aligned}$$

Trouver les éléments propres de  $u$ .

**II.2.599** Mines-Télécom MP 2016

Trouver toutes les matrices  $M \in M_4(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.600** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB = BA^2$ . En supposant que  $A$  admet des valeurs propres de module différent de 1, montrer que  $A$  et  $B$  ont au moins un vecteur propre commun.

**II.2.601** TPE/EIVP PSI 2017

Soit  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$C = A + B, \quad C^2 = 2A + 3B, \quad C^3 = 5A + 6B.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables ?

**II.2.602** ENSEA/ENSIIE MP 2018

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1. On se place dans  $\mathbb{C}$ . Déterminer si  $A$  est diagonalisable ou non.
2. Même question si on se place dans  $\mathbb{R}$ .
3. Refaire les deux premières questions pour la matrice  $B$ .

**II.2.603** Mines-Télécom MPI 2025

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in S^+(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que la fonction  $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{X^T B X}{X^T A X}$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$ .
2. Montrer qu'il existe  $V$  tel que  $A = V^2$ .
3. Montrer que la matrice  $A^{-1}B$  est diagonalisable.

**II.2.604** CCINP MP 2022

On considère dans  $\mathbb{R}^n$  deux vecteurs non colinéaires  $(a_1; \dots; a_n)$  et  $(b_1; \dots; b_n)$ .

1. Montrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0 \end{cases}$$

où  $(x_1; \dots; x_n)$  est un vecteur inconnu de  $\mathbb{R}^n$ , définit un espace vectoriel noté  $F$ . Donner sa dimension.

2. *Application* :

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique, on note  $e = (e_1; \dots; e_4)$  la base canonique. Soit le système :

$$\begin{cases} x - y + z + tx = 0 \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

- (a) Donner une base orthonormale de  $F$ .
- (b) Calculer  $\text{dist}(u; F)$  lorsque  $u = e_1 - e_3 + 2e_4$ .

**II.2.605** ENS MP 2018

Soit  $\sigma$  une permutation de  $S_n$  et  $P_\sigma$  la matrice de permutation associée. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $P_\sigma$  soit diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.606** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $s$  une symétrie d'un espace vectoriel réel  $E$ . On considère :

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) \end{aligned}$$

Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ .

**II.2.607** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $S_A$  l'ensemble des matrices semblables à  $A$ . Trouver l'ensemble des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_A$  soit fini.

**II.2.608** CCINP TSI 2022

Reconnaître l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  associée à la matrice suivante :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**II.2.609** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $AB = A + B$ .  
Montrer que  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ .

**II.2.610** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $N$  un opérateur nilpotent. Comparer  $\text{Ker}(N)$  et  $\text{Ker}(\exp(N) - \text{Id})$ .

**II.2.611** X MP 2015

Soit  $L$  un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $L$  est un morphisme d'algèbre qui conserve la transposée si et seulement s'il existe  $U \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $L(X) = U^T X U$ .

**II.2.612** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A)$  et  $\text{Ker}(B) = \text{Im}(B)$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**II.2.613** CCINP MP 2025

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$  ? dans  $M_n(\mathbb{C})$  ?
3. Trouver une matrice triangulaire  $T$  semblable à  $A$ .
4. Quelle est la limite de  $\frac{A^n}{n!}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ?

**II.2.614** Mines-Télécom MP 2025

Résoudre l'équation matricielle suivante d'inconnue  $M \in M_n(\mathbb{R})$  :

$$M(M^T M)^2 = I_n.$$

**II.2.615** Mines-Télécom MP 2025

On note  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ . Soit  $\varphi : u \mapsto v$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ . Que peut-on dire de son spectre ?
2. Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$ .

**II.2.616** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $M_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire canonique et  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|A\|^2$  est égal à la somme des carrés des valeurs propres de  $A$ .

**II.2.617** CCINP MP 2025

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^T A = A A^T$  et  $A^2 = -I_n$ .

1. Calculer  $\text{Tr}(A)$ .
2. Montrer que  $(A^T A)^2 = I_n$ .
3. Montrer que  $A^T A$  est symétrique, et en déduire que  $A$  est orthogonale.

**II.2.618** CCINP MP 2018

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que si  $A$  est diagonalisable, alors  $A^2$  l'est aussi.
2. Montrer que la réciproque est fautive à l'aide la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir un polynôme annulateur pour que  $A$  soit diagonalisable.
4. On suppose que  $A$  et  $A^2$  sont diagonalisables. Montrer que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$ .
5. On suppose que  $A^2$  possède  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
6. On suppose que  $A^2$  est diagonalisable et que  $A$  est inversible. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.619** ENS MP 2017

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une base  $(e_1; \dots; e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  et une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  telles que :

- $A$  soit triangulaire dans la base  $(e_1; \dots; e_n)$ ;
- $B$  soit triangulaire dans la base  $(e_{\sigma(1)}; \dots; e_{\sigma(n)})$ .

**II.2.620** Mines-Ponts

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une *involution* de  $L(E)$  est un endomorphisme  $f \in L(E)$  tel que :

$$f \circ f = \text{Id}_E.$$

1. Soit  $a$  et  $b$  deux automorphismes de  $L(E)$  vérifiant :

$$a \circ b \circ a = b \quad \text{et} \quad b \circ a \circ b = a.$$

Montrer que  $a^2 = b^2$  et que  $a^2$  est une involution.

2. On suppose maintenant que la caractéristique de  $\mathbb{K}$  est différente de 2. Soit  $a$  et  $b$  deux involutions de  $L(E)$ . Montrer que :

$$\text{Im}(a \circ b - b \circ a) = \text{Im}(a - b) \cap \text{Im}(a + b).$$

**II.2.621** Mines-Ponts MP 2014

On définit le produit scalaire hermitien sur  $\mathbb{C}_n[X]$  :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

On pose  $M(P) = \sup_{|z|=1} |P(z)|$ .

1. Montrer que  $(1; X; \dots; X^n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{C}_n[X]$  pour ce produit scalaire.
2. Soit  $Q = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k X^k$ . Calculer  $\|Q\|$  et montrer que  $M(Q) \geq 1$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire  $Q$  tel que  $M(Q) = 1$ .
3. Soit maintenant  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(0) = 1$  et  $P(1) = 0$ .

Montrer que  $M(P) \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ .

**II.2.622** Mines-Télécom MPI 2024

Soit  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que :

$$\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X.$$

**II.2.623** Mines-Ponts MPI 2023

On note  $J$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  à coefficients positifs, de diagonale nulle, et telle que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \implies a_{ij} + a_{ji} = 1.$$

1. Exprimer  $A + A^T$  en fonction de  $J$  et  $I_n$ .
2. Évaluer  $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(J)$ .
3. En déduire que  $\text{rang}(A) \geq n - 1$ .
4. Existe-t-il un  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que toute matrice vérifiant les propriétés de  $A$  soit inversible ?

**II.2.624** Mines-Télécom MPI 2023

Soit  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Calculer les valeurs propres de  $A$ .
3. On considère l'application

$$\begin{aligned} W &: \mathbb{R} \longrightarrow M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto W(t) \end{aligned}$$

telle que  $W' = AW$ .

Exprimer  $W$  en fonction de  $t$  et d'autres paramètres que l'on précisera.

**II.2.625** Mines-Télécom MPI 2025

Soit  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer l'équivalence entre :

- i)  $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), f(AB) \leq \min(f(A); f(B))$ ;
- ii)  $\exists \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $f = \varphi \circ \text{rang}$ .

**II.2.626** CCINP PSI 2024

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , soit  $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de  $A$ . Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ?

**II.2.627** Mines-Ponts PSI 2023

Pour tout  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ , on définit :

$$\begin{aligned} f_{a,b,c} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit  $F = \{f_{a,b,c} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. Déterminer  $B \in M_3(\mathbb{R})$  vérifiant pour tout  $f \in F$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = Bf(t)$ .

**II.2.628** Mines-Ponts PSI 2022

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ . On souhaite montrer qu'il n'existe pas de famille *obtusangle* de  $n+2$  vecteurs, c'est-à-dire une famille  $\{u_1; \dots; u_{n+2}\}$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle < 0.$$

1. Étudier les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ .
2. Établir la propriété par récurrence pour tout  $n$ .
3. Montrer qu'il existe une famille obtusangle de  $n+1$  vecteurs.

**II.2.629** Mines-Ponts PSI 2022

On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\wedge$  le produit vectoriel.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \omega \wedge x \end{aligned}$$

où  $\omega$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$ .

On pose  $P = \text{Vect}(\{\omega\})^\perp$ . On rappelle que la formule du double produit vectoriel n'est pas au programme et est donc à proscrire.

1. (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme  $g$  induit par la restriction de  $f$  à  $P$ .
- (b) Montrer que  $\det(g) > 0$ .
2. (a) Trouver tous les polynômes  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , unitaires de degré 3, annulateurs de  $f$ .
- (b) Sans faire de calculs, exprimer  $\chi_f$ , le polynôme caractéristique de  $f$ .
3. (a) Redémontrer la propriété du cours suivante pour  $\varphi \in L(E)$  : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par  $\varphi$  divise  $\chi_\varphi$ .
- (b) Montrer-le dans le cas de  $f$  et  $g$ .

**II.2.630** X ESPCI 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Trouver les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :

$$P(X+1) - P(X) \in \text{Vect}(\{X^n\}).$$

**II.2.631** X ESPCI 2018

Pour tout couple  $(P; Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Montrer que cette intégrale existe et qu'on a défini ainsi un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer l'existence d'une base orthonormale  $\{P_0; \dots; P_n\}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour ce produit scalaire telle que pour chaque  $i \in \{0; \dots; n\}$ , la famille  $\{P_0; \dots; P_i\}$  soit une base de  $\mathbb{R}_i[X]$ .
3. Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Montrer que le polynôme  $P_i$  est scindé, à racines simples, et que toutes ses racines sont dans  $[-1; 1]$ .

**II.2.632** X ESPCI 2017

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , où  $(a; b; c; d) \in \mathbb{Z}^4$ .

On suppose que  $\det(A)$  est impair. On considère  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3; \varepsilon_4) \in \{-1; 1\}^4$  et on pose

$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} a\varepsilon_1 & b\varepsilon_2 \\ c\varepsilon_3 & d\varepsilon_4 \end{pmatrix}$ . Montrer que la matrice  $A_\varepsilon$  est inversible.

**II.2.633** X ESPCI 2015

Soit  $A$  est une matrice carrée réelle. Montrer que  $A$  est antisymétrique si et seulement si, quelle que soit  $P$  orthogonale,  $P^{-1}AP$  est à diagonale nulle.

**II.2.634** CCINP PC 2024

Soit la matrice  $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $M^2$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Donner une valeur propre de  $M$ .

**II.2.635** Mines-Ponts

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que l'on peut écrire  $M$  sous la forme  $M = A + S + cI_n$ , avec  $A \in A_n(\mathbb{R})$ ,  $S \in S_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{Tr}(S) = 0$ , et  $c \in \mathbb{R}$ . Montrer, de plus, que :

$$\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(S^2) + \frac{1}{n}\text{Tr}(M)^2.$$

**II.2.636** CCINP PSI 2019

Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^2 + M^T = I_n$ .

1. Montrer que, si  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$ , alors les valeurs propres de  $M$  sont forcément racines de  $P$ .
2. On suppose que  $M$  est symétrique. Montrer que  $M$  est diagonalisable et que  $\text{Tr}(M) \det(M) \neq 0$ .
3. On ne suppose plus  $M$  symétrique. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
4. Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si 1 ne fait pas partie de son spectre.

**II.2.637** CCINP MP 2022

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices orthogonales de  $M_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ .

1. Que peut-on dire de  $A + B$ , de  $AB$  et de  $\text{com}(A)$  ?

2. On suppose de plus que  $\frac{A+B}{2}$  est orthogonale.

Calculer  $A^T B + B^T A$ . Montrer que toute matrice du segment  $[A; B]$  est orthogonale.

**II.2.638** Centrale-Supélec MP 2022

Soit  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que tout endomorphisme de  $E$  admet au moins un polynôme annulateur.
2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , et  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = \bigcup_{k=1}^p F_k.$$

Montrer qu'il existe  $k_0 \in \llbracket 1; p \rrbracket$  tel que  $F_{k_0} = E$ .

**II.2.639** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe une matrice  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = S$ .
2. Montrer que  $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et que  $(A^{-1})^2 = S^{-1}$ .
3. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ . Montrer que pour toute matrice  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  on a :

$$\langle X, X \rangle \leq \langle SX, X \rangle \langle S^{-1}X, X \rangle.$$

4. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

**II.2.640** Mines-ponts

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Soit encore  $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Soit  $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$  et :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Calculer  $\det(A\Omega)$  et en déduire la valeur de  $\det(A)$ .

2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer :

$$\Delta_n(\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cdots & \cos(n\theta) \\ \cos(n\theta) & \cos(\theta) & \cdots & \cos((n-1)\theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cdots & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

**II.2.641** CCINP TSI 2023

Soit  $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Calculer  $A^n$ .

**II.2.642** CCINP MP 2022

On note  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus  $n$ . Soit  $F$  et  $G$  deux polynômes de degré  $n+1$ . On considère  $f$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui à  $P$  associe le reste de la division euclidienne de  $FP$  par  $G$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. L'application  $f$  est-elle un automorphisme? (Discuter selon que  $F$  et  $G$  sont premiers entre eux ou pas.)
3. Supposons que  $F \wedge G = 1$  et que  $G$  soit scindé à racines simples. Quelles sont les valeurs propres de  $f$ ? L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable?

**II.2.643** Centrale-Supélec MP 2021

1. Soit  $N \in M_n(\mathbb{C})$  nilpotente. Justifier l'existence de  $d = \min\{p \in \mathbb{N} \mid N^p = 0\}$ .
2. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  nilpotente. Montrer que  $M^2 - I_n$  est inversible et déterminer son inverse en fonction de  $M$ .
3. On suppose maintenant que  $M \in M_n(\mathbb{C})$  vérifie :

$$M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0.$$

Montrer que  $|\operatorname{Tr}(M)| \leq n$ . Étudier les cas d'égalité.

**II.2.644** Centrale PC 2022

Soit  $n \geq 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Diagonaliser la matrice  $A$ .
2. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .

**II.2.645** CCINP MP 2023

Soit  $n \geq 2$  entier. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel : pour  $x = (x_1; \dots; x_n)$  et  $y = (y_1; \dots; y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Soit  $F = \{x = (x_1; \dots; x_n) \mid x_1 = x_n\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de  $F$ .
3. Déterminer  $F^\perp$ .
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur  $F$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
5. Calculer  $\operatorname{dist}(e_1; F)$ .

**II.2.646** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $p$  est orthogonal ;
- ii)  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**II.2.647** Mines-Télécom PSI 2023

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(0); P'(0); P(-1); P'(-1)) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\phi$  est linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker}(\phi)$ . L'application  $\phi$  est-elle bijective ?
3. Exprimer  $M$ , matrice de  $\phi$  dans la base canonique.
4. (a) Montrer que  $M$  est diagonalisable.  
(b) Donner un polynôme annulateur de  $M$ .  
(c) La matrice  $M$  est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q$  tel que  $\phi(Q) = (0; 1; 0; 1)$ .  
(b) Déterminer  $Q$ .  
(c) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=0}^n k^2$ .

**II.2.648** X MP MPI 2024

La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  peut-elle s'écrire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$  avec  $A \in M_2(\mathbb{R})$  ?

**II.2.649** Mines-Ponts PSI 2023

Soit  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + 4I_2 = 0$  et  $MM^T = M^T M$ .

Montrer que  $\frac{1}{2}M \in O_2(\mathbb{R})$  et en déduire  $M$ .

**II.2.650** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que l'on ait  $\text{Im}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$ . Montrer que  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^4)$ . Le résultat est-il toujours vrai en dimension infinie ?

**II.2.651** CCINP MP 2025

Soit  $\mathbb{K}$  le corps des réels ou des complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c, d, e, f$  pour que  $A$  soit diagonalisable. Dans l'hypothèse où  $A$  est diagonalisable, diagonaliser  $A$ .

**II.2.652** Centrale-Supélec MP 2024

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. (a) Montrer que toute matrice symétrique réelle admet des sous-espaces propres orthogonaux. Énoncer le théorème spectral.  
(b) Justifier que  $A$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset [0; 4]$ .
3. Lister les éléments de  $\text{Sp}(A)$ .

**II.2.653** CCINP MP 2024

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $u$  un vecteur unitaire de  $E$  et pour  $a$  dans  $\mathbb{R}$  on pose :

$$f_a : x \mapsto x + a\langle x, u \rangle u.$$

1. Montrer que  $f_a$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. (a) Montrer qu'il existe un unique  $a' \in \mathbb{R}^*$  tel que :

$$\forall x \in E, \|f_{a'}(x)\| = \|x\|.$$

- (b) Montrer que  $\text{Ker}(f_{a'} + \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(f_{a'} + \text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .
3. On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de  $f_a$ .

**II.2.654** CCINP MP 2024

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

1. Montrer que  $M = CL$ , où  $C$  une matrice colonne non nulle et  $L$  une matrice ligne non nulle.
2. Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{rang}(AB - BA) = 1$ . Calculer  $(AB - BA)^2$ .

**II.2.655** ENS MP 2024

Soit  $n \geq 1$  entier et  $\mathcal{I}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$ .

1. Montrer que si  $A \in \mathcal{I}_n$ , alors pour tout  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ , on a  $P^{-1}AP \in \mathcal{I}_n$ .
2. Soit  $A, B \in \mathcal{I}_n$ . Montrer que :

$$A \text{ semblable à } B \iff \text{rang}(A) = \text{rang}(B) \text{ et } \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B).$$

**II.2.656** Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Ici,  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , soit

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P(x)Q(x) dx.$$

- (a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.  
 (b) Montrer que  $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ .
2. Soit  $F = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(0) = 0\}$ . Montrer que l'inclusion précédente est stricte.  
 3. Soit  $E = C([0; 1], \mathbb{R})$  avec comme produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Soit  $F$  l'ensemble des fonctions de  $E$  qui sont nulles sur  $[0; \frac{1}{2}]$ . Montrer que  $F \oplus F^\perp \neq E$ .

**II.2.657** CCINP MP 2019

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

1. On cherche des vecteurs propres de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$  avec,

pour tout  $i \in \{2; 3; 4\}$ ,  $|\varepsilon_i| = 1$  et  $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$ .

Donner les éléments propres de  $A$ .

2. Que peut-on dire des sous-espaces propres de  $A$ ?  
 3. Donner  $\chi_A$ .  
 4. Si  $a = b = c = 1$ , donner  $\pi_A$ .  
 5. Si  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $c = 3$ , donner  $\pi_A$ .  
 6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\deg(\pi_A) = 4$ .  
 7. Donner une condition sur  $a, b$  et  $c$  pour que  $\deg(\pi_A) = 3$ .

**II.2.658** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_4(\mathbb{C})$  telles que  $A^4 = B^4 = I_4$  et  $AB + BA = 0$ .

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.  
 2. Donner  $\text{Tr}(A)$  et  $\text{Tr}(B)$ .  
 3. Donner les valeurs propres de  $A$  et  $B$  avec leur ordre de multiplicité.  
 4. Montrer que  $C = iAB$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**II.2.659** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On note  $\bar{A}$  la matrice conjuguée de  $A$ . Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- i)  $A\bar{A} = I_n$  ;
- ii)  $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

Indication : on pourra, pour une des implications, prendre  $\omega \in \mathbb{C}$  bien choisi et poser  $S = \omega A + \bar{\omega}I_n$ .

**II.2.660** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$ . Soit  $f \in L(E)$  nilpotent d'ordre  $p$ .

1. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. On suppose que  $\dim(E) = n$  et que  $p = n$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (x_0; f(x_0); \dots; f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .
  - (b) Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base  $\mathcal{B}$ ? On note  $A$  cette matrice.
  - (c) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. On choisit  $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ . Donner un exemple de  $f$  dans  $L(E)$  nilpotent d'ordre  $n$ , et d'une base telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit la matrice  $A$ .
4. (a) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $\exp(t(I_n + A))$ .  
 (b) Résoudre :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) + AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

**II.2.661** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E = \{f \in C^2([0; 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$  et  $F$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0; 1]$ .

1. Montrer que  $\phi : f \mapsto f''$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .
2. Soit  $g \in F$ . On pose :

$$\forall x \in [0; 1], G(x) = \int_0^1 |x - t|g(t) dt.$$

Montrer que  $G$  est de classe  $C^2$  et calculer  $G'''$ .

3. Déterminer une fonction continue  $k$  telle que :

$$\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x; t)g(t) dt.$$

4. Étudier l'existence et la valeur de  $\sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|\phi^{-1}(g)\|_\infty$ .

**II.2.662** CCINP PSI 2024

Étudier la diagonalisabilité de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , puis de  $N = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**II.2.663** Centrale-Supélec PC 2016

Soit  $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  telles que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $AB$  est la matrice d'un projecteur.
2. Déterminer  $\text{rang}(A)$  et  $\text{rang}(B)$ .
3. En déduire que  $BA = I_2$ .

**II.2.664** Centrale-Supélec MP 2016

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Existe-t-il toujours  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $P(M) = 0$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Existe-t-il toujours  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $P(M) = 0$  ?
3. Soit  $P = X^3 + X + 1$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $M \in M_n(\mathbb{Q})$  telle que  $P(M) = 0$ .

**II.2.665** Mines-Ponts PC 2016

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB = 0$ . Montrer que  $A$  et  $B$  ont au moins un vecteur propre commun.

**II.2.666** Mines-Ponts MP 2017

Trouver dans  $M_n(\mathbb{R})$  et  $M_n(\mathbb{C})$  les implications entre les propositions suivantes :

- i) Les matrices  $A$  et  $B$  sont diagonalisables et  $AB = BA$ ;
- ii) pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $A + \lambda B$  est diagonalisable.

**II.2.667** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel réel. On définit un *système générateur positif* sur  $E$  par le fait qu'il génère tous les éléments de  $E$  et que tous les éléments de  $E$  peuvent être générés par ce système en utilisant uniquement des coefficients positifs. Montrer que si  $\dim(E) = n$ , le cardinal d'un système générateur positif est supérieur ou égal à  $n + 1$ .

**II.2.668** Mines-Télécom MP 2017

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme.
2. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

**II.2.669** Centrale-Supélec MP 2017

On note  $L$  l'espace vectoriel des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}^*$ . On introduit l'endomorphisme  $D : L \rightarrow L$  qui réalise un décalage d'indexation :  $D(u)_n = u_{n+1}$ .

1. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer  $\text{Ker}(P(D))$ .
2. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  fixé. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(P(D))$ . Soit  $Q \in \mathbb{R}_d[X]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1; 2d \rrbracket$ ,  $Q(D)(u)_i = 0$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(Q(D))$ .
3. Connaissant  $(u_1; \dots; u_{2d})$ , proposer une méthode pour retrouver  $P$ .

**II.2.670** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes. Calculer le déterminant d'ordre  $n$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Attention, ce n'est pas un déterminant de Vandermonde, il n'y a pas de colonne avec des puissances  $n - 1$ .

**II.2.671** Centrale-Supélec MP 2017

On considère une fonction continue  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que toute matrice carrée d'ordre  $n > 0$  réelle inversible  $A = (a_{ij})$ , la matrice  $A = (f(a_{ij}))$  soit également inversible.

1. Montrer que pour tous réels distincts  $x, y$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$  est inversible. En déduire que  $f$  est injective.
2. On suppose que  $f$  est surjective. En considérant les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$  pour  $x, y, z$  réels avec  $z \neq x + y$ , montrer que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .
3. Montrer que  $f$  est surjective. Conclure quant à  $f$ .

**II.2.672** ENS MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que soit le spectre de  $A$  contient un nombre complexe de module supérieur à 1, soit il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k - I_n$  soit nilpotente.

**II.2.673** CCINP PC 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^2 = A$  et  $A^T = A$ .

1. Montrer que  $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A)$ .
2. Montrer que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n \sqrt{\text{rang}(A)}$ .

**II.2.674** Mines-Télécom PC 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $A$  sa matrice associée dans une base  $\mathcal{B}$ .

1. Donner la définition de  $u$  est diagonalisable et donner la version matricielle de cette définition.
2. Donner une caractérisation de  $u$  diagonalisable.
3. On suppose  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $u$  diagonalisable et  $u^4 = \text{Id}_E$ . Montrer que  $u$  est une symétrie vectorielle.
4. On donne  $\text{Tr}(u) = n - 2$ . Préciser le résultat précédent.

**II.2.675** Mines-Télécom PC 2019

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel et  $u$  une isométrie vectorielle.

1. Définir une isométrie vectorielle.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de  $u$ ? Justifier.
3. L'isométrie  $u$  admet-elle nécessairement une ou plusieurs valeurs propres réelles? Justifier.

4. La matrice de  $u$  dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Caractériser géométriquement  $u$ .

**II.2.676** ENSEA/ENSIIE MP 2013

Soit  $K$  la matrice définie de la façon suivante : pour tout  $(p; q) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ , le coefficient  $K_{p,q}$  vaut  $e^{2i\pi pq}$ . On définit  $K'$  la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $K$ .

1. Calculer  $KK'$ .
2. Montrer que  $K$  est inversible et donner son inverse.
3. Calculer  $|\det(K)|$ .

**II.2.677** Centrale-Supélec PSI 2013

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices non nulles de  $M_3(\mathbb{C})$  telles que  $A^2 = B^2 = 0$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B$ . Est-ce vrai en dimension 4?

**II.2.678** Centrale-Supélec PSI 2014

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent exclusivement 1 ou  $-1$ .

1. Montrer que  $\det(A)$  est un multiple de  $2^{n-1}$ .
2. Calculer  $\det(A)$  pour  $A$  comprenant  $-1$  dans la diagonale et 1 partout ailleurs.

**II.2.679** CCINP PC 2014

Soit  $n \geq 3$  entier et  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On suppose  $\text{rang}(A) = 2$ ,  $\text{Tr}(A) = 0$  et  $A - I_n$  non inversible. Quel est le spectre de  $A$ ? La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**II.2.680** Centrale-Supélec PSI 2014

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall (x; y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \iff \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

1. Montrer que  $f$  est inversible.
2. Montrer que l'image d'un plan est un plan.
3. Montrer que l'image d'une sphère est une sphère.
4. Montrer que pour tout  $(x; y) \in E^2$ , il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\langle x, y \rangle = k \langle f(x), f(y) \rangle$ .

**II.2.681** Mines-Ponts 2016 PC

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

Déterminer les éléments propres de  $A$ .

**II.2.682** CCINP PC 2014

On considère l'ensemble

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & b \end{pmatrix} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que toute matrice de  $M_2(\mathbb{R})$  est semblable à un élément de  $A_2$ .

Dans tout l'exercice, on considère un élément  $M$  de  $M_2(\mathbb{R})$  et on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui lui est canoniquement associé.

1. Démontrer la propriété attendue dans le cas où  $M$  est diagonalisable.
2. Dans cette question, on prend  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Prouver que  $M$  n'est pas diagonalisable.
  - (b) Trouver un vecteur  $e_1$  qui n'est pas dans le noyau de  $f$ .  
On pose  $e_2 = f(e_1) - e_1$ .
  - (c) Vérifier que  $(e_1; e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
  - (d) Trouver une matrice de  $A_2$  semblable à  $M$ .
3. On se place dans le cas général où  $M$  n'est pas diagonalisable.
  - (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $e_1$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que le couple  $(e_1; f(e_1))$  soit une base de  $\mathbb{R}^2$ .
  - (b) Montrer que la matrice de  $f$  relativement à cette base est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$  pour un certain couple  $(a; b)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
  - (c) Montrer que le coefficient  $a$  est forcément négatif.
  - (d) Si  $a$  est nul, montrer que  $b$  l'est forcément aussi. Conclure dans ce cas.
  - (e) Traiter enfin le cas où  $a$  est strictement négatif.

**II.2.683** Mines-Ponts PSI 2014

1. Soit  $E$  un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) telle que  $A^q = I_n$ . Montrer que :

$$\dim(\text{Ker}(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \text{Tr}(A^k).$$

**II.2.684** CCINP MP 2016

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u \in L(E)$  et  $P$  un polynôme admettant une racine simple, tel que  $P(u) = 0$ . Montrer de deux manières différentes que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ , dont une utilisant le théorème de Bézout.

**II.2.685** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ .

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  définie par  $a_{ij} = a_i a_j$  pour  $i, j \in \{1; \dots; n\}$ .

1. Montrer que  $A$  est la matrice d'un projecteur orthogonal.
2. Montrer que  $I_n - 2A$  est la matrice d'une symétrique orthogonale.

**II.2.686** Mines-Télécom MP 2016

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $a \in \mathbb{K}^*$  tel que :

$$f^3 - 3af^2 + a^2f = 0.$$

Montrer que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**II.2.687** X MP 2016

Définissons pour  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$  :

$$A \star B = (a_{ij} \cdot b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Montrer que si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $S_n^+(\mathbb{R})$ , alors  $A \star B$  appartient aussi à  $S_n^+(\mathbb{R})$ .

**II.2.688** CCINP PSI 2016

Montrer que les matrices réelles  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  sont semblables.

**II.2.689** Mines-Télécom MP 2017

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? La réduire.
2. Résoudre l'équation  $\exp(M) = A$ , d'inconnue  $M \in M_3(\mathbb{R})$ .

**II.2.690** Mines-Télécom MP 2017

Considérons  $H = \{AB - BA \mid (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2\}$ .

1. Démontrer que l'application trace  $\text{Tr} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire non nulle.
2. Notons  $(E_{ij})_{i,j}$  la base canonique de  $M_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $E_{ij}E_{kl}$ .
3. Démontrer que pour tout  $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ ,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . En déduire que  $\text{Ker}(\text{Tr}) = H$ .
4. Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Démontrer que  $\{\varphi; \text{Tr}\}$  est liée.

5. Déterminer un supplémentaire de  $\text{Ker}(\text{Tr})$ .

**II.2.691** Mines-Ponts PSI 2017

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

1. Diagonaliser  $A$ .
2. On cherche les matrices  $M \in M_2(\mathbb{R})$  solutions de l'équation :

$$(E) : M^2 + M = A.$$

- (a) Si  $M$  est solution de  $(E)$ , montrer que  $\text{Sp}(M) \subset \{-3; -2; 1; 2\}$  et que  $M$  est diagonalisable.
- (b) Trouver toutes les solutions de  $(E)$ .

**II.2.692** Centrale-Supélec PC 2017

Soit  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ . On pose  $B = AA^T$  et  $C = A^T A$ . Soit  $\lambda$  un réel non nul. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $B$ , alors elle est valeur propre de  $C$  avec la même multiplicité.

**II.2.693** X ESPCI 2017

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Montrer que  $\dim(\text{Vect}(\{v_i - v_j \mid 1 \leq i, j \leq n\})) \leq n - 1$ .

**II.2.694** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A$  et  $B$  des matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ . On suppose que pour tout  $X$  appartenant à  $M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $X^T B X > 0$ . Montrer que  $A + iB$  est inversible.

**II.2.695** ENSEA/ENSIIE MP 2017

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que :

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset.$$

Dans  $M_n(\mathbb{R})$ , l'équivalence est-elle conservée ?



**II.2.701** CCINP PSI 2019

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \mathbb{R}^3$ .

**II.2.702** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Calculer les puissances de  $A$ .
2. Trouver  $B$  telle que  $A = B^2$ .

**II.2.703** Mines-Télécom MP 2019

Soit  $P_n$  l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  à coefficients dans  $\{0; 1\}$ , telles qu'il n'y ait qu'un seul 1 par ligne et un seul 1 par colonne. Montrer que les matrices de cet ensemble sont diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ .

**II.2.704** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer l'équivalence entre :

- i)  $A\bar{A} = I_n$  ;
- ii) il existe  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

**II.2.705** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $f, g \in L(E)$ .

1. On suppose qu'il existe  $h \in L(E)$  de rang  $r \geq 1$  tel que  $h \circ g = f \circ h$ . Montrer que  $\chi_f$  et  $\chi_g$  ont un facteur commun de degré  $r$ .
2. La réciproque est-elle vraie ?

**II.2.706** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace préhilbertien. Soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments de  $E$  telle qu'il existe une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \langle e_i, e_j \rangle = f(|i - j|).$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. Montrer que  $M_n$  est inversible si, et seulement si, la famille  $\{e_1; \dots; e_n\}$  est libre.
2. On suppose  $M_n$  inversible et  $M_{n+1}$  non inversible.  
Montrer que la famille  $\{e_1; \dots; e_r\}$  est liée pour tout  $r \geq n + 1$ .
3. On suppose  $M_n$  inversible et  $M_{n+1}$  non inversible.  
Montrer que  $e_r \in \text{Vect}(\{e_1; \dots; e_{r-1}\})$  pour tout  $r \geq n + 1$ .
4. On suppose  $f(0) \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ .  
Montrer que  $M_n$  est inversible pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**II.2.707** CCINP MP 2019

Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme associé.

1. Quel est le rang de  $M$  ?
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $M$ .
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur l'image de  $f$ .

**II.2.708** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^T = A^2 + A - I_n$ . On appelle  $a$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

1. Décrire  $a$  si  $A$  est symétrique, avec  $A \in \mathcal{E}$ .
2. Décrire  $a$  si on ne suppose plus  $A$  symétrique, avec  $A \in \mathcal{E}$ .

**II.2.709** CCINP PC 2018

On travaille dans l'espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On définit un produit scalaire dans  $E$  par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

On note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

Sur  $E$  on définit également :

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt \quad \text{et} \quad f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X.$$

1. (a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.  
 (b) On admet que  $f_\alpha$  est un endomorphisme de  $E$ . Pour cette question, on suppose  $n = 3$ . Donner la matrice  $A_\alpha$  de  $f_\alpha$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .  
 (c) Donner le spectre de  $f_\alpha$ . En déduire si  $f_\alpha$  est bijectif ou non. L'endomorphisme  $f_\alpha$  est-il diagonalisable ?

On définit l'endomorphisme  $g_\alpha$  sur  $E$  par  $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$ .

2. (a) Donner le rang de  $\varphi$ . Montrer que  $(\text{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$ .  
 (b) Donner le spectre de  $g_\alpha$ . L'endomorphisme  $g_\alpha$  est-il diagonalisable ? bijectif ?  
 (c) Montrer que  $\|g_\alpha(P)\| \leq (1 + 2|\alpha|)\|P\|$ .  
 (d) En déduire qu'il existe  $M$  tel que :

$$M = \sup_{P \in E, P \neq 0} \left( \frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|} \right).$$

Donner la valeur de  $M$ .

**II.2.710** Mines-Ponts MP 2018

On note  $N$  l'ensemble des matrices complexes nilpotentes et  $T$  l'ensemble des matrices complexes de trace nulle.

1. A-t-on  $\text{Vect}(N) = N$  ?
2. Montrer que  $\text{Vect}(N) \subset T$ .
3. A-t-on l'inclusion réciproque ?

**II.2.711** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & p \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

On note  $f$  l'endomorphisme associé à  $A$  dans la base canonique de  $E$ .

1. Déterminer une condition sur  $p$  telle que l'on ait :

$$\forall X \in M_3(\mathbb{R}), \|AX\|_2 \leq \|X\|_2.$$

2. Soit  $x \in E$ . Déterminer la limite éventuelle de  $\sum_{k=0}^n f^k(x)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**II.2.712** Mines-Télécom PC 2018

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.713** Mines-Ponts MP 2018

On identifie  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in S_n(\mathbb{R})$  à valeurs propres strictement positives. On définit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation :

$$f(X) = X^T A X - 2B^T X.$$

1. Donner l'expression du gradient de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  admet un minimum. Calculer ce minimum.

**II.2.714** Mines

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  et

$$M = \begin{pmatrix} A + B & A - B \\ A - B & A + B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $M$  soit inversible.
2. Si  $M$  est inversible, calculer  $M^{-1}$ .

**II.2.715** CCINP PC 2018

Soit une matrice  $M \in M_4(\mathbb{C})$ ,  $M = (C_1 | C_2 | C_3 | C_4)$  ( $C_i$  étant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $M$ ).  
Montrer que :

$$\det((C_1 + C_3 | C_2 + C_4 | C_1 - C_3 | C_2 - C_4)) = 4 \det(M).$$

**II.2.716** CCINP PC 2018

On munit  $M_2(\mathbb{R})$  du produit scalaire défini par  $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N)$ .  
Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , soit

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(x) - 1 & 4 \\ -2 & \sinh(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cosh(x) & 3 \\ 6 & -\sinh(x) \end{pmatrix}.$$

1. A-t-on  $\langle A, B \rangle = 0$  ?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans  $M_2(\mathbb{R})$ .
3. Déterminer la distance de  $A$  à l'espace vectoriel des matrices symétriques.

**II.2.717** Mines-Télécom MP 2018

Soit  $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$  et

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de  $A$  ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.

**II.2.718** TPE/EIVP MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3 orienté et  $u$  un vecteur unitaire de  $E$ . On définit l'application  $f$  de  $E$  dans  $E$  par  $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$  pour tout  $x \in E$ .

1. Montrer que  $f$  est symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

**II.2.719** Mines-Ponts PC 2024

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Montrer que  $\dim(E) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Quelle est la dimension maximale de  $E$  ?

**II.2.720** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $u \in L(E)$ .

1. On suppose que  $u^3 = u^2$ . Montrer que  $u^2$  est diagonalisable et que  $u - u^2$  est nilpotent.
2. On suppose  $u^{k+1} = u^k$  pour  $k > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $p$  tel que  $u^p$  est diagonalisable et que  $u - u^p$  est nilpotent.
3. Conclure.

**II.2.721** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $A = \left\{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ . Déterminer la dimension de  $\text{Vect}(A)$ .
2. Soit  $B = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_2 \}$ . Déterminer la dimension de  $\text{Vect}(B)$ .

**II.2.722** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  et  $J = (1) \in M_n(\mathbb{R})$ .

On définit  $P(x) = \det(A + XJ)$ .

1. Majorer « fortement » le degré de  $P$ .
2. Que vaut  $\det(A)$ ? (On distinguera les cas  $c \neq 1$  et  $c = 1$ .)

**II.2.723** CCINP MP 2012

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 4,  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \neq \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2)$ ,  $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$  et  $\text{Tr}(f) = 4$ .

1. Montrer que 0 et 1 sont valeurs propres de  $f$  et que  $f$  n'est pas diagonalisable.
2. Montrer l'existence d'un vecteur  $x_0 \in \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2) \setminus \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  tel que  $F = \text{Vect}(\{x_0; f(x_0)\})$  soit un plan de  $E$ .
3. Montrer que 1 est valeur propre de multiplicité 2.
4. Montrer l'existence d'une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**II.2.724** Centrale-Supélec MP 2015

On considère l'ensemble

$$U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^T M = I_n\}.$$

1. Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que tout espace propre de l'un est stable pour l'autre.
2. Soit  $M \in U_n(\mathbb{C})$  tel que  $M^T = M$ . Montrer qu'il existe  $U$  et  $V$  symétriques réelles telles que :
  - $M = U + iV$
  - $UV = VU$
  - $U^2 + V^2 = I_n$
3. Montrer qu'il existe une matrice  $S$  symétrique réelle telle que  $M = \exp(iS)$ .
4. Montrer que  $M \in U_n(\mathbb{C})$  si et seulement s'il existe  $P$  orthogonale (réelle),  $S$  symétrique réelle telle que  $M = P \exp(iS)$ .

**II.2.725** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  fixée. On note :

$$\begin{aligned} \varphi_A : S_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ S &\longmapsto ASA^T \end{aligned}$$

Montrer que  $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$ .

**II.2.726** Mines-Ponts PSI 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On suppose  $\text{Tr}(A) = 0$ ,  $\text{rang}(A) = 2$  et  $A^n \neq 0$ .  
Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.727** CCINP PC 2017

Soit  $A$  une matrice réelle symétrique telle que  $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$ .
3. En déduire que  $A = 0$ .

**II.2.728** CCINP PSI 2022

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit encore  $z \in E$ .

1. Montrer que  $\min_{x \in E} \|f(x) - z\|$  existe et expliquer la méthode de calcul.
2. Calculer  $\min_{X \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})} \|AX + B\|$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**II.2.729** Mines-Ponts MP 2016

On note  $J$  la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1, et  $e$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes dans la base canonique sont égales à 1. Soit  $M$  une matrice carrée symétrique de taille  $n$  telle que :

- Sur chacune de ses lignes,  $d$  coefficients sont égaux à 1 et les autres sont nuls.
  - Ses coefficients diagonaux sont tous nuls.
  - Pour tout  $i \neq j$  : si  $m_{ij} = 0$ , alors il existe un unique  $k$  tel que  $m_{ki} = m_{kj} = 1$  et si  $m_{ij} = 1$ , alors il n'existe pas de tel  $k$ .
1. Quelles sont les valeurs propres de  $J$  ?
  2. Écrire  $MJ$ ,  $JM$  et  $M^2$  comme combinaison linéaire de  $M$ ,  $J$  et  $I_n$ .
  3. Montrer que  $\text{Ker}(M - dI_n) = \text{Im}(J)$ . En déduire une relation entre  $d$  et  $n$ .
  4. Montrer que les valeurs propres de  $M$  autres que  $d$  sont racines du polynôme  $X^2 + X + 1 - d$ .

**II.2.730** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur le segment  $[0; 1]$ , muni de la norme uniforme. Soit  $u$  l'application définie sur  $E$  par :

$$u(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt.$$

1. Montrer que  $u$  est une forme linéaire continue sur  $E$ .
2. Montrer que  $\sup_{f \neq 0} \frac{|u(f)|}{\|f\|} = 1$ , mais que cette valeur n'est pas atteinte.

**II.2.731** ENSEA/ENSIIE MP 2016

Soit  $P_1 = X^3 - 12X - 12$  et  $P_2 = X^3 + 12X - 12$ .

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Rappeler ce que signifie «  $\alpha$  est racine de multiplicité  $n$  de  $P$  » et donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\alpha$  soit racine de multiplicité  $n$  de  $P$ .
2. (a) Combien de racines réelles admet  $P_1$  ? Donner leur ordre de multiplicité.  
(b) Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $P_1(M) = 0$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $P_2(M) = 0$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $M$  est une matrice scalaire.

**II.2.732** CCINP PC 2017

Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

Pour tout entier  $n$ , on note  $f_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $f$ .

1. Donner la matrice de  $f_3$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Soit  $P \in \text{Ker}(f)$ . Montrer que  $P - P(0)$  admet une infinité de racines. En déduire  $\text{Ker}(f)$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $f_n$ .
4. Prouver que  $f$  est surjectif.
5. Trouver tous les polynômes  $P$  tels que :

$$P(X + 1) - P(X) = X^2.$$

6. En déduire une expression simple de  $\sum_{k=0}^n k^2$ .

**II.2.733** X ESPCI

Soit  $n \in \mathbb{N}$  impair. Montrer que  $-I_n$  n'est pas la somme de deux carrés de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.734** Mines-Ponts MP

1. Soit  $E_1, E_2, E_3$  des espaces vectoriels de dimension finie.  
Soit  $f \in L(E_1, E_2)$ ,  $g \in L(E_1, E_3)$  tels que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .  
Montrer qu'il existe  $h \in L(E_2, E_3)$  tel que  $g = h \circ f$ .

2. On suppose ici  $E = M_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Soit  $\phi$  une forme linéaire de  $E$ . Montrer qu'il existe  $C \in E$  telle que :

$$\forall M \in E, \phi(M) = \text{Tr}(CM).$$

- (b) Soit  $A$  une matrice nilpotente de  $E$ . Montrer qu'il existe  $C \in E$  telle que :

$$\forall M \in E, \text{Tr}(AM) = \text{Tr}(C(AM - MA)).$$

En déduire que  $A = CA - AC$ .

**II.2.735** Centrale-Supélec PSI 2025

Soit  $E$  un espace euclidien,  $f \in L(E)$  bijective vérifiant pour tous  $x, y \in E$  :

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

On définit  $s = f \circ f$ .

1. Montrer que  $s$  est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $s$ . Montrer que  $\lambda < 0$ . En déduire que la dimension de  $E$  est paire.
3. Soit  $x$  un vecteur non nul appartenant au sous-espace propre relatif à  $\lambda$ . On pose  $F = \text{Vect}(\{x; f(x)\})$ . Montrer que  $F$  est un plan vectoriel stable par  $f$  et que  $F^\perp$  est stable par  $f$ .
4. Montrer alors que dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  bien choisie,  $(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ .

**II.2.736** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A \in M_p(\mathbb{R})$  et

$$\Delta : M \in M_p(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $M_p(\mathbb{R})$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (M; N) \in M_p(\mathbb{R})^2, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k(M) \Delta^{n-k}(N).$$

2. Soit  $H \in M_p(\mathbb{R})$ . On suppose que  $B = \Delta(H)$  commute avec  $A$ . Montrer que  $\Delta^2(H) = 0$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$ .
3. Montrer que  $\Delta^n(H^n) = n!B^n$ .
4. En déduire que  $B$  est nilpotente.

**II.2.737** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$

des matrices réelles.

1. Calculer  $U^2$ . Déterminer les éléments propres de  $U$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $V$  et  $W$ .
3. Montrer que l'on peut trouver une base de vecteurs propres commune à  $U, V$  et  $W$ .
4. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Quels sont les éléments propres de  $A$  ? À quelle condition nécessaire et suffisante  $A$  est-elle inversible ?

**II.2.738** Mines-ponts MP 2023

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $N = A - I_n$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $N$ .
2. Soit  $(E) : A = X^2$  d'inconnue  $X \in M_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que si  $X$  est solution de  $(E)$ , alors il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que :

$$X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \alpha_1 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Montrer qu'il existe au plus deux solutions de  $(E)$ .
3. (a) Donner le développement limité au voisinage de 0 de  $\sqrt{1+x}$  à la précision  $o(x^n)$ .
  - (b) Résoudre  $(E)$ .

**II.2.739** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M \in S_n(\mathbb{R})$  si, et seulement si, le polynôme caractéristique de  $M$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et si  $M^T M = M M^T$ .

**II.2.740** CCINP PC 2024

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice  $A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

**II.2.741** Mines-Ponts PSI 2016

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

La matrice  $A$  est-elle inversible ?

**II.2.742** CCINP PSI 2016

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . Montrer que  $K$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $M$  s'écrit en fonction de puissances de  $K$ .
3. Diagonaliser  $M$ .
4. En déduire  $M^n$ .

**II.2.743** Mines-Ponts PSI 2013

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$ .

1. Supposons que  $\text{rang}(f) = 2$ . Exprimer le polynôme caractéristique de  $f$  en fonction de  $\text{Tr}(f)$  et  $\text{Tr}(f^2)$ .
2. Supposons que  $\text{rang}(f) = 3$ . Exprimer le polynôme caractéristique de  $f$  en fonction de  $\text{Tr}(f)$ ,  $\text{Tr}(f^2)$  et  $\text{Tr}(f^3)$ .

**II.2.744** Centrale-Supélec PSI 2016

Soit  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $n$  et  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Énoncer le théorème spectral.
2. Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .
3. Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M^T M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer alors qu'il existe  $O$  orthogonale et  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $M = OS$ .

**II.2.745** ENS 2025

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que :

$$u \text{ est simple} \iff \chi_u \text{ est irréductible dans } \mathbb{K}[X].$$

**II.2.746** CCINP PC 2015

Soit  $n$  un entier strictement positif,  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique,  $u$  un vecteur fixé de  $E$ ,  $A$  une matrice symétrique de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base canonique. On étudie la fonction  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout vecteur  $x = (x_1; \dots; x_n)$  associe  $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2\langle x, u \rangle$ .

1. Ici  $n = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $u = (5; 1)$ . Vérifier que :

$$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2.$$

Montrer que  $X_0 = (2; 1)$  est un point critique de  $f$ .

2. Avec les conditions de la question 1, soit  $h = (h_1; h_2)$ . Montrer que

$$f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2,$$

où  $a, b, c$  sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que  $f$  admet un extremum en  $X_0$ .

3. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout  $x$  non nul de  $E$ ,  $\langle x, \varphi(x) \rangle > 0$ . Montrer que les valeurs propres de  $\varphi$  sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de  $\varphi$ , montrer que  $f$  possède un extremum que l'on précisera.

**II.2.747** CCINP PC 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On note :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \text{et} \quad \rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

1. Déterminer la norme de  $\|A\|$  et  $\rho(A)$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ .
2. Montrer que  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  pour  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .
3. (a) Soit  $x$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Montrer que :

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j|$$

pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

- (b) En déduire que  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

4. Montrer que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle dans  $M_n(\mathbb{C})$  si et seulement si  $\rho(A) < 1$ .
5. Montrer que  $\rho(A)^k = \rho(A^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**II.2.748** CCINP PSI 2021

Soit  $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $H$  est-elle diagonalisable ?
2. Si  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :

$$R(a; b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix},$$

notée plus simplement  $R$ .

Exprimer  $R$  en fonction de  $H$  et  $I_3$ . La matrice  $R$  est-elle diagonalisable ?

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \text{Tr}(H^n)$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs entières et diverge.
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \text{Tr}(R^n)$ . Peut-on trouver  $a$  et  $b$  tels que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ?

**II.2.749** CCINP PSI 2021

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A_m$ .
2. Donner, si existence, les valeurs de  $m$  telles que  $A_m$  soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si  $A_m$  est diagonalisable, déterminer la matrice de passage  $P$ .

**II.2.750** CCINP MP 2015

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Comparer  $\det(A)$  et  $\det(-A)$ .
2. (a) Soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. Discuter de la parité du polynôme caractéristique de  $B$ .  
(b) Retrouver le fait que si  $n$  est impair et  $B \in M_n(\mathbb{R})$  est antisymétrique, alors  $\det(B) = 0$ .

**II.2.751** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose que 0 est la seule matrice qui vérifie  $AM = MB$ . Montrer que toute matrice s'écrit de façon unique comme  $AN - NB$ .
2. On suppose que  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ . Montrer que la seule matrice qui vérifie  $AM = MB$  est la matrice nulle.
3. Est-ce encore le cas dans  $M_n(\mathbb{R})$  ?

**II.2.752** Centrale-Supélec MP 2016

1. Donner le polynôme caractéristique de  $A \in M_2(\mathbb{R})$  en fonction de sa trace et de son déterminant.
2. Soit  $E$  l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que :

$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}), A^p + \dots + A = pI_2.$$

Montrer à l'aide de  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  que  $\{2; 3\} \subset E$ .

3. Montrer que pour tout  $p \in E$  et  $A$  associé,  $X^{p+1} - (p+1)X + p$  annule  $A$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et que 1 est sa seule valeur propre réelle.

**II.2.753** Centrale-Supélec MP 2017

On se donne un espace vectoriel de dimension finie  $E$  et  $u \in L(E)$ . On considère les deux propositions :

- $(P_1)$  : Il existe  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que  $u(F) \subset G$  et  $u(G) \subset F$ .
- $(P_2)$  : Il existe  $a$  et  $b$  des endomorphismes de  $E$  tels que  $u = a + b$  et  $a^2 = b^2 = 0$ .

1. Montrer que  $(P_1)$  implique  $(P_2)$ .
2. On suppose ici que  $u$  est un automorphisme. Montrer que si  $(P_2)$  est vérifiée alors  $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b) = \text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$ .
3. Montrer que  $(P_2)$  implique  $(P_1)$  dans chacun des cas suivants :
  - (a)  $u$  est un automorphisme ;
  - (b)  $u$  est nilpotent.

**II.2.754** CCINP PSI 2017

On se place dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . On définit le produit scalaire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit  $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
3. Que vaut  $\text{dist}(1; E)$  ?

**II.2.755** CCINP MP 2017

Soit  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  est orthogonale.
2. Étudier la nature de  $A$  et ses éléments caractéristiques.

**II.2.756** Mines-Ponts MP 2017

- Déterminer une condition sur  $\lambda$  réel tel qu'il existe  $A$  une matrice antisymétrique réelle vérifiant  $A^2 = \lambda I_n$ .
- Déterminer les matrices  $B$  symétriques réelles telles qu'il existe  $A$  une matrice antisymétrique réelle vérifiant  $A^2 = B$ .

**II.2.757** Mines-Ponts MP 2019

Résoudre l'équation  $e^A = I_n$  pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

**II.2.758** Mines-Télécom PSI 2018

L'endomorphisme  $f$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans une base orthonormée d'un espace euclidien. Déterminer la nature de  $f$ .

**II.2.759** CCINP PC 2022

Soit  $(p; q) \in \mathbb{R}^2$ . On considère l'équation  $(E)$  suivante :

$$M^2 + pM + qI_n = 0$$

d'inconnue  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .

- On pose  $\Delta = p^2 - 4q$ . Vérifier l'identité :

$$M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 - \frac{\Delta}{4}I_n.$$

On suppose désormais que  $\Delta > 0$ .

- Montrer que résoudre  $(E)$  revient à résoudre l'équation  $Y^2 = I_n$ , d'inconnue  $Y \in M_n(\mathbb{R})$ .
- Élever la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  au carré. En déduire une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  diagonale par blocs mais pas diagonale, solution de  $Y^2 = I_n$ .

On considère une solution de  $(E)$ , notée  $A$ , et on suppose que  $A$  n'est pas colinéaire à  $I_n$ .

- Soit  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $M = \alpha A + \beta I_n$ .

(a) Montrer que l'égalité  $M^2 = M$  équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha(2\beta - \alpha p - 1) = 0 \\ \beta^2 - \beta - \alpha^2 q = 0 \end{cases}$$

- Montrer que ce problème a exactement quatre solutions.

Les matrices correspondantes différentes de 0 et de  $I_n$  sont notées  $U$  et  $V$ .

- Calculer les produits  $UV$  et  $VU$ . Commenter.

**II.2.760** Mines-Ponts MP 2024

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $A \in M_n(\mathbb{R})$  pour qu'il existe  $S \in S_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = S^2 + S + I_n$ .
2. Déterminer  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle qu'il existe une unique matrice  $S \in S_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = S^2 + S + I_n$ .

**II.2.761** CCINP PC 2018

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

1. Pour quelles valeurs de  $a$  la famille  $\{A; A^2\}$  est-elle liée ?
2. Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.762** CCINP PC 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel tel que  $\dim(E) = 2p + 1$  où  $p \in \mathbb{N}$ . Soit encore  $f \in L(E)$ .

1. Si  $\lambda$  est une valeur propre et  $x$  un vecteur propre associé, que vaut  $f^n(x)$  ?
2. Supposons  $f^3 - f^2 + f - \text{Id}_E = 0_E$ . Justifier que  $f$  admet au moins une valeur propre réelle et la donner.

**II.2.763** Centrale-Supélec PC 2022

Pour tout  $(\alpha; \beta) \in [0; 1]^2$ , on définit la matrice

$$A(\alpha; \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence de la suite  $(A(\alpha; \beta)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ .
2. Dans le cas de convergence, déterminer le rang de la matrice limite.

**II.2.764** CCINP PC 2022

Soit  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ .

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $(a; b; c; d)$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable.

**II.2.765** CCINP PSI 2022

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' = -x + 3y - 2z \\ y'' = -3x + 5y - 2z \\ z'' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

**II.2.766** Mines-Ponts

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif fini à  $q$  éléments. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in L(E)$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f^q = f$ .

**II.2.767** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$  et  $u \in L(E)$ .

1. Montrer que si  $u$  est de rang  $r$ , alors son polynôme minimal a un degré inférieur ou égal à  $r + 1$ .
2. Dans le cas général, peut-on améliorer cette majoration ?

**II.2.768** Centrale-Supélec MP 2016

Soit  $P = X^2 + \alpha X + \beta$  un polynôme n'ayant pas de racine réelle,  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , et  $f \in L(E)$  telle que  $P(f) = 0$ .

On cherche à prouver qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $n$  est pair et que  $f$  n'admet pas de valeur propre.
2. Soit  $x \in E$  et  $y = f(x) + \alpha x$ . On pose  $H_x = \text{Vect}(\{x; y\})$ . Montrer que  $H_x$  est stable par  $f$ .
3. Démontrer le résultat annoncé.

**II.2.769** Mines-Ponts MP 2019

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n}\right) & \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \cos\left(\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}^n.$$

**II.2.770** CCINP MP 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Soit  $f \in L(E)$  de rang 1.

1. Montrer que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$  si et seulement si  $f$  est non diagonalisable.
2. Donner un exemple concret d'une matrice à coefficients réels de taille  $3 \times 3$  de rang 1 qui ne soit pas diagonalisable. Justifier par une autre méthode qu'elle n'est pas diagonalisable.

**II.2.771** Mines-Ponts PC 2019

On considère une suite complexe  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que  $a_2 \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique et noté  $\chi_n$ .

1. Déterminer  $\chi_2$  et  $\chi_3$ .
2. Montrer que  $\chi_n$  est divisible par  $X^{n-2}$ .
3. On pose  $b_n = \sum_{k=2}^n a_k^2$ . Montrer alors que  $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$ .
4. Selon que  $b_n$  est nul ou non, étudier la diagonalisabilité de  $A_n$ .

**II.2.772** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Trouver les éléments propres de  $A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que  $A$  est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer  $T^n$  puis  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.773** Mines-Ponts PC 2019

Soit  $T \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E_T$  l'ensemble des suites réelles  $T$ -périodiques. On note  $\sigma$  l'endomorphisme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E_T$ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

**II.2.774** Mines-Télécom MP 2019

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  est diagonalisable.

**II.2.775** ENS MP 2019

Soit  $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Tr}(XYXY) \leq \text{Tr}(X^2Y^2)$ .

**II.2.776** Mines-Ponts PC 2015

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\text{rang}(f) = \text{rang}(f^2)$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
2. Étudier la réciproque.

**II.2.777** ENSEA/ENSIIE PSI 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$ .

Donner les valeurs propres de la matrice  $B$ .

**II.2.778** ENSEA/ENSIIE MP 2015

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A + 4I_n = 0$ .

1. Montrer que  $A$  ne peut pas avoir de valeurs propres réelles.
2. Montrer que  $n$  est nécessairement pair.
3. Trouver le déterminant et la trace de  $A$ .

**II.2.779** Centrale-Supélec MP 2015

Soit  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$ . On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Rappeler la forme des solutions de  $au_{n-2} + bu_{n-1} + cu_n = 0$  pour  $a \neq 0$ .
2. Étudier l'inversibilité de  $A_n$ .
3. Étudier la diagonalisabilité de  $A_n$  dans  $\mathbb{C}$  puis dans  $\mathbb{R}$ .

**II.2.780** ENSEA/ENSIIE MP 2015

Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que le polynôme caractéristique de  $M$  est  $(X - 1)^2(X + 1)$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que  $M$  est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**II.2.781** Mines-Ponts MP 2015

Trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

**II.2.782** Centrale-Supélec PC 2015

Soit  $n$  un entier supérieur à 3 et  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer les éléments propres de  $A_n$ .

**II.2.783** CCINP MP 2015

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $p$  un entier naturel, avec  $p \geq 2$ . Soit  $e_1, \dots, e_p$   $p$  vecteurs de  $E$  tels que, pour tous  $1 \leq i, j \leq p$ , si  $i \neq j$ , alors  $\langle e_i, e_j \rangle < 0$ .

1. Pour  $1 \leq i, j \leq p$ , comparer  $\lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle$  et  $|\lambda_i| |\lambda_j| \langle e_i, e_j \rangle$ .

2. Comparer  $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k \right\|^2$  et  $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \right\|^2$ .

Montrer que  $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0_E \implies \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0_E$ .

3. Montrer que toute sous-famille de  $p-1$  vecteurs extraite de  $\{e_1; \dots; e_p\}$  est libre.

**II.2.784** Mines-Ponts

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $(u; v) \in L(E)^2$ , on note  $[u, v] = uv - vu$ . soit  $f, g \in L(E)^2$ .

1. On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tel que  $[f, g] = \alpha f$ .

(a) Calculer, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $[f^p, g]$  et en déduire que  $f$  est nilpotente.

(b) Montrer que  $f$  et  $g$  sont trigonalisables dans la même base.

2. On suppose qu'il existe  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^{*2}$  tel que  $[f, g] = \alpha f + \beta g$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont trigonalisables dans une même base.

**II.2.785** X MP 2017

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  et deux polynômes  $A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$  et  $B = \beta_1 X + \beta_0$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$f(P) = AP'' + BP'.$$

On suppose de plus que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_2 + \beta_1 \neq 0.$$

Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**II.2.786** X PC 2008

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre dans  $M_2(\mathbb{C})$  l'équation :

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**II.2.787** CCINP MP 2022

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$  une base de  $E$ .

On note  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$  la base  $\mathcal{B}$  orthonormalisée selon le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Rappeler le procédé de Schmidt ainsi que l'expression des  $\varepsilon_i$  en fonction de  $e_i$ .
2. Prouver que  $(\text{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \prod_{i=1}^n \langle e_i, \varepsilon_i \rangle$ .
3. Montrer que pour toute base  $\mathcal{B}''$  orthonormale de  $E$ , on a :

$$\left| \det((\text{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}) \right| \leq \prod_{i=1}^n \|e_i\| \quad (*)$$

4. Prouver que (\*) devient une égalité si et seulement si  $(\text{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$  est diagonale.

**II.2.788** Centrale-Supélec MP 2021

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  une matrice à coefficients strictement positifs tels que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, a_{ij}a_{ji} = 1.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. On suppose que  $A$  n'est pas inversible. Étudier la réduction de  $A$ .
3. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit inversible.  
Montrer que dans cette condition,  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . L'est-elle dans  $\mathbb{C}$  ?

**II.2.789** Centrale-Supélec PSI 2021

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -8 & \frac{13}{3} & -\frac{14}{3} \\ -4 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soit  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\mathcal{B} = (u; v; w)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Exprimer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.790** Centrale-Supélec PC 2015

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $p \in ]0; 1[$ . On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par :

$$u(f) : x \longmapsto f(p(x-1) + 1).$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ .

**II.2.791** ENSAM PSI 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ .

1. Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

**II.2.792** ENSAM PSI 2015

Soit  $m$  et  $p$  deux entiers tels que  $m \geq p \geq 1$  et  $\Delta(m; p)$  le déterminant suivant :

$$\Delta(m; p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \dots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Déterminer  $\Delta(m; p+1)$ .

**II.2.793** Mines-Télécom PC 2022

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.
2. Soit  $A \in M_7(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2; i; -i\}$ .  
Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de  $A$  et le déterminant de  $A$ .

**II.2.794** Mines-Ponts PSI 2016

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  nilpotente, d'indice  $p$ , et telle que  $M^T M = M M^T$ .

1. Déterminer  $M^T M$ .
2. Déterminer  $M$ .

**II.2.795** TPE/EIVP PC 2018

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique. La matrice  $M = A + I_n$  est-elle inversible ?

**II.2.796** CCINP PSI 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{Tr}(A) = \text{rang}(A) = 1$ . Montrer que  $A^2 = A$ .

**II.2.797** CCINP PSI 2015

Soit  $D$  une matrice diagonale de  $M_n(\mathbb{R})$  à coefficients positifs ou nuls et  $H$  une matrice de  $O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Tr}(HD) \leq \text{Tr}(D)$ .

**II.2.798** CCINP PSI 2015

Soit  $P \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonale. Trouver une majoration de la somme de ses coefficients meilleure que  $n^2$ .

**II.2.799** ENSAM PSI 2015

Étant donné un vecteur non nul  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\alpha = \|\vec{u}\|$ . On considère

$$f : \vec{x} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$$

endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Déterminer  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ . Calculer  $f \circ f$ .

On rappelle que :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

2. Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  et  $A^2$  dans la base canonique.
3. Déterminer  $f^n$  en fonction de  $\alpha$ ,  $f$  et  $f^2$ .
4. Déterminer l'endomorphisme suivant :

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

**II.2.800** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien et  $(y_j)_{j \in J}$  une famille de vecteurs telle qu'il existe  $A, B > 0$  tels que :

$$\forall x \in E, A\|x\|^2 \leq \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle^2 \leq B\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille  $(y_j)_{j \in J}$  est génératrice de  $E$ .
2. On considère dans cette question uniquement :

$$E = \mathbb{R}^2 \text{ et } y_1 = (1; 0), y_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right), y_3 = y_2.$$

Montrer que cette famille convient.

3. On suppose ici que  $A = B = 1$  et que, pour tout  $j \in J$ ,  $\|y_j\| = 1$ . Montrer que la famille  $(y_j)_{j \in J}$  est une base orthogonale de  $E$ .
4. On suppose seulement  $A = B$ . Montrer que :

$$\forall x \in E, x = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle y_j.$$

**II.2.801** Centrale-Supélec PSI 2022

On note  $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $E = C(I, \mathbb{R})$ . On munit  $E$  du produit scalaire usuel :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t) dt.$$

Pour  $f \in E$ , on définit deux fonctions  $A(f)$  et  $B(f)$  sur  $I$  en posant :

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad B(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt.$$

1. Montrer que :

$$\forall (f; g) \in E^2, \langle A(f), g \rangle = \langle f, B(g) \rangle.$$

En déduire que les valeurs propres de  $B \circ A$  sont toutes positives.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, \forall x \in I, (A(f)(x))^2 \leq x \int_0^x f(t)^2 dt.$$

En déduire l'existence d'un réel  $K$  indépendant de  $f$  tel que  $\|A(f)\| \leq K\|f\|$ .

3. Montrer que  $A$  est un endomorphisme continu de  $E$ .

**II.2.802** TPE/EIVP PC 2017

Soit dans un espace vectoriel euclidien  $f$  telle que  $f(0) = 0$  et pour tout couple de vecteurs  $x, y$ ,  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ .

1. Montrer que  $f$  conserve la norme.
2. Montrer que  $f$  conserve le produit scalaire.
3. Montrer que  $f$  est linéaire.
4. Que peut-on conclure sur  $f$  ?

**II.2.803** Central-Supélec MP 2019

1. Montrer que deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.
2. Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .
  - (a) Montrer que  $B$  et  $B^T$  ont les mêmes valeurs propres. On suppose que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune. Montrer qu'il existe  $C \in M_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AC = CB$ .
  - (b) On suppose maintenant que  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que la seule matrice complexe  $C$  telle que  $AC = CB$  est  $C = 0$ .

**II.2.804** X-ENS

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que :

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}.$$

**II.2.805** CCINP MP 2019

Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . On note  $\widetilde{M}$  la transposée de la comatrice de  $M$ . On rappelle que :

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n.$$

1. Soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$ .
  - (a) Montrer que  $\widetilde{P}$  est inversible.
  - (b) Montrer que  $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$ .
  - (c) Calculer  $\widetilde{\widetilde{P}}$ .
  - (d) Trouver une relation entre  $\widetilde{P^{-1}} = \widetilde{P}^{-1}$ .
2. Soit  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ .
  - (a) Montrer que  $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ .
  - (b) Soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $B = P^{-1}AP$ . Montrer que  $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$ .
3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  est diagonalisable,  $\widetilde{A}$  l'est aussi.
  - (b) La réciproque est-elle vraie ?

**II.2.806** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A$  et  $B$  commutent et  $B$  est nilpotente.

1. Démontrer que  $\det(I_n + B) = 1$ .
2. Montrer que  $\det(A + B) = \det(A)$ .

**II.2.807** Mines-Ponts PC 2015

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe infinie sur  $\mathbb{R}$  et  $D$  l'opérateur de dérivation sur  $E$ . On définit les quatre fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cosh(x), \quad f_2(x) = \sinh(x), \quad f_3(x) = x \cosh(x), \quad f_4(x) = x \sinh(x).$$

Soit  $B = (f_1; f_2; f_3; f_4)$  et  $F = \text{Vect}(B)$ .

1. Montrer que  $B$  est une base de  $F$ .
2. Montrer que  $D$  induit un endomorphisme  $d$  sur  $F$ .
3. Écrire la matrice  $A$  de  $d$  dans  $B$ .
4. Calculer  $A^4$  et trouver un polynôme annulateur de  $d$ .
5. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.808** Mines-Ponts PC 2014

Soit  $A$  une matrice non nulle de  $M_3(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A^2$  est la matrice nulle.

1. Que vaut la dimension de  $\text{Ker}(A)$  ?
2. Déterminer la dimension de  $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ .

**II.2.809** Mines-Ponts PC 2016

Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  et  $A^T$  sont semblables.

**II.2.810** Centrale-Supélec PC 2015

Soit  $a$  un nombre réel différent de 0, 1 et  $-1$ . On suppose que  $M$  et  $aM$  sont semblables.

1. Montrer que si  $x$  est une valeur propre de  $M$ , alors pour tout naturel  $k$  non nul,  $xa^k$  est une valeur propre de  $M$ .
2. En déduire que  $M$  est nilpotente.

**II.2.811** ENSEA/ENSIIE

Trouver l'ensemble des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant l'équation  $A^3 + A = 2I_n$ .

**II.2.812** ENS MP 2018

Soit  $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$  tel que  $AB = I_n$ . Montrer que  $BA = I_n$ .

**II.2.813** Mines-Télécom MP 2016

1. Donner le théorème du rang.  
Soit  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$ .
2. On suppose que  $g \circ f = 0$ . Montrer que  $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) \leq n$ .
3. On suppose que  $g + f$  est bijective. Montrer que  $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) \geq n$ .

**II.2.814** X MP 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose  $A^3 = A^2$ . Calculer  $\exp(A)$ .
2. On suppose  $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$ . Calculer  $\exp(A)$ .

**II.2.815** CCINP MP 2016

1. Localiser les racines réelles de  $X^3 - X - 1$ .
2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\chi_A(X)$  son polynôme caractéristique.  
Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_A(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \chi_A(x)$  et  $\chi_A(0)$ .
3. On suppose  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $\det(A) > 0$ .

**II.2.816** Mines-Ponts MP 2015

Trouver toutes les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} (A + I_n)^7 - (A^7 + I_n) = 0 \\ \text{Tr}(A) = 0 \end{cases}$$



**II.2.821** CCINP PSI 2018

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in L(E)$ .

1. On suppose  $f$  surjective. L'application  $f^2$  est-elle surjective ?
2. On suppose  $f^3 = f$ . Montrer que si  $f$  est injective,  $f$  est surjective.

**II.2.822** Mines-Ponts PSI 2015

On note  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et  $E'$  l'ensemble des fonctions continues et bornées sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $g$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour  $f \in E$ , on note :

$$T(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x g(t) dt} \int_0^x f(t)g(t) dt.$$

1. Montrer que  $T(f)$  appartient à  $E$ , puis que  $T$  est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres de  $T|_{E'}$ .  
Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?

**II.2.823** X

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$ .

Montrer que  $\text{Tr}(A)$  et  $\det(A)$  sont des multiples de 3.

**II.2.824** X-ENS/Mines/Centrale

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$ . On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto AM + MB \end{aligned}$$

Quel est le spectre de  $f$  ?

**II.2.825** TPE/EIVP PSI 2015

Soit  $M \in M_3(\mathbb{C})$  semblable à  $iM$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Montrer que  $i\lambda$  est aussi une valeur propre de la matrice  $M$ .
2. Montrer que  $M$  est nilpotente (i.e. il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $M^k = 0$ ).

**II.2.826** Centrale-Supélec PC 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\lambda = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

1. Prouver l'existence de  $\lambda$ , puis le calculer.

2. On suppose que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer de deux manières que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda = 0$ .

**II.2.827** Mines-Télécom PSI 2017

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente telle que  $AA^T = A^T A$ . Montrer que  $A = 0$ .

**II.2.828** Mines-Télécom PSI 2016

On considère l'endomorphisme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' + P \end{array}$$

Déterminer  $\det(f)$ .

**II.2.829** CCINP PSI 2016

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A^T$  et  $A \neq 0$ .

1. Trouver un polynôme annulateur de  $A$ .
2. On suppose que 0 appartient au spectre de  $A$ . Déterminer ce spectre.
3. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec une matrice de passage orthogonale.

**II.2.830** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On appelle classe de  $A$  l'ensemble :

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

On suppose que la classe de  $A$  est bornée.

1. On appelle *matrice de dilatation* toute matrice de la forme  $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$  avec  $\lambda \neq 0$ . Montrer que  $A$  est diagonale en utilisant les matrices de dilatation. Montrer que toutes les matrices appartenant à la classe de  $A$  sont diagonales.
2. En utilisant les matrices  $M_i = I_n + E_{i,i+1}$ , montrer que  $A$  est une matrice scalaire.

**II.2.831** TPE/EIVP PC 2015

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes tels que  $f \circ g \circ f = f$ .

1. Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des projecteurs.  
Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$  et  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$ .
2. Soit les propositions suivantes :
  - ( $P_1$ )  $f \circ g \circ f = f$
  - ( $P_2$ )  $g \circ f \circ g = g$
  - ( $P_3$ )  $\text{rang}(f) = \text{rang}(g)$
  - (a) Montrer que ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) entraînent ( $P_3$ ).
  - (b) Montrer que ( $P_3$ ) et ( $P_1$ ) entraînent ( $P_2$ ).

**II.2.832** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$  vérifiant  $f \circ g = f + g$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$  et  $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ .
2. On suppose que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables. Montrer que  $f \circ g$  est aussi diagonalisable et que  $\text{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \setminus ]0; 4[$ .

**II.2.833** ENSEA/ENSIIE PC 2014

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel normé euclidien de dimension  $n$ . Soit  $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = -1.$$

On considère pour tout  $(u; v) \in E^2$  et pour tout  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\langle \langle (u; x), (v; y) \rangle \rangle = \langle u, v \rangle + xy.$$

1. Montrer que  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  est un produit scalaire.
2. Que peut-on dire de la famille  $((u_i; 1))_{1 \leq i \leq p}$ ? En déduire une inégalité entre  $p$  et  $n + 1$ .

**II.2.834** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $M \in M_2(\mathbb{C})$ . Établir l'équivalence :

$M$  non diagonalisable  $\iff M = D + T$  avec  $D$  scalaire et  $T$  nilpotente non nulle

Étudier les matrices  $X \in M_2(\mathbb{C})$  telles que  $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**II.2.835** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in E$ , on définit  $\hat{f}$  par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $\phi : f \mapsto \hat{f}$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $\phi$ .
3. L'endomorphisme  $\phi_n$  induit par  $\phi$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  est-il diagonalisable?

**II.2.836** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \geq 2$  entier et  $\alpha$  réel. On considère la matrice suivante :

$$A = \left( \alpha^{|i-j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit inversible.

**II.2.837** Mines-Ponts PC 2016

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $F$  et  $G$  ont même dimension si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  tel que  $E = F \oplus H$  et  $E = G \oplus H$ , c'est-à-dire s'ils ont un supplémentaire commun  $H$ .

**II.2.838** Mines-Ponts PC 2016

Soit  $f$  et  $g$  des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rang}(f) - \text{rang}(g \circ f).$$

**II.2.839** Mines-Ponts Pc 2015

Soit  $\mathbb{K}$  le corps des réels ou celui des complexes,  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ . Trouver la relation entre  $\dim(\text{Ker}(AB))$  et  $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Ker}(B))$ . Étudier le cas d'égalité.

**II.2.840** Mines-Ponts PSI 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\phi(X; Y) = \begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $\phi$  soit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

**II.2.841** Mines-Ponts PSI 2013

On considère le déterminant suivant :

$$\det(A + xB)$$

avec  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ .

1. Quel type de fonction est-ce ? (sinus, exponentielle, ...)
2. Déterminer le degré de ce déterminant.

**II.2.842** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  fixée. On considère :

$$\begin{aligned} \varphi_A : S_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ S &\longmapsto ASA^T \end{aligned}$$

Montrer que  $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$ .

**II.2.843** ENS

Déterminer les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall k \geq n, A + A^k = A^T.$$

**II.2.844** Centrale-Supélec PSI 2014

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $M_2(\mathbb{C})$ .

Trouver le rayon de la convergence de la série entière  $\sum \|A^n\| z^n$ .

**II.2.845** Centrale-Supélec PSI 2014

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :

$$(f - \text{Id})^3 \circ (f - 2\text{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) \neq 0.$$

L'application  $f$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.846** Mines-Ponts MP 2014

On considère  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $M$ .

**II.2.847** X MP 2014

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel réel normé. On note :

$$\mu(E) = \sup_{(x;y) \in E^2 \setminus \{(0;0)\}} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Montrer que  $1 \leq \mu(E) \leq 2$ .
2. Montrer que  $E$  est euclidien si et seulement si  $\mu(E) = 1$ .

**II.2.848** X-ENS Cachan PSI 2016

On considère une matrice  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . On note :

$$p(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

1. Prouver que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $p(A^k) = p(A)^k$ .
2. Montrer que l'application  $A \mapsto p(A)$  définit une norme sur  $S_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $A, B \in S_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ .
  - (a) Montrer que  $AB \in S_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) Montrer que  $p(AB) \leq p(A)p(B)$ .
4. Soit  $\|\cdot\|$  une norme vérifiant :

$$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), AB = BA \implies \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (1)$$

Montrer que, pour tout  $A \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\| \geq p(A)$ .

(Autrement dit,  $p$  est la plus petite norme vérifiant la propriété (1).)

**II.2.849** Centrale-Supélec MP 2014

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Trouver tous les vecteurs  $x \in E$  tels qu'il existe une base orthonormée  $(e_1; \dots; e_n)$  de  $E$  telle que  $x = \sum_{i=1}^n e_i$ .

**II.2.850** Mines-Ponts PSI 2015

On se donne deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{C})$  et on considère l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  :

$$\varphi : M \longmapsto AMB.$$

1. Montrer que :

$$\varphi = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

2. Montrer que :

$$\varphi \text{ est nilpotente} \iff A \text{ ou } B \text{ est nilpotente.}$$

3. Montrer que :

$$\varphi \text{ est diagonalisable} \implies A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}$$

4. Qu'en est-il de la réciproque ?

**II.2.851** Mines-Ponts PSI 2025

Soit  $\varphi_0 : x \mapsto e^{-x^2}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}.$$

2. Montrer que

$$(P; Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \langle H_n, P \rangle = \langle H_{n-1}, P' \rangle.$$

(b) Montrer que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une famille orthogonale.

(c) Calculer  $\|H_n\|^2$ .

4. On considère la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$ .

Étudier la nature de cette série et sa valeur éventuelle.

**II.2.852** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $M_n(\mathbb{C})$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $M^p$  est diagonalisable et  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^p)$ .

**II.2.853** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$  telle que  $\text{rang}(M) = 2n$  et  $M^3 = 0$ .

Montrer que  $M$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0 \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$ .

**II.2.854** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose  $S = A^T A$ .

1. Quelle est la particularité de  $S$ ? Quelle(s) conséquence(s)?
2. Montrer que les valeurs propres de  $S$  sont positives.
3. Quel est le lien entre les noyaux de  $A$  et  $S$ ? En déduire un lien sur d'autres sous-espaces particuliers.
4. On suppose  $A^2 = A$ . Montrer que les valeurs propres de  $S$  non nulles sont supérieures à 1.

**II.2.855** Mines-Ponts MP 2025

Trouver l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}), P(A) \in O_n(\mathbb{R}).$$

**II.2.856** CCINP PC 2016

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $f_1, \dots, f_k$  des endomorphismes non nuls de  $E$  vérifiant :

$$\text{Pour tous } i \text{ et } j \text{ distincts dans } \llbracket 1; k \rrbracket, \\ f_i \circ f_j = 0 \text{ et } f_1 + \dots + f_k = \text{Id}_E.$$

1. Pour tout  $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ , calculer  $f_i \circ (f_1 + \dots + f_k)$ .  
En déduire que  $f_i$  est un projecteur.
2. (a) Justifier que la somme  $\text{Im}(f_1) + \dots + \text{Im}(f_k)$  est directe.  
(b) Montrer que  $E = \text{Im}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(f_k)$ .  
Dans toute la suite,  $\mathcal{B}$  désigne une base de  $E$  adaptée à cette décomposition.
3. Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des complexes deux à deux distincts et soit  $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$ .  
(a) Montrer que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.  
(b) Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , donner une expression de  $f^p$  en fonctions de  $p$ , des  $f_i$  et des  $\alpha_i$ .
4. (a) Montrer que la famille  $\{f_1; \dots; f_k\}$  est libre.  
(b) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ , la famille  $\{f_i; \text{Id}_E; f; \dots; f^{k-1}\}$  est liée.  
(c) Montrer que la famille  $\{\text{Id}_E; f; \dots; f^{k-1}\}$  est libre.

**II.2.857** Centrale-Supélec MP 2015

1. Soit  $f$  et  $g$  deux formes linéaires non nulles d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.

Soit  $f_1, \dots, f_n, f$  des formes linéaires d'un espace vectoriel réel  $E$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0$  implique  $f(x) \geq 0$ . On veut montrer qu'il existe des réels  $a_1, \dots, a_n$  tels que  $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ .

2. Montrer cette propriété pour  $n = 1$ .
3. Établir le cas général. (On pourra restreindre  $f_1, \dots, f_n$  à  $\text{Ker}(f_n)$ ).

**II.2.858** Mines-Ponts MP 2017

On considère un espace euclidien  $E$ , ainsi qu'une base  $(e_1; \dots; e_n)$  de  $E$  orthonormale.

1. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Vérifier que :

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k \rangle.$$

2. Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques de  $E$  ayant leurs valeurs propres positives. Montrer que :

$$0 \leq \text{Tr}(f \circ g) \leq \text{Tr}(f)\text{Tr}(g).$$

3. On suppose de plus que  $f$  est inversible.

Dans quel cas a-t-on  $\text{Tr}(f \circ g) = 0$ ? Et  $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(f)\text{Tr}(g)$ ?

**II.2.859** X MP 2017

Soit  $\rho$  une matrice symétrique positive. On dit que  $\rho$  est un *état* si  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $V \in \mathbb{R}^n$  de norme 1. On note  $\Pi_V$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(\{V\})$ . Montrer que  $\text{Tr}(\Pi_V A) = \langle V, AV \rangle$ .
2. Soit  $\rho$  un état. Montrer qu'il existe  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$  et  $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Pi_{V_i}$ .
3. Soit  $\rho$  un état. On dit que  $\rho$  est un *état pur* si, et seulement si, tous les  $\lambda_i$  sont nuls sauf un. Montrer qu'un état  $\rho$  est pur si, et seulement si, il existe  $P$  un projecteur orthogonal de rang 1 de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\text{Tr}(\rho P) = 1$ .
4. Montrer qu'un état  $\rho$  est pur si et seulement si  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ .
5. Dans le cas  $n = 2$ , montrer que les états purs sont exactement les matrices

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 1 - \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

avec  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**II.2.860** Mines-Ponts MP 2017

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et

$$A_n = \left( \omega^{(k-1)(j-1)} \right)_{1 \leq j, k \leq n}.$$

Calculer  $A_n \overline{A_n}$ . En déduire  $|\det(A_n)|$ , puis l'inversibilité de  $A_n$  et  $A_n^{-1}$ .

2. Quels sont les  $\theta \in \mathbb{C}$  tels que

$$A_n(\theta) = \left( \theta^{(k-1)(j-1)} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

soit inversible ?

**II.2.861** X ESPCI 2017

Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Montrer que  $p_1 + p_2$  est un projecteur si et seulement si  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ .
2. Montrer que  $p_1 + p_2$  est une symétrie si et seulement si  $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$ .

**II.2.862** TPE/EIVP MP 2017

Soit  $n \geq 2$  entier et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, a_{ij} \in ]0 ; 1[ \text{ et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que  $|\det(A)| \leq 1$ .
2. Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ .
3. Montrer que

$$b \in \text{Sp}(A) \implies |b| \leq 1$$

puis que

$$|b| = 1 \implies b = 1.$$

**II.2.863** CCINP PSI 2017

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  non nulles. Pour tout  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on définit :

$$\Phi(M) = \text{Tr}(AM)$$

et

$$\Psi(M) = M + \text{Tr}(AM)B.$$

1. Montrer que  $\Phi$  est linéaire et donner la dimension de son noyau et de son image.
2. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $\Psi$  différente de 1, alors toute matrice propre associée  $M$  est colinéaire à  $B$ .
3. Trouver les autres valeurs propres de  $\Psi$ .
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $\Psi$  soit diagonalisable.

**II.2.864** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ . On suppose que pour tout  $X$  dans  $M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $X^T B X > 0$ . Montrer que  $A + iB$  est inversible.

**II.2.865** Mines-Ponts MP 2018

On considère un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques tels que :

$$\forall x \in E, |\langle x, f(x) \rangle| \leq \langle x, g(x) \rangle.$$

Montrer que  $|\det(f)| \leq \det(g)$ .

**II.2.866** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $f_A \in L(M_n(\mathbb{R}))$  définie par  $f_A(M) = AM$ . Montrer que  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f_A)$ .

**II.2.867** CCINP PC 2018

Soit  $E = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum x_n^2 \text{ converge}\}$  et

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

- Calculer  $(|a| - |b|)^2$  et montrer que  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab|$ .
- (a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
(b) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}; (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \end{aligned}$$

Montrer que  $\varphi$  est bien définie sur  $E \times E$  et que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ . En déduire que

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$$

est une norme sur  $E$ .

- On suppose que  $E$  est muni de cette norme. Montrer que si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $E$ , alors la suite  $(x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi dans  $E$ .
- Soit  $g : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}; (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E \times E$  :

$$\|g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) - g((y_n)_{n \in \mathbb{N}})\| \leq k \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\|.$$

**II.2.868** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice  $H$  dans  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A = H^3 + H$ .

**II.2.869** Mines-Ponts PC 2015

Soit

$$H = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax + by + cz + dt = 0\}$$

et

$$H' = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid a'x + b'y + c'z + d't = 0\}.$$

1. Montrer que  $H \cap H'$  est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de l'intersection.

**II.2.870** CCINP PC 2018

Soit  $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$  telle que tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne  $n+1$  et de la colonne  $n+1$  qui valent tous 1. Montrer que  $M$  est diagonalisable, puis trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

**II.2.871** Mines-Télécom PSI 2018Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Rappeler les propriétés du déterminant, en particulier  $\det(M^T)$  et  $\det(\lambda M)$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. On suppose que  $M$  est antisymétrique.
  - (a) Montrer que, si  $n$  est impair,  $M$  n'est pas inversible.
  - (b) Montrer que, si  $n = 2$  et  $M \neq 0$ , alors  $M$  est inversible.
  - (c) Peut-on affirmer que  $M$  est inversible ou non inversible si  $n = 4$  et  $M \neq 0$  ?

**II.2.872** ENS MP 2018

Soit  $A$  et  $B$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  de valeurs propres respectives  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$ . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \leq \text{Tr}((B - A)^2).$$

**II.2.873** Centrale-Supélec MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$  une base de  $E$ . On pose  $s_k = \sum_{i=1}^k e_i$  et  $s_0 = 0$ . Soit  $u \in L(E)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(e_k) = 2s_n - s_k - e_k.$$

1. Justifier que l'on définit une unique application linéaire et donner la matrice  $A = (u)_{\mathcal{B}}$ .
2. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
3. Déterminer le spectre complexe de  $A$  et montrer qu'il est contenu dans un cercle.

**II.2.874** X MP 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Caractériser les formes bilinéaires  $B$  sur  $E$  vérifiant :

$$\forall (x; y) \in E^2, \quad B(x; y) = 0 \implies B(y; x) = 0.$$

**II.2.875** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \geq 2$  un entier et  $\varphi$  un automorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  tel que :

$$\forall (A; B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2, \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

1. Déterminer  $\varphi(I_n)$ .
2. Soit  $1 \leq i \leq n$ . Montrer que  $\varphi(E_{ii})$  est un projecteur de rang 1.
3. Pour  $1 \leq i \leq n$ , soit  $A_i$  un élément non nul de  $\text{Im}(\varphi(E_{ii}))$ .  
Montrer que  $\{A_1; \dots; A_n\}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ .

**II.2.876** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un singleton. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall t \in I, e^{tA} \in O_n(\mathbb{R}) \iff A \in A_n(\mathbb{R}).$$

**II.2.877** CCINP MP 2021

Soit  $M \in M_p(\mathbb{C})$  et  $\lambda, \mu$  deux nombres complexes distincts non nuls. On suppose trouvées deux matrices non nulles  $A, B \in M_p(\mathbb{C})$  vérifiant  $I_p = A + B$ ,  $M = \lambda A + \mu B$  et  $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$ .

1. Montrer que  $M$  est inversible et déterminer son inverse. (On pourra utiliser  $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$ .)
2. (a) Exprimer  $A$  en fonction de  $I_p$  et  $M$ .  
(b) Montrer que  $A$  et  $B$  sont des projecteurs.
3. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres.

**II.2.878** CCINP MP 2021

Soit  $E$  un espace vectoriel réel euclidien de dimension  $n$ ,  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ .

1. Soit  $p$  un entier naturel impair.
  - (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme de symétrie  $v$  tel que  $v^p = u$ . (On pensera à la matrice représentative de  $u$ .)
  - (b) Montrer que  $v$  possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que  $u$ .
  - (c) Montrer que  $v$  est l'unique endomorphisme symétrique tel que  $v^p = u$ .
2. Soit  $p$  un entier naturel pair et non nul.
  - (a) A-t-on les mêmes résultats?
  - (b) Que peut-on dire si  $u$  est positif? (C'est-à-dire  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ .)
  - (c) Que peut-on dire si  $u$  et  $v$  sont positifs?

**II.2.879** CCINP MP 2021

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$ .

1. On suppose que  $\det(f^2) \neq 0$  et que  $f^2$  est diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de  $f$  et montrer que  $f$  est diagonalisable.
2. On suppose que  $\det(f^2) = 0$  et que  $f^2$  est diagonalisable. On suppose de plus que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**II.2.880** Mines-Ponts PSI 2021

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$  à valeurs propres dans  $\mathbb{R}_+$ , et  $\alpha \geq 0$ .

1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?
2. Montrer que  $I_n + \alpha A$  est inversible.
3. Montrer que  $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$  est symétrique.

**II.2.881** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0_n\}$ .

1. L'ensemble  $A$  est-il un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  ?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$ , contenu dans  $A$  ?
3. Qu'en est-il dans  $\mathbb{R}$  ? On s'intéressera surtout au cas  $n = 2$ .

**II.2.882** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $\phi$  une forme bilinéaire symétrique positive, non nécessairement définie positive, et telle que :

$$\exists C > 0, \forall (x; y) \in E^2, |\phi(x; y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

On note (\*) la proposition :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, |\phi(x; x)| \geq \alpha \|x\|^2.$$

1. Montrer que si  $E$  est de dimension finie, alors :

$$(*) \iff \phi \text{ est définie positive.}$$

2. On suppose que  $E$  est de dimension infinie et qu'il existe une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  orthonormale totale de  $E$ .

- (a) Construire  $\phi$  bilinéaire symétrique définie positive telle que :

$$\exists C > 0, \forall (x; y) \in E^2, |\phi(x; y)| \leq C \|x\| \|y\|$$

mais qui ne vérifie pas (\*).

- (b) Conclure que la boule unité fermée n'est pas compacte.



**II.2.886** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose que  $A$  est inversible et qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^N$  soit symétrique réelle. Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .
2. On suppose que  $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$  et qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^N$  soit symétrique réelle. Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .
3. Que se passe-t-il si  $\dim(\text{Ker}(A)) > 1$  ?

**II.2.887** Mines-Télécom PSI 2018

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  et  $M = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ . On munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire canonique.

1. La fonction  $f$  est-elle une symétrie vectorielle ?
2. La fonction  $f$  est-elle une isométrie vectorielle ?

**II.2.888** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A$  une matrice complexe carrée de taille  $n$  à coefficients complexes. Montrer l'équivalence entre :

- i)  $A\bar{A} = I_n$  ;
- ii) il existe une matrice  $S$  complexe inversible telle que  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

**II.2.889** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  tel que  $\text{Tr}(u) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .  
Montrer qu'il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que tous les coefficients diagonaux de  $P^{-1}AP$  soient égaux.

**II.2.890** Mines 2015

On considère deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sur le même corps  $\mathbb{K}$ , deux applications linéaires,  $u \in L(E, F)$ ,  $v \in L(F, E)$  telles que  $v \circ u \in GL(E)$ .

Montrer que  $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v) = F$ .

**II.2.891** Mines 2012

Soit  $A \in GL_6(\mathbb{R})$  telle que  $A(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$  et  $\text{Tr}(A) = 11$ .

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

**II.2.892** CCINP 2016

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et pour tout  $i \leq p$ ,  $U_i$  un endomorphisme symétrique de  $E$  tel que  $\sum_{i=1}^p \text{rang}(U_i) = \dim(E)$  et tel que  $\sum_{i=1}^p \langle U_i(x), x \rangle = \|x\|^2$ .

1. Montrer que  $\sum_{i=1}^p U_i = \text{Id}_E$ .
2. Montrer que  $U_i$  est la projection orthogonale sur  $\text{Im}(U_i)$ .

**II.2.893** CCP 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $f$  l'endomorphisme

dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ .
2. Donner un élément de  $\text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$ .
3. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
4. Soit  $g \in L(E)$  tel que  $g^2 = f$ . Montrer que  $\text{Ker}(f^2)$  est stable par  $g$ .  
Que peut-on en déduire ?

**II.2.894** CCP 2017

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. On suppose que  $a > 0$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que  $a = 0$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que  $a < 0$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

Il sera essentiel au cours de la discussion de préciser le corps de référence,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**II.2.895** Mines-Ponts MP 2022

On suppose ici  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  l'application de  $M_n(\mathbb{K})$  dans  $M_n(\mathbb{K})$  qui à la matrice de terme  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  associe la matrice de terme  $(a_{n+1-j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

1. Vérifier que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer son spectre et les dimensions des sous-espaces propres.
3. L'application  $u$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.896** CCINP MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. On suppose que  $f$  est diagonalisable. Montrer que  $f^2$  est diagonalisable et que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .
2. On suppose que  $f^2$  est diagonalisable et que  $f$  est inversible.
  - (a) On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $f^2$ . Montrer que le polynôme

$$\prod_{i=1}^p (X^2 - \lambda_i)$$

est un polynôme annulateur de  $f$ .

- (b) En déduire que  $f$  est diagonalisable.
3. On suppose que  $f^2$  est diagonalisable et que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**II.2.897** Centrale-Supélec MP 2018

Pour tout  $j$  entier compris entre 0 et  $2n$ , on note :

$$f_j : t \longmapsto (\sinh(t))^j (\cosh(t))^{2n-j}.$$

On pose :

$$\mathcal{F} = \{f_0; \dots; f_{2n}\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$ .
2. Soit  $d$  l'application de  $F$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui à  $f$  associe  $f'$ .
  - (a) Montrer que  $d$  définit un endomorphisme de  $F$ .
  - (b) Déterminer ses espaces propres.

**II.2.898** Mines 2016

Soit  $A$  une matrice symétrique de  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  racine à la fois de  $\chi_A$  et de son dérivé  $\chi'_A$ . Montrer que pour tout  $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , la famille  $\{v; Av; A^2v; \dots; A^{n-1}v\}$  est liée.

**II.2.899** CCINP MP 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$ .
2. Soit  $r = p + q - p \circ q$ . Montrer que  $r$  est un projecteur sur  $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .

**II.2.900** Mines-Ponts PC 2024

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  telles que leur spectre soient disjoints.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de  $A$  évalué en  $B$  est inversible.
2. Soit  $X \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $AX = XB$  si et seulement si  $X = 0$ .
3. Montrer que pour tout  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , il existe une unique matrice  $X \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX - XB = M$ .

**II.2.901** Mines-Ponts MP 202

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$  sur  $[0; 1]$  que l'on munit du produit scalaire :

$$\begin{aligned} f : E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f; g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt \end{aligned}$$

Soit  $v$  l'application de  $E$  dans lui-même qui à toute fonction  $f \in E$  associe sa primitive nulle en 0.

1. Montrer que  $v$  est un endomorphisme.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme  $w$  tel que pour tout couple  $(f; g)$  d'éléments de  $E$ ,  $\langle v(f), g \rangle = \langle f, w(g) \rangle$ .
3. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $v \circ w$ ?

**II.2.902** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ .

Soit  $T$  défini pour tout  $f \in E$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt.$$

Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer ses valeurs propres.

**II.2.903** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $(a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

On pose  $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer le polynôme caractéristique et le déterminant de la matrice  $M$ .

**II.2.904** Mines-Ponts PSI 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $x_0$  un vecteur de  $E$  tel que  $\mathcal{B} = \{x_0; f(x_0); f^2(x_0); \dots; f^{n-1}(x_0)\}$  soit une famille libre de  $E$ .

1. Minorer le rang de  $f$ .
2. Déterminer  $C(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ .

**II.2.905** CCINP MP 2022

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension non nulle.

1. Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors  $p$  est un endomorphisme symétrique.
2. Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux.
  - (a) Montrer que  $p \circ q \circ p$  est un endomorphisme symétrique.
  - (b) Montrer que  $(\text{Ker}(q) + \text{Im}(p))^\perp = \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$ .
  - (c) Montrer que  $p \circ q$  est diagonalisable.

**II.2.906** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}^*, \phi(f)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(u) du \quad \text{et} \quad \phi(f)(0) = f(0).$$

1. Démontrer que la fonction  $\phi$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $\phi$  et les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $\phi$  et déterminer les sous-espaces propres induits. (On confondra ici fonctions polynomiales et polynômes.)

**II.2.907** CCINP PC 2022

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  euclidien canonique, on considère le sous-espace vectoriel  $F$  d'équations :

$$x + y + t = 0 \quad \text{et} \quad z = 0 \quad \text{où} \quad (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4.$$

Déterminer une base orthonormée de  $F$ .

**II.2.908** TPE/EIVP MP 2016

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de dimension  $n$  telles que  $AB$  admette  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes. La matrice  $BA$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.909** Centrale-Supélec MP 2025

1. Donner une caractérisation des applications linéaires injectives et la démontrer.
2. Soit  $x \in [0; 1[$ . On note :

$$K_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i.$$

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de  $[0; 1[$  à valeurs réelles. Pour  $x \in [0; 1[$  et  $f \in E$ , on note :

$$\phi(x) = \int_0^1 K_n(xt) f(t) dt.$$

- (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Montrer que 0 est une valeur propre de  $\phi$ .

**II.2.910** X MP 2017

Soit  $S$  l'ensemble des fonctions  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{N}^2, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty.$$

Soit  $\ell : S \rightarrow S$  une application linéaire telle que :

$$\forall f \in S, \ell(f') = (\ell(f))'$$

et en notant  $h : x \rightarrow x$  :

$$\ell(hf) = h\ell(f).$$

Montrer que  $\ell = \lambda \text{Id}_S$  pour un  $\lambda$  réel.

**II.2.911** ENS MP 2013

Soit  $\sigma \in S_n$ . On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  qui à  $x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n$  associe  $a_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}; \dots; x_{\sigma(n)})$ .

1. Quel est le spectre de  $a_\sigma$  ?
2. Quels sont les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^n$  stables par tous les  $a_\sigma$  ?

**II.2.912** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A$  un polynôme de degré au plus  $n$ . On considère l'application :

$$\phi : P \longmapsto (AP)^{(n)}$$

pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur à  $n$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\phi$  soit bijective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\phi$  soit diagonalisable.

**II.2.913** X MP 2019

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^2)$ . Quelle est l'image par  $f$  d'un cercle de centre 0 et de rayon 1 ?

**II.2.914** CCINP PC 2013

Soit  $(M_j)_{1 \leq j \leq p}$  une famille de  $M_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $j$ ,  $M_j^2 = -I_n$  et pour  $j \neq k$ ,  $M_j M_k = -M_k M_j$ .

1. Trouver un polynôme annulateur de  $M_j$ . En déduire que la matrice est diagonalisable.
2. (a) Montrer que  $\text{Sp}(M_j)$  est inclus dans  $\{-i; i\}$ .  
(b) Montrer que  $M_j$  est inversible et que  $n$  est pair.  
(c) Montrer que  $i$  et  $-i$  sont effectivement valeurs propres.
3. Montrer que les dimensions des sous-espaces propres de  $M_j$  sont égales et donner  $\det(M_j)$ .
4. Trouver un tel couple de matrices pour  $n = 2$ , puis pour  $n = 4$ .

**II.2.915** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $N^n = NM = 0$ . On suppose de plus que  $M$  est trigonalisable sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M + N$  est trigonalisable sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.916** CCINP MP 2024

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Justifier que  $A$  est trigonalisable mais non diagonalisable.
2. Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ .  
(a) Justifier que  $M$  n'est pas inversible.  
(b) Montrer que les seules valeurs propres possibles pour  $M$  sont  $-1, 0$  et  $1$ .  
(c) Montrer que la dimension des sous-espaces propres de  $M$  est égale à 1.
3. Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$ .

**II.2.917** Centrale-Supélec PSI 2021

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  possédant  $p \geq 2$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . On suppose que :

$$\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_1| \quad (*)$$

1. On note, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Tr}(A^k) \neq 0$ ,  $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$ .

Montrer que la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.

2. Justifier que si l'hypothèse  $(*)$  n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut-être faux.

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ .

(a) Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(b) Déterminer la limite de  $\frac{A^k}{k}$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

**II.2.918** Centrale-Supélec PC 2023

1. Soit  $P \in M_n(\mathbb{R})$ . On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} d_P : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto AP \end{aligned}$$

Déterminer la matrice de  $d_P$  en fonction de  $P^T$  dans une base bien choisie.

2. Soit  $Q \in M_n(\mathbb{R})$ . On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} g_Q : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto QA \end{aligned}$$

Déterminer la matrice de  $g_Q$  en fonction de  $Q$  dans une base bien choisie.

3. Soit  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ . On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto P^{-1}AP \end{aligned}$$

Déterminer  $\det(\varphi)$  et  $\text{Tr}(\varphi)$ .

**II.2.919** Mines-Ponts PSI 2024

Soit  $n \geq 2$  entier.

1. Montrer que pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  on a  $\text{Tr}(A^T A) > 0$ . Pourquoi a-t-on  $\text{Tr}(A^T A) \neq 0$  ?

2. Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $A$  inversible telle que  $S = A^T A$ .

3. Montrer que :

$$\forall (S; S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(SS') > 0.$$

**II.2.920** Centrale-Supélec PSI 2023

On définit  $G = \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\}$ .

Soit  $A$  et  $B$  dans  $G$ , de même trace  $\alpha$ .

1. (a) Donner une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que  $A$  soit diagonalisable. Cette condition est-elle nécessaire ?
- (b) Donner une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que  $A$  et  $B$  soient semblables. Cette condition est-elle nécessaire ?

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc, pour tout } t \text{ réel, } \phi'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $M \in M_2(\mathbb{C})$ . Montrer que l'application  $t \mapsto M\phi(t)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser sa dérivée.
3. Soit  $A \in G$  de trace nulle. Montrer l'existence de  $\phi$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $G$  vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (s; t) \in \mathbb{R}^2, & \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t) \\ \phi(0) = I_2 & \text{et } \phi'(0) = A \end{cases}$$

**II.2.921** Mines-Ponts PSI 2023

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice réelle symétrique de valeurs propres  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ .

On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\forall X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, R_A(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle}.$$

Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $G_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$ .

On note  $(e_1; \dots; e_n)$  une base orthonormée telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, Ae_i = \lambda_i(A)e_i.$$

1. Montrer que :

$$\forall X \in \text{Vect}(\{e_1; \dots; e_k\}) \setminus \{0\}, R_A(X) \in [\lambda_1(A); \lambda_k(A)].$$

2. Montrer que :

$$\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k} \left( \max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \right).$$

3. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles.

En déduire que :

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

**II.2.922** Centrale-Supélec MP 2024

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , muni de sa norme euclidienne  $\|\cdot\|$ .

1. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ .

Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que  $H = (\text{Vect}(\{a\}))^\perp$ .

2. Soit  $(x_1; \dots; x_{n+1}) \in E^{n+1}$  une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\exists \alpha < 0, \text{ tel que } \forall i, j \in \{1; \dots; n+1\}, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = \alpha.$$

Déterminer  $\alpha$ .

3. Montrer qu'une telle famille existe.

**II.2.923** X MP 2021

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{10}$  qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de  $f$  ?

**II.2.924** Mines-Ponts MP 2021

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier l'existence d'un réel  $d$  tel que  $A^3 + dA = 0$ .
2. Déterminer  $d$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $A^{2n}$  en fonction de  $n, d$  et  $A^2$ .
4. Montrer que  $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels à expliciter.

**II.2.925** CCINP PC 2021

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme associée. Pour  $a \in E$  unitaire et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on considère l'endomorphisme  $f_\alpha$  défini par :

$$\begin{aligned} f_\alpha : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + \alpha \langle a, x \rangle a \end{aligned}$$

1. Soit  $(e_2; \dots; e_n)$  une base orthonormée de  $(\text{Vect}(\{a\}))^\perp$ .  
Montrer que  $\mathcal{B} = (a; e_2; \dots; e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et trouver la matrice associée à  $f_\alpha$  dans  $\mathcal{B}$ .
2. (a) Calculer  $(f_\beta \circ f_\alpha)(x)$  et déterminer  $\gamma$  tel que  $f_\gamma = f_\beta \circ f_\alpha$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ .  
(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $f_\alpha$  soit bijectif.  
(c) Préciser alors  $f_\alpha^{-1}$ .
3. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $s_a(V) = V$ , où  $s_a$  est l'endomorphisme défini par  $s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a$ .  
(a) Montrer que  $s_a \in O(E)$ .  
(b) Montrer que  $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$ , puis que  $s_a(V^\perp) = V^\perp$ .
4. Soit  $g \in O(E)$ . Montrer que  $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$ .

**II.2.926** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ ,  $f$  et  $g$  dans  $L(E)$  tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f.$$

1. Calculer  $f^n \circ g - g \circ f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que  $f$  est nilpotent.

Indication : on pourra considérer l'application  $\varphi : h \mapsto h \circ g - g \circ h$ .

**II.2.927** CCINP PC 2018

Soit  $E$  un espace euclidien et  $a, b$  deux vecteurs de  $E$  orthogonaux entre eux.

1. Soit  $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$ . Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .
2. On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$  avec  $a \in \text{Vect}(\{e_1\})$  et  $b \in \text{Vect}(\{e_2\})$ . Préciser la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans cette base.
3. Préciser les éléments propres de  $\varphi$  et déterminer  $P \in O_3(\mathbb{R})$  et  $D$  matrice diagonale de  $M_3(\mathbb{R})$  telles que  $M = PDP^{-1}$ .
4. Généraliser l'étude à un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**II.2.928** CCINP PSI 2018

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB = BA$ . On note  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $U$  et  $V$  deux matrices semblables et  $R$  un polynôme. Montrer que  $R(U)$  est semblable à  $R(V)$ .
2. Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes. Exprimer  $P(M)$  en fonction de  $P(A), P(A')$  et  $B$ .
3. Supposons que  $B = 0$  et que  $A$  est diagonalisable. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
4. Supposons que  $M$  est diagonalisable. Montrer que  $A$  est diagonalisable et que  $B = 0$ .

**II.2.929** ENS Lyon PC 2018

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

- $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{ij} \in \{0; 1\}$  ;
- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ii} = 0$  ;
- il existe un entier  $k$  strictement positif tel que chaque colonne de  $A$  contienne exactement  $k$  termes non nuls ;
- $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies \exists ! l \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{il} = a_{jl} = 1$ .

1. Déterminer le spectre de la matrice  $A^2$ .
2. Montrer que  $n = k^2 - k + 1$ .

**II.2.930** Mines-Ponts MP 2018

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{K}$  un corps.

Soit  $\mathcal{D} = \{M \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid \forall (i; j) \in \llbracket 1; 2n \rrbracket^2, i \not\equiv j \pmod n \implies M_{ij} = 0\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{D}$  est une sous-algèbre de  $M_{2n}(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que, pour  $M \in \mathcal{D} \cap GL_{2n}(\mathbb{K})$ , on a  $M^{-1} \in \mathcal{D}$ .

**II.2.931** Centrale-Supélec MP 2013

Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

$$\forall (z; z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \quad f(zz') = f(z)f(z').$$

1. (a) Calculer  $f(1)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega$  une racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité, calculer  $f(\omega)$ .  
Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , calculer  $f(e^{i\theta})$ .
  - (b) On note  $\tilde{f}$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = x^\alpha$ .  
Indication : on pourra étudier la fonction  $\ln(\tilde{f})$ .
  - (c) Calculer  $f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\varphi$  une application de  $GL_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

$$\forall (A; B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

- (a) Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \varphi(zI_n) = |z|^{n\alpha}.$$

- (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même image par  $\varphi$ .  
(c) Montrer par récurrence que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(A) = |\det(A)|^\alpha.$$

Indication : on pourra commencer par s'intéresser aux matrices diagonalisables.

3. Soit  $\psi$  une fonction continue de  $M_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$ , et vérifiant :

$$\forall (A; B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \psi(AB) = \psi(A)\psi(B).$$

- (a) Montrer qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad |\psi(A)| = |\det(A)|^\beta.$$

- (b) Montrer que si l'image de  $M_n(\mathbb{R})$  par  $\psi$  est réelle, alors  $\psi$  vérifie l'une des deux propriétés suivantes :
- $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \psi(A) = |\det(A)|^\beta$ ;
  - $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \psi(A) = \text{sgn}(\det(A))|\det(A)|^\beta$ .

**II.2.932** TPE/EIVP MP 2015

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

Calculer  $\exp(A)$ .

**II.2.933** X ESPCI 2016

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  qui commutent.

1. Montrer que  $p \circ q$  et  $p + q - p \circ q$  sont des projecteurs.
2. Déterminer leur noyau et image en fonction de  $\text{Ker}(p)$ ,  $\text{Ker}(q)$ ,  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Im}(q)$ .

**II.2.934** Centrale-Supélec MP 2013

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $a \in L(E)$  tel que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_E)) = 1$ .

1. Traiter le cas où  $a$  est nilpotente.
2. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  les valeurs propres de  $a$  de multiplicités respectives  $n_1, \dots, n_q$ . Montrer que pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$  et tout  $m \in \{1, \dots, n_j\}$ , on a :

$$\dim(\text{Ker}(a - \lambda_j \text{Id})^m) = m.$$

3. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $a$ . Montrer que  $F = \text{Ker}(Q(a))$ , où  $Q$  est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $a$  sur  $F$ .
4. Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des diviseurs unitaires du polynôme caractéristique de  $a$  et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des sous-espaces stables par  $a$ . Dédurre de la question précédente que l'application  $Q \in \mathcal{D} \mapsto \text{Ker}(Q(A)) \in \mathcal{F}$  est une bijection.
5. Conclure quant aux espaces propres de  $a$ .

**II.2.935** Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique qui s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} B_p & C_p \\ C_p^T & D_p \end{pmatrix}$$

avec  $B_p \in M_p(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  est définie positive (i.e.  $\forall x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A X > 0$ ) si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives.

On suppose dans la suite que  $A$  est définie positive.

2. Montrer que  $\det(B_p) > 0$ .
3. Montrer que  $\det(A) \leq \det(B_p) \det(D_p)$ , puis que  $\det(A) \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ .

**II.2.936** CCINP PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de trace non nulle et

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto \operatorname{Tr}(A)B - \operatorname{Tr}(B)A \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(\{A\})$ .
2. L'application  $f$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.937** Mines-Ponts MP 2015

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $v$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que  $\sum_{i=1}^n \langle v(e_i), e_i \rangle$  ne dépend pas de la base orthonormée  $(e_1; \dots; e_n)$  de  $E$  choisie.
2. Montrer que la somme  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v(e_i), f_j \rangle^2$  ne dépend pas des bases orthonormées  $(e_1; \dots; e_n)$  et  $(f_1; \dots; f_n)$  choisies. Calculer sa valeur lorsque  $v$  est un projecteur orthogonal de rang  $r$ .

**II.2.938** Mines-Ponts PSI 2021

Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $M^n$ .
2. Déterminer une base de  $F = \operatorname{Vect}(\{M^n \mid n \geq 1\})$ .
3. Montrer que le commutant de  $M$  est exactement  $F$ .

**II.2.939** Centrale-Supélec MPI

On considère  $M_n(\mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients complexes.

1. Donner une caractérisation des matrices de rang inférieur ou égal à  $k$  avec les mineurs.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à  $k$  est un fermé.  
On considère pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  :

$$T_A : M \longmapsto AM - MA.$$

3. On suppose pour cette question que  $A$  est diagonalisable. Donner le spectre de  $T_A$ .
4. La matrice  $A$  n'est plus nécessairement diagonalisable. Donner le rang maximal de  $T_A$ .
5. Montrer que  $T_A$  possède une unique valeur propre si et seulement si  $A$  possède une unique valeur propre.

**II.2.940** Mines-Télécom MP 2022

Dans tout l'exercice, on considère  $A$  une matrice antisymétrique de  $M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que :

$$\forall X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0.$$

2. Qu'en déduire des valeurs propres réelles de  $A$ ? À quelle condition  $A$  est-elle diagonalisable?
3. On pose  $M = A + I_n$ .
  - (a) Montrer que  $M$  est inversible.
  - (b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?
4. Montrer que  $K = M^{-1}M^T$  est orthogonale.
5. Soit  $B$  une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que  $A + B$  est inversible.

**II.2.941** Mines-Télécom PSI 2023

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{ij} = ij^2.$$

1. Déterminer le rang de  $A$  et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire que  $A$  est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de  $A$ .

**II.2.942** X MP 2016

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels réels de dimensions finies (a priori différentes). Soit  $p \geq 2$  et  $f$  une application  $p$ -linéaire de  $E^p$  dans  $F$ . On dira que  $f$  est *antisymétrique* si

$$\forall \sigma \in S_p, \forall (x_1; x_2; \dots; x_p) \in E^p, f(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \dots; x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1; x_2; \dots; x_p).$$

1. Montrer qu'il existe un espace vectoriel  $\Lambda^p(E)$  et une application  $p$ -linéaire alternée  $\Lambda$  de  $E^p$  dans  $\Lambda^p(E)$  telle que, pour toute application  $f$   $p$ -linéaire antisymétrique de  $E^p$  dans  $F$  :

$$\exists! \varphi : \Lambda^p \longrightarrow F, f = \varphi \circ \Lambda.$$

2. Montrer que  $\Lambda^p(E)$  est défini à isomorphisme près.
3. Montrer que  $(x_1; \dots; x_p) \in E^p$  est lié si, et seulement si,  $\Lambda(x_1; \dots; x_p) = 0$ .

**II.2.943** X MP 2019

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée. On suppose que  $\text{Vect}(\{x \mapsto f(x+k) \mid k \in \mathbb{Z}\})$  est de dimension finie. Que dire de  $f$ ?

**II.2.944** Centrale-Supélec PSI 2026

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de  $L(E, F)$  ?
2. Soit  $p$  formes linéaires  $f_1, \dots, f_p$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) La famille  $\{f_1; \dots; f_p\}$  est libre.
- ii) L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ x &\longmapsto (f_1(x); \dots; f_p(x)) \end{aligned}$$

est surjective.

- iii) Il existe une famille  $\{x_1; \dots; x_p\}$  d'éléments de  $E$  telle que :

$$\det((f_j(x_i))_{i,j}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f) \iff f \in \text{Vect}(\{f_1; \dots; f_p\}).$$

**II.2.945** X MP 2017

Donner toutes les formes linéaires de  $M_{2n+1}(\mathbb{R})$  invariantes par conjugaison par le groupe orthogonal, i.e. toutes les formes linéaires  $\ell$  telles que, pour toute matrice  $A$  et toute matrice orthogonale  $P$ , on ait  $\ell(P^{-1}AP) = \ell(A)$ .

**II.2.946** Centrale-Supélec MP 2022

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $L(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  et on note  $E^*$  son *dual*, i.e. l'espace des formes linéaires sur  $E$ . On se donne  $A \subseteq L(E)$ . On dit que  $A$  est *trigonalisable* s'il existe une base de trigonalisation commune à tous ses éléments. On suppose dans tout l'exercice que les éléments de  $A$  commutent deux à deux.

1. On définit, pour  $u \in L(E)$ , l'application suivante :

$$\begin{aligned} T_u : E^* &\longrightarrow E^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ u \end{aligned}$$

Montrer que  $T_u \in L(E^*)$ .

2. Donner un condition sur  $u$  et  $v$  de  $L(E)$  pour que  $T_u$  et  $T_v$  commutent.
3. Montrer que les endomorphismes de  $A$  admettent un vecteur propre commun.
4. En déduire que  $A$  est trigonalisable.

**II.2.947** CCINP MP 2021

Soit  $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $M$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Calculer  $(M - I_3)^3$  et en déduire le calcul de  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que la suite  $\left(\frac{1}{n^2}M^n\right)_{n \geq 1}$  converge. On note  $A$  sa limite.
5. Soit  $X_0 \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ . On définit la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  par  $X_n = M^n X_0$ .

On notera  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que si  $X_0 \neq 0$ , alors  $X_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Montrer que si  $x_0 - y_0 + 3z_0 \neq 0$ , alors la série de terme général

$$\frac{n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

diverge.

**II.2.948** Centrale-Supélec PC 2015

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ , avec  $n > p$ . Soit  $u \in L(E, F)$  et  $v \in L(F, E)$ , tels que  $u \circ v = \text{Id}_F$ . Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur, puis déterminer son noyau, son image et son rang.

**II.2.949** X MP 2017

On considère l'application  $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}[X]$  qui à une matrice  $M$  associe  $\varphi(M)$  le polynôme minimal (en degré) tel que  $\varphi(M)(M) = e^M$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est bien définie.
2. Quels sont les points de continuité de  $\varphi$  ?

**II.2.950** CCINP MP 2017

Soit  $A$  une matrice complexe d'ordre  $n$  telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $A^p = 0$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Montrer que  $A^n = 0$ .
3. Prouver que  $\det(A + I_n) = 1$ .
4. Soit  $M$  une matrice complexe inversible d'ordre  $n$  qui commute avec  $A$ .
  - (a) Que peut-on dire de  $AM^{-1}$  ?
  - (b) Démontrer que  $\det(A + I_n) = \det(M)$ .
  - (c) L'égalité reste-t-elle valable si  $M$  est seulement inversible ?
  - (d) L'égalité reste-t-elle valable si seulement  $M$  commute avec  $A$  ?

**II.2.951** Mines-Ponts MP 2017

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Tr}(A) = 0$  et  $A^3 - A^2 - A - 2I_n = 0$ .

1. Montrer que  $n$  est un multiple de 5.
2. Cas particulier :  $n = 5$ .

Montrer que  $A$  est semblable à  $\text{diag}(2, m, m)$ , où  $m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

3. Cas général : réduire  $A$ .

**II.2.952** X MP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda < 0$  une valeur propre de  $A\bar{A}$ . Montrer que  $\lambda$  est de multiplicité paire. En déduire que  $\det(I_n + A\bar{A}) \geq 0$ .

**II.2.953** CCINP PSI 2019

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P; Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
2. À l'aide de la méthode de Schmidt, trouver une base orthonormale de  $\mathbb{R}_3[X]$ , notée  $(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$ .
3. Soit  $P$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$  tel que  $\|P\| = 1$ . Montrer que :

$$\sup\{|P(x)| \mid x \in [-1; 1]\} \leq 2\sqrt{2}.$$

Indication : calculer, pour  $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ ,  $M_i = \sup\{|Q_i(x)| \mid x \in [-1; 1]\}$ .

4. Peut-il y avoir égalité ?

**II.2.954** TPE/EIVP PSI 2015

Soit  $A$  une matrice telle que  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Soit l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA \end{aligned}$$

On définit le produit scalaire classique sur les matrices.

1. Montrer qu'il existe une famille  $(X_1; \dots; X_n)$  de vecteurs de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  propres pour  $A$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, X_i^T X_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } X_i^T X_j = 1 \text{ si } i = j.$$

2. Soit  $(M_{ij})$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, M_{ij} = X_i X_j^T.$$

Montrer que la famille des  $M_{ij}$  est une base orthonormale de vecteurs propres pour  $\varphi$ .

3. Quel est le rang de  $\varphi$  ?

**II.2.955** CCINP PC 2022

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\text{Sp}(A) = \{0; 4\}$ .
2. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**II.2.956** X MP 2013

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f \circ f = 0$ . Montrer qu'il existe  $h$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$  tels que  $f = g \circ h$  et  $h \circ g = 0$ .

**II.2.957** Centrale-Supélec MP 2015

Soit  $m, n$  deux entiers naturels non nuls.

Pour une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on pose  $A^* = \overline{A}^T$ .

On dit que  $A$  vérifie la propriété (P) si, et seulement si,

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (A^*)^k A^{m-k} = 0.$$

1. Montrer que, si  $A$  est nilpotente d'indice  $p$  tel que  $2p \leq m + 1$ , alors  $A$  vérifie la propriété (P).
2. Déterminer les matrices réelles vérifiant (P) telles que  $AA^* = A^*A$ .
3. Pour  $X, Y$  appartenant à  $\mathbb{C}^n$ , on pose  $\langle X, Y \rangle = \overline{X}^T Y$ . Soit  $X, Y$  appartenant à  $\mathbb{C}^n$ . En s'aidant de la fonction définie par  $\phi(t) = \langle e^{tA} X, e^{tA} Y \rangle$  pour tout  $t$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , montrer que l'application  $t \mapsto e^{tA^*} e^{tA}$  est à coefficients polynomiaux.

**II.2.958** Centrale-Supélec MP 2017

On pose  $E = C([0; 1], \mathbb{R})$  et  $T$  de  $E$  dans  $E$  tel que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0; 1], T(f)(x) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right).$$

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  et que pour tout  $f$  dans  $E$ , on a :

$$\int_0^1 T(f)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

2. Pour tout entier naturel  $d$ , on pose  $E_d = \mathbb{R}_d[X]$ . On note  $T_d$  la bi-restriction de  $T$  à  $E_d$ . Montrer que  $T_d$  est diagonalisable, en donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
3. Montrer que pour tout élément  $f$  de  $E$ , la suite de fonctions  $(T^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction constante égale à  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**II.2.959** ENSEA/ENSIIE MP 2019

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. (a) Calculer  $A^2 + 4A - 12I_3$ .
- (b) En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de  $A$ .
- (c) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, la diagonaliser.
2. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.2.960** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Tr}(A) > 0$ , et  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = Ax(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\ell$ , telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'on ait  $\ell(x(t)) = 0$ .

**II.2.961** Centrale-Supélec MP 2022

1. Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  symétrique, à valeurs propres  $\lambda_k$  strictement positives. Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

(a) Montrer que  $\sum_{i=1}^n \varphi(a_{ii}) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)$ .

(b) Montrer que  $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .

2. Soit  $A$  une matrice quelconque de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

On supposera par la suite que ce résultat est aussi valable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

3. On note  $D$  la boule fermée de  $\mathbb{C}$ , de rayon 1. Déterminer :

$$\sup_{(z_1, \dots, z_n) \in D^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_j - z_i|.$$

**II.2.962** Mines-Télécom PSI 2022

Soit  $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$ . On pose  $A^{-1} = (b_{ij})$ . Soit encore  $J \in M_n(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner les coefficients de  $M = JA^{-1}$ . Déterminer le rang de  $M$ .
2. Montrer que :

$$\det(A - J) = \left( 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \right) \det(A).$$

**II.2.963** CCINP PC 2023

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes non nuls de  $E$ ,  $a$  et  $b$  deux complexes ( $a$  non nul) tels que :

$$f \circ g - g \circ f = af + bg.$$

On note  $\phi_g$  l'endomorphisme de  $L(E)$  qui à  $u$  associe :

$$\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u.$$

Pour les quatre premières questions, on suppose que  $b = 0$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f)$  est stable par  $g$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\phi_g(f^n) = anf^n$ .
3. Montrer qu'il existe un entier  $k \geq 2$  tel que  $f^k = 0$ .
4. Soit  $u$  l'endomorphisme induit de  $g$  sur  $\text{Ker}(f)$ . Montrer que  $u$  admet un vecteur propre et que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.
5. On suppose que  $b \neq 0$ . Montrer que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

**II.2.964** Mines-Ponts MP 2024

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $u \in L(E)$  nilpotente d'indice  $r \geq 2$ .

1. Montrer qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\mathcal{F} = \{x_0; u(x_0); \dots; u^{r-1}(x_0)\}$  soit libre.
2. Montrer qu'il existe  $\varphi \in E^*$  tel que  $\varphi(u^{r-1}(x_0)) = 1$  et  $\varphi(u^k(x_0)) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0; r-2 \rrbracket$ .

On pose, pour tout  $y \in E$ ,  $v(y) = \varphi(y)x_0$  et  $p = \sum_{k=0}^{r-1} u^k \circ v \circ u^{r-1-k}$ .

3. Calculer  $p(x)$  pour  $x \in V = \text{Vect}(\mathcal{F})$ , puis montrer que  $\text{Ker}(p)$  est un supplémentaire de  $V$  stable par  $p$ .
4. En déduire l'existence d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**II.2.965** Mines-Ponts PSI 2024

Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , le *commutant* de  $A$  est défini par :

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que pour tout  $M \in M_n(\mathbb{C})$  on a  $\dim(C(A)) \geq n$ , et chercher les cas d'égalité.

**II.2.966** X MP 2013

Soit  $t \in \mathbb{R}_*$  et  $M = (\exp(t|j - i|))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**II.2.967** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $E = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ est un vecteur propre de } M\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.

2. Même question avec une autre colonne  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  non nulle.

**II.2.968** Mines-Ponts MP 2024

Soit  $u \in L(\mathbb{R}^4)$  tel que son polynôme caractéristique vérifie :

$$\chi_u(X^2) = \chi_u(X) \cdot \chi_u(X - 1).$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  stables par  $u$ .

**II.2.969** Mines-Ponts MP 2019

1. Pour  $A, B$  dans  $M_{n \times p}(\mathbb{R})$ , montrer que  $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$ .

2. Soit  $V_1, \dots, V_k$  des matrices colonnes telles que  $\sum_{i=1}^k V_i V_i^T = I_n$ .

Montrer que  $k \geq n$ .

**II.2.970** Mines-Ponts MP

Trouver les matrices  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telles que :

$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

**II.2.971** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $n > 1$  et  $A, B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui vérifient :

$$\text{rang}(AB - BA + I_n) = 1.$$

1. On pose  $X = AB - BA$ . Montrer que :

$$\text{Tr}(X^2) = 2\text{Tr}(ABAB) - 2\text{Tr}(A^2B^2).$$

2. En déduire que :

$$\text{Tr}(ABAB) - \text{Tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On pourra déterminer les valeurs propres de  $X$ .

**II.2.972** Mines-Ponts MP 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in A_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ .
2. Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $\text{rang}(A)$  est pair.
3. Montrer que pour tout  $A \in A_n(\mathbb{R})$ ,  $P = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ .
4. On considère l'application :

$$f : A_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Montrer que  $f$  est une application bijective.

5. Dans cette question on considère  $n = 2$ .  
Pour  $A \in SO_2(\mathbb{R})$ , trouver  $B \in A_2(\mathbb{R})$  telle que  $(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = A$ .

**II.2.973** Mines-Ponts MP 2016

On considère deux matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$  telles que :

$$\forall k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \det(A + kB) \in \{-1; 1\}.$$

1. Calculer  $\det(A)$  et  $\det(B)$ .
2. Montrer que  $A^{-1}$  est à coefficients entiers.

**II.2.974** CCINP MP 2018

Soit  $H$  la matrice dont tous les coefficients valent 1,  $A$  la matrice avec que des 1 sauf sur la diagonale où il n'y a que des  $b$ , où  $b \in \mathbb{R}$ .

1. Les matrices  $H$  et  $A$  sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $H$ .
3. Calculer  $\det(A)$ .

**II.2.975** ENS MP 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Prenons aussi une famille  $(t_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  de réels distincts. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \det(A + t_i B) = 0$ ;
- ii) il existe  $W$  et  $V$ , deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ , tels que  $A(V) \subset W$  et  $B(V) \subset W$ , avec  $\dim(W) < \dim(V)$ .

**II.2.976** Mines-Ponts MP 2019

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1; \dots; x_n) \in [0; \pi]^n$ .

On définit  $M_n = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  par  $m_{ij} = \cos((j-1)x_i)$  pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ .

On pose :

$$p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(x_i) - \cos(x_j)).$$

1. Montrer que, pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $\cos((j-1)x_i)$  est un polynôme en  $\cos(x_i)$  dont on précisera le terme dominant.
2. Calculer  $\det(M_n)$  en fonction de  $p_n$ .

**II.2.977** Centrale-Supélec PC 2019

On considère une matrice  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  de  $M_{n+1}(\mathbb{R})$  ainsi qu'un vecteur colonne  $B = (b_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $M_{(n+1) \times 1}(\mathbb{R})$ .

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $AX = B$ , d'inconnue  $X \in M_{(n+1) \times 1}(\mathbb{R})$ , admette une unique solution.
2. On suppose que cette condition est vérifiée et on note  $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  l'unique solution de cette équation. Montrer alors l'égalité

$$x_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)},$$

où  $A_0$  est la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de  $A$  par  $B$ .

3. On pose  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 0$ . On considère un élément  $(a_1; \dots; a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . On se donne des entiers  $b_1, \dots, b_n$  strictement positifs et tous distincts. On suppose qu'il existe un polynôme  $P$  tel que :

$$(1 - X)^n P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{b_k}.$$

Exprimer  $P(1)$  en fonction des  $b_k$  seulement.

**II.2.978** Mines-Télécom MP 2021

1. Soit  $\mathbb{K}$  le corps réels ou des complexes, et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Donner la définition d'une valeur propre de  $A$  et du polynôme caractéristique de  $A$ . Quel est le lien entre ces deux notions ? La matrice  $A$  admet-elle toujours une valeur propre ?
2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ . Que peut-on dire de  $P(\lambda)$  ? Justifier.
3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A + I_n = 0$ . Que peut-on dire des valeurs propres réelles de  $A$  ? Et des valeurs propres complexes ?

**II.2.979** Mines-Télécom MPI 2023

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $u \in L(E)$  tel que  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_p\}$  avec les  $\lambda_k$  deux à deux distincts, et

$$P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  pour que  $u$  soit diagonalisable. Prouver-le.
2. Existe-t-il dans  $\mathbb{R}^7$  un endomorphisme  $u$  tel que  $(X - 1)(X^2 + 1)$  annule  $u$  et  $\text{Tr}(u) = 0$  ?
3. Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^7$  tel que  $(X - 1)(X^2 + 1)$  annule  $u$ . Déterminer  $\det(u)$ .

**II.2.980** Mines-Télécom MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $XX^T X = -I_n$ .

1. Montrer que  $X$  est symétrique.
2. Déterminer  $X$ .

**II.2.981** CCINP MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  inversible.

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  annulateur de  $A^2$  (de degré  $p \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les racines de  $P$  comptées avec leur multiplicité. On pose  $Q(X) = P(X^2)$ . Que peut-on dire de  $Q$ ? Exprimer  $Q$  sous forme d'un produit d'irréductibles.
2. Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A^2$  est diagonalisable.
3. Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

**II.2.982** CCINP MP 2016

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $E = C([0; a], \mathbb{R})$  et  $F = \{f \in E \mid f \text{ de classe } C^2, f(0) = f(a) = 0\}$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit

$$\begin{aligned} D : F &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f'' \end{aligned}$$

Déterminer  $\text{Ker}(D)$  et  $\text{Im}(D)$ .

**II.2.983** X MP 2015

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal si et seulement s'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\{x; Ax; A^2x; \dots; A^{n-1}x\}$  soit une base de  $\mathbb{C}^n$ .

**II.2.984** X MP 2015

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $p_k$  le nombre de partitions de  $\{1; 2; \dots; k\}$ . Exprimer, en fonction des  $p_k$ , le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  de polynôme caractéristique  $P$  fixé.

**II.2.985** CCINP PSI 2019

1. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres complexes. Montrer que  $\text{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ .
2. On suppose  $n \geq 3$ . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Déterminer les valeurs propres et le noyau de  $A$ .

**II.2.986** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie impaire qui vérifie  $u^3 + u = 0$ . L'endomorphisme  $u$  est-il bijectif ?

**II.2.987** Mines-Ponts MP 2016

Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , telle que 1 n'est pas valeur propre de  $A$ .

1. Étudier la convergence de la suite  $\left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m A^k\right)_{m \in \mathbb{N}}$ .
2. Étudier la convergence de la suite  $(A^m)_{m \in \mathbb{N}}$ .

**II.2.988** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel quelconque et  $p$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $p \circ p = p$ . Démontrer que  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ . Qu'en déduit-on pour  $p$  ?

**II.2.989** Mines-Ponts MP 2018

1. Soit  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  et  $C$  commutent. Montrer que :

$$\det \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC).$$

2. Soit  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$  deux matrices qui commutent. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(N) = \{0\} \iff \text{Im}(M) + \text{Im}(N) = \mathbb{R}^n.$$

**II.2.990** Mines-Télécom PSI 2019

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**II.2.991** X ESPCI 2013

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $X^T A X = 0$ .

Montrer que  $\text{Tr}(A) = 0$ , que  $\det(A) \geq 0$ , et que  $\det(A) = 0$  si  $n$  est impair.

**II.2.992** Mines-Ponts PSI 2014

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $M(a; b) \in M_n(\mathbb{R})$  tridiagonale définie comme suit :

- $m_{i,i} = a + b$
- $m_{i,i+1} = ab$
- $m_{i+1,i} = 1$

Calculer  $\det(M(a; b))$ .

**II.2.993** CCINP MP 2016

On considère un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$ . Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est *nilpotent* s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^{k-1} \neq 0$  et  $u^k = 0$ . Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ .

1. Montrer que  $\chi_u(X) = X^n$ .
2. Soit  $v$  un automorphisme de  $E$  commutant avec  $u$ . On définit  $f = u+v$ . Montrer que  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(v)$ .
3. Montrer que  $w = v^{-1} \circ u$  est nilpotent.
4. En déduire que  $\det(f) = \det(v)$ .

**II.2.994** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  tridiagonale définie comme suit :

- tous les éléments au-dessus de la diagonale sont égaux à un réel  $a$  ;
- ceux au-dessous de la diagonale sont égaux à un réel  $b$  ;
- sur la diagonale on trouve les réels  $r_1, \dots, r_n$ .

Calculer  $\det(M)$ .

**II.2.995** Mines-Ponts PC 2019

Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $M(a; b)$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux valent  $a$  et les autres  $b$ . Calculer  $\det(M(a; b))$ .

**II.2.996** X MP 2022

Soit  $X$  un ensemble, soit  $f_1, \dots, f_n$  et  $g_1, \dots, g_n$  des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in X, \det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}) = \det((g_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}).$$

Que peut-on dire sur  $f$  et  $g$  ?

**II.2.997** CCINP MP 2025

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Soit  $Q$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt.$$

Montrer que  $Q \in E$ .

On note  $u$  l'application définie par  $u(P) = Q$ .

2. Montrer que  $u \in L(E)$ , puis que  $u$  est bijective.
3. Pour tous  $i, j \in \{0; \dots; n\}$ ,  $i \neq j$ , calculer  $\langle X^i, u(X^j) \rangle$ . Que peut-on en déduire concernant  $u$  ?
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale  $(P_0; P_1; \dots; P_n)$  de  $E$  dans laquelle on exprimera  $u(P_k)$ .
5. Exprimer la trace de  $u$  en utilisant les  $P_k$ .
6. En déduire la trace de  $u$ .

**II.2.998** CCINP MP 2015

Soit  $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$  dont l'endomorphisme canonique  $a$  vérifie :

$$a(e_1) = e_1 + e_{2n+1} \text{ et } \forall i \in \llbracket 2; 2n+1 \rrbracket, a(e_i) = e_{i-1} + e_i.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible.
3. Écrire  $A^{-1}$  sous la forme d'un polynôme en  $A$ .
4. Déterminer les valeurs propres complexes de  $A$ .

Calculer  $\prod_{i=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ .

**II.2.999** ENSAM PSI 2015

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b$  complexes.

1. Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

**II.2.1000** Mines-Ponts MP 2013

Pour  $a_1, \dots, a_p$  dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa norme associée  $\|\cdot\|$ , on définit :

$$G(a_1; \dots; a_p) = \det\left(\left(\langle a_i, a_j \rangle\right)_{1 \leq i, j \leq p}\right).$$

Montrer que cette quantité est positive, qu'elle est nulle si et seulement si la famille  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq p}$  est liée, et enfin montrer que l'on a :

$$G(a_1; \dots; a_p) \leq \|a_1\|^2 \cdots \|a_p\|^2.$$

**II.2.1001** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose que pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , on a l'égalité polynomiale :

$$\det(AM + B - XI_n) = \det(AM - XI_n).$$

- (a) Montrer que  $B$  est nilpotente.
  - (b) Montrer que, pour tout  $M \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\text{Tr}(AMB) = 0$  et en déduire que  $BA = 0$ .
2. Réciproquement, on suppose que  $B$  est nilpotente et que  $BA = 0$ . Montrer que pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , les polynômes caractéristiques de  $AM + B$  et de  $AM$  sont égaux.

**II.2.1002** Mines-Télécom MP 2016

Énoncer et démontrer le théorème du rang.

**II.2.1003** X MP 2013

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  non inversible.

1. Montrer que  $\dim(\text{Ker}(A^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(A))$ .
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
  - i)  $\dim(\text{Ker}(A^2)) = 2 \dim(\text{Ker}(A))$  ;
  - ii)  $\text{Ker}(A) \subset \text{Im}(A)$  ;
  - iii)  $A(\text{Ker}(A^2)) = \text{Ker}(A)$  ;
  - iv)  $\text{rang} \left( \begin{pmatrix} A & \text{Id} \\ 0 & A \end{pmatrix} \right) = \text{rang} \left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right)$ .

**II.2.1004** Mines-Télécom MP 2017

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et soit  $u \in L(E)$  tel que  $u^3 + u = 0$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(u)$  est stable par  $u$ .
2. Soit  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\text{Im}(u)$ . Montrer que  $v$  est un isomorphisme et déterminer  $v^{-1}$ .
3. En déduire que le rang de  $u$  est pair.

**II.2.1005** X ESPCI 2015

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle qu'il existe  $n > 0$  tel que  $A^{2^n}$  soit égal à  $I_2$ .

Montrer que  $A^2 = I_2$  ou qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $A^{2^k} = -I_2$ .

**II.2.1006** CCINP PC 2014

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :

$$f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

1. On considère  $f_3$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $f_3(P) = f(P)$ . Écrire la matrice de  $f_3$  dans la base canonique.
2. Soit  $P \in \text{Ker}(f)$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) = P(0)$ .
  - (b) En déduire que  $R(X) = P(X) - P(0)$  est constamment nul.
  - (c) En déduire le noyau de  $f$ .
3. On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $f_n(P) = f(P)$ .
  - (a) Calculer le noyau et l'image de  $f_n$ .
  - (b) En déduire que  $f_n$  est surjective.
4. Trouver l'ensemble des polynômes  $P$  tels que  $P(X + 1) - P(X) = X^2$ .
5. Soit  $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\}$ .
  - (a) Montrer que  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .
  - (b) Déterminer un supplémentaire de  $H$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**II.2.1007** Mines-Ponts MP 2023

Soit  $A \in A_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe  $O \in O_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A = O^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O,$$

où  $B$  est une matrice antisymétrique réelle inversible.

2. En déduire que le rang de  $A$  est pair.

**II.2.1008** X PC 2025

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in A_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $AB$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

**II.2.1009** Centrale-Supélec PC 2019

1. Montrer que toute matrice de  $M_p(\mathbb{C})$  est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. Pour toute matrice  $A$  de  $M_p(\mathbb{C})$ , prouver l'égalité  $\chi_A(A) = 0$ .

**II.2.1010** Mines-Télécom MP 2019

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et  $m$  le polynôme minimal de  $M$ , de degré  $d$ .  
Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k \in \mathbb{C}_{d-1}[M]$ , où

$$\mathbb{C}_{d-1}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) \leq d-1\}.$$

2. En déduire  $\exp(M)$ .

**II.2.1011** X ESPCI 2013

Soit  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^n$ .

**II.2.1012** X MP 2017

Soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$  appartenant à  $\mathbb{C}^n$ . Calculer, sous réserve d'existence et sans utiliser de récurrence, le déterminant de la matrice  $M = \left( \frac{1}{a_i - b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**II.2.1013** ENSEA/ENSIIE PSI 2021

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

La matrice  $A_m$  est-elle diagonalisable ?

**II.2.1014** CCINP MP 2016

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Que penser de l'information :

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 ?$$

2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A(A - I_n)^2 = 0$ .

- (a) Montrer que  $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$ .  
 (b) Déterminer  $A$  dans le cas où  $\text{Tr}(A) = 0$ .  
 (c) La matrice  $A$  est-elle forcément diagonalisable ?

**II.2.1015** CCINP MP 2018

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in L(E)$ .

1. On suppose que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u$  et que  $E = F \oplus G$ . On note  $v = u|_F$  et  $w = u|_G$ . Si  $f$  est un endomorphisme,  $\pi_f$  désigne son polynôme minimal.

- (a) i. Justifier que  $\chi_v$  et  $\chi_w$  divisent  $\chi_u$ .  
 ii. Justifier que  $\pi_u$  et  $\pi_w$  divisent  $\pi_u$ .  
 (b) Montrer que  $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$ .

2. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que :

$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

**II.2.1016** CCINP PSI 2025

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A$  commute avec  $A^\perp$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\perp)$ .  
 2. Montrer que  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  sont supplémentaires orthogonaux.

**II.2.1017** X MP 2019

Résoudre dans  $M_3(\mathbb{R})$  l'équation suivante :

$$X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**II.2.1018** ENS MP 2018

Soit  $n > 1$ ,  $A \in SL_n(\mathbb{C})$  et  $Z(A)$  son *centralisateur* défini par :

$$Z(A) = \{M \in SL_n(\mathbb{C}) \mid MA = AM\}.$$

Montrer que  $Z(A)$  est infini.

**II.2.1019** X MP 2019

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$ .

Montrer que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est *concave*, i.e. la suite  $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**II.2.1020** ENS MP 2019

Exhiber une famille libre d'éléments de  $M_n(\mathbb{R})$  commutative, et de cardinal  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$ .

**II.2.1021** CCINP PC 2013

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u^2 = \lambda u$ .

**II.2.1022** X MP 2017

Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$ . On appelle *support* de  $S$  et on note  $s(S)$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles.

1. Montrer qu'il existe  $S^+$  et  $S^-$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  à supports orthogonaux telles que  $S = S^+ - S^-$ .
2. Montrer l'existence et l'unicité de  $C \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $C^2 = S^T S = S^2$ .  
Montrer que  $C = S^+ + S^-$ .  
On notera alors  $C = |S|$ .  
Indication : pour l'unicité, on montrera que  $C$  et  $S^2$  commutent.
3. Soit  $E = \{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(S) = 1\}$ .
  - (a) Dans le cas  $n = 2$ , montrer que  $S \in E$  si et seulement s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a^2 + b^2 \leq 1$  et  $S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ .
  - (b) Dans ce cas, que devient  $\text{dist}(S; T)$  pour  $T \in E$ ?  
Donner une interprétation (en remarquant que  $E$  s'identifie au disque unité dans  $\mathbb{R}^2$ ).
4. Dans le cas général, montrer que :

$$\text{dist}(S; T) = \max_{\substack{R \text{ projecteur} \\ \text{orthogonal}}} \text{Tr}(R(T - S)).$$

**II.2.1023** CCINP MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien. On dit que  $f$  est un *endomorphisme antisymétrique* de  $E$  si :

$$\forall (x; y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1. Que dire de  $f^2$ ? Montrer que  $\langle f^2(x), x \rangle \leq 0$  et que  $\langle f(x), x \rangle = 0$ .
2. Que dire de  $A$ , matrice de  $f$  dans une base orthonormée?
3. Calculer  $\det(A^T)$  de deux manières différentes. En déduire que si  $f$  est inversible, alors  $\dim(E)$  est paire.
4. Montrer que les valeurs propres de  $f^2$  sont réelles et négatives.

**II.2.1024** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Donner la définition de  $\exp(A)$ .
2. Soit  $A \in A_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.1025** Centrale-Supélec MP 2024

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E = M_p(\mathbb{K})$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On pose :

$$\forall A \in E, \|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|.$$

1. (a) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $E$ .
- (b) Donner la définition de  $e^A$  ainsi que le type de convergence.
- (c) Montrer qu'on a alors  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ .
2. Montrer que :

$$\forall A, B \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n - B^n\| \leq nK^{n-1}\|A - B\|,$$

où  $K = \max(\|A\|; \|B\|)$ .

3. Étudier l'existence de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n.$$

Si cette limite existe, calculer-la.

**II.2.1026** X MP 2013

Soit  $V$  un espace vectoriel et  $s \in L(V)$  tel que  $\text{rang}(\text{Id} - s) = 1$ .

1. Donner une expression simple de  $s$ .
2. Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(V)$  contenant  $s$  et tel que les seuls sous-espaces vectoriels de  $V$  stables par tous les éléments de  $G$  sont  $\{0\}$  et  $V$ . Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de  $G$  est constitué des homothéties de  $V$ .

**II.2.1027** Mines-Ponts MP 2019

On note  $E = C^\infty((\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$  et  $E^*$  son dual.

On définit  $D = \{d \in E^* \mid \forall (f; g) \in E^2, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$ .

1. Montrer que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  non réduit à  $\{0\}$ .
2. Montrer que  $a \in \mathbb{R}^n \mapsto d_0[\cdot](a)$  est injective sachant que  $d_0[\cdot](a) : f \mapsto d_0f(a)$ .
3. Donner une base de  $D$ .

Indication : on pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour l'application  $t \mapsto f(tx)$ .

**II.2.1028** CCINP MP 2022

Soit

$$\begin{aligned} u : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto -X + \text{Tr}(X)I_n \end{aligned}$$

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de  $u$ .
2. En déduire que  $u$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

**II.2.1029** X-ENS Cachan PSI 2021

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $x_1, \dots, x_k \in E$  tels que pour tous  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ . Montrer que  $k$  ne peut pas être trop grand et déterminer cette limite.

**II.2.1030** CCINP MP 2018

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. (a) Donner les éléments propres de  $A$  et leur sous-espace propre associé.  
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $X^2 + X = A$ .

**II.2.1031** ENS PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A^T$ .

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $A$  ?
2. Donner un exemple d'une telle matrice  $A$  avec toutes les valeurs propres trouvées en 1.

**II.2.1032** Mines-Ponts MP 2022

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et

$$F = \{\varphi \in L(E, \mathbb{R}) \mid \forall (f; g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}.$$

Montrer que  $F$  est un espace vectoriel de dimension 1.

**II.2.1033** Centrale Supélec MP 2021

Soit  $n$  et  $p$  des entiers naturels non nuls. Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on munit  $\mathbb{R}^m$  du produit scalaire canonique : pour  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbb{R}^m$  notés  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq m}$ ,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

Soit  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$  et en déduire que  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T A)$ .  
On note  $r$  ce rang commun.
2. Montrer l'existence de  $\{y_1; \dots; y_r\}$  système orthonormé de  $\mathbb{R}^p$  et  $D$  matrice diagonale d'ordre  $r$  à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$Y^T A^T A Y = D \text{ avec } Y = (y_1 \mid \dots \mid y_r).$$

3. Montrer l'existence de réels positifs  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$  tels que la famille  $(\alpha_i A y_i)_{1 \leq i \leq r}$  soit orthonormée.  
On pose, pour  $i$  dans  $\{1; 2; \dots; r\}$ ,  $x_i = \alpha_i A y_i$  et  $X = (x_1 \mid \dots \mid x_r)$ .
4. Montrer l'existence de  $\Lambda$  diagonale d'ordre  $r$  vérifiant  $A = X \Lambda Y^T$ .

**II.2.1034** Mines-Télécom MP 2024

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto \langle x, a \rangle b$ , où  $(a; b) \in E^2$ .  
Les espaces vectoriels  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont-ils supplémentaires ?

**II.2.1035** X MP

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . On pose :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|u(x)\|^2 - \langle u(x), x \rangle^2 \end{aligned}$$

1. La fonction  $f$  est-elle minorée ?
2. À quelle condition la fonction  $f$  est-elle majorée ? Calculer alors son supremum.

**II.2.1036** ENS MP Cachan/Rennes 2018

Soit  $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ .

On définit :

$$\forall (f; g) \in E^2, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

1. Montrer que pour tout  $h \in E$  :

$$h \geq 0 \text{ et } \int_0^1 h(x) dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Montrer que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien réel.

Soit  $a \in ]0; 1[$ ,  $p \in \mathbb{R}_+^*$  et

$$\begin{aligned} \ell : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^a x^p f(x) dx \end{aligned}$$

3. Montrer que  $\ell$  est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple  $\|\ell\| = \sup_{\|f\|=1} |\ell(f)|$ .
4. Montrer qu'il n'existe pas de  $g \in E$  tel que, pour tout  $f \in E$ ,  $\langle g, f \rangle = \ell(f)$ .

Soit  $F = C^1([0; 1], \mathbb{R})$ ,  $h \in F$  et

$$\begin{aligned} \ell_1 : F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^a h(x)f(x) dx \end{aligned}$$

5. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $h$  pour qu'il existe  $g \in F$  tel que pour tout  $f \in F$ ,  $\ell_1(f) = \langle g, f \rangle$ .

Soit le produit scalaire défini sur  $F$  par :

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x)) dx.$$

6. L'ensemble  $F$  est-il fermé au sens de la norme dérivant de ce produit scalaire ?

**II.2.1037** Mines-Télécom MP 2021

Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de réels. On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} L_k : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(a_k) \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $L_k$  est une forme linéaire.
2. Déterminer le rang de  $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

**II.2.1038** Centrale-Supélec PSI 2016

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $E_A = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$ .

1. On suppose que  $A$  est diagonalisable.
  - (a) Montrer que la dimension de  $E_A$  est égale à celle de  $E_D$  où  $D$  est à préciser.
  - (b) Déterminer  $\dim(E_A)$  en fonction du rang de  $A$ .
2. Montrer que la relation précédente est aussi vraie sans l'hypothèse de diagonalisabilité.

**II.2.1039** Centrale-Supélec PC 2016

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A$ . Soit  $g$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  défini par :

$$g(M) = AM + MA.$$

Déterminer la trace de  $g$ .

**II.2.1040** X ESPCI 2016

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , non égaux à  $E$ . Montrer que l'on ne peut pas avoir  $E = F \cup G$ .

**II.2.1041** Centrale-Supélec PC 2022

On munit  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel, défini par  $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ . On note  $B_n$  l'ensemble des matrices  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^T = A^2$ .

1. On pose  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $B_2 \cap \text{Vect}(\{I_2; J\})$ .

Pour le reste de l'exercice, on fixe un élément  $A$  de  $B_n$ .

2. Simplifier  $A^4 - A$ .
3. Montrer que  $A^3$  est une matrice de projection.
4. Vérifier que  $A^3$  est symétrique.
5. Prouver les égalités  $\text{Ker}(A^3) = \text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A^3) = \text{Im}(A)$ .
6. Étant donné un sous-espace vectoriel  $F$  de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  stable par  $A$ , montrer que  $F^\perp$  est stable par  $A$ .

**II.2.1042** X ESPCI 2018

Soit  $M \in O_3^+(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M$  admet 1 pour valeur propre.

**II.2.1043** Mines-Télécom MP 2016

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  défini par le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + t - t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $F$ .
2. Soit  $P(1; 1; 3; 3)$ . Déterminer  $\text{dist}(P; F)$ .

**II.2.1044** Centrale-Supélec MP 2017

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$  subdivision de  $[0; 1]$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , il existe  $(m_i; p_i) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in [a_i; a_{i+1}]$ ,  $f(x) = m_i x + p_i$ .

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $C([0; 1], \mathbb{R})$ .
2. Pour  $a \in [0; 1]$ , on note  $f_a : x \mapsto |x - a|$ . Montrer que la famille  $(f_a)_{a \in [0; 1]}$  est libre.
3. Déterminer une base de  $\mathcal{E}$ .

**II.2.1045** X-ENS

Soit  $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\text{Tr}(\exp(A) \exp(B)) > 0$ .
2. Montrer que  $\text{Tr}(\exp(A + B)) \leq \text{Tr}(\exp(A) \exp(B))$ . Étudier le cas d'égalité.

**II.2.1046** ENS PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = 0$ .

1. Montrer qu'il existe une unique matrice  $X$  qui satisfait l'équation

$$X + AX + XA^2 = A.$$

2. Exprimer  $X$  en fonction de  $A$ .

**II.2.1047** ENS PC 2024

Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $s_1, \dots, s_n$  ses valeurs propres. Pour  $p \in \{1; 2\}$ , on pose :

$$N_p(M) = \left( \sum_{i=1}^n |s_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que  $N_2$  est une norme.  
Indication : montrer que l'application  $(A; B) \mapsto \text{Tr}(AB)$  est un produit scalaire (sur l'espace vectoriel des matrices symétriques).
2. On cherche à montrer que  $N_1$  est une norme.
  - (a) Montrer que  $N_1(M) = \sup\{|\text{Tr}(MU)| \mid U \in O_n(\mathbb{R})\}$ .
  - (b) Conclure.

**II.2.1048** ENS PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice à coefficients dans  $\{0; 1\}$ . Supposons  $A$  inversible. Combien au maximum est-ce que  $A$  peut avoir de coefficients égaux à 1 ?

**II.2.1049** ENS PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe un entier  $m \geq 1$  tel que  $A^m$  est diagonalisable. Montrer que  $A^{m+1}$  est diagonalisable.

**II.2.1050** ENS PC 2024

Soit  $A_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  et  $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$  pour tout  $n \geq 0$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n)$ .

**II.2.1051** X MP

Soit  $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$ . On note  $S' = (s_{ij})_{(i,j) \in [1;n]^2}$ .

1. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^n s_{ii} \geq \det(S').$$

2. Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $\mathcal{S} = \{M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \geq \alpha\}$ .

Montrer que :

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \text{Tr}(AS) = n(\alpha \det(A))^{\frac{1}{n}}.$$

**II.2.1052** ENS PC 2024

Soit  $a$  un endomorphisme autoadjoint et  $u$  un vecteur non nul.

On pose  $V = \text{Vect}(\{a^k(u) \mid k \in \mathbb{N}\})$ .

Montrer que les valeurs propres de la restriction de  $a$  à  $V$  sont simples.

**II.2.1053** ENS PC 2024

Soit

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

deux matrices réelles.

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Calculer :

$$M(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I_2 + \frac{t}{n} A \right)^n.$$

2. Montrer que  $\{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est un groupe.

**II.2.1054** ENS PC 2024

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. On suppose que  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  pour tout  $B \in M_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $A = 0$ .

2. Même question pour  $\text{Tr}((A + B)^2) = (\text{Tr}(A + B))^2$ .

3. Que dire de  $A$  si pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\text{Tr}(P(A)) = P(\text{Tr}(A))$  ?

**II.2.1055** Mines

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $M \in M_n(\mathbb{K})$  de rang 1.

Montrer que pour tout  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}(AM) = 0$  si et seulement si  $MAM = 0$ .

**II.2.1056** X MP 2019

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . On pose  $\mathcal{C}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$  sa classe de conjugaison.

Montrer que  $A$  est diagonalisable si, et seulement si  $\mathcal{C}(A)$  est connexe par arcs.

**II.2.1057** Centrale MP

Soit  $A \in M_d(\mathbb{C})$ . On pose

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  soit

$$u_n = \sqrt[n]{|\text{Tr}(A^n)|}.$$

1. On suppose que  $\text{Sp}(A)$  est un singleton. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\rho(A)$ .
2. Donner un exemple de matrice de  $M_2(\mathbb{C})$  telle que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas.
3. Soit  $z \in \mathbb{C}$  de module 1.
  - (a) Montrer que la suite  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet 1 comme valeur d'adhérence.
  - (b) Montrer que  $\rho(A)$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**II.2.1058** CCINP MPI 2023

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace euclidien et  $f \in L(E)$  symétrique.

1. Montrer que :
  - (a)  $f \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$
  - (b)  $f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Soit  $f$  symétrique positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme  $g$  symétrique et positif tel que  $f = g^2$ . Que dire si  $f$  est défini positif ?
3. Soit  $f$  défini positif et  $g$  positif. Montrer que  $f \circ g$  est diagonalisable.

**II.2.1059** CCINP PSI 2025

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A^T = I_3$  et  $\text{Tr}(A) = 0$ .

Que dire de  $A$  ?

**II.2.1060** Mines-Ponts

Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$  et  $O \in O_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $\text{Tr}(AO) \leq \text{Tr}(A)$ .

**II.2.1061** Mines-Télécom MP 2025

Soit  $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$0 \leq \text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B).$$

**II.2.1062** Mines-Télécom PSI 2025

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $(e_1; \dots; e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

1. Montrer que si  $f \in L(E)$ , alors

$$\operatorname{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k \rangle.$$

2. Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques positifs de  $E$ . Montrer que :

$$0 \leq \operatorname{Tr}(f \circ g) \leq \operatorname{Tr}(f)\operatorname{Tr}(g).$$

3. On suppose de plus que  $f$  est définie positive. Trouver tous les endomorphismes symétriques positifs  $g$  de  $E$  tels que :

$$\operatorname{Tr}(f \circ g) = \operatorname{Tr}(f)\operatorname{Tr}(g).$$

**II.2.1063** Centrale

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $L_A$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  défini par  $L_A(M) = AM$ . Calculer  $\det(L_A)$ .

**II.2.1064** Mines-Ponts MP 2013

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in L(E)$ . On suppose que les valeurs propres de  $u + u^*$  sont positives. Comparer  $\operatorname{Ker}(u)$  et  $\operatorname{Ker}(u^*)$ .

**II.2.1065** Centrale PC 2025

Trouver les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^T A^2 = A$  et  $\operatorname{Tr}(A) = n$ .

**II.2.1066** X-ENS

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $H_A = (\operatorname{Tr}(A^{i+j-2}))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  unitaire de racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On rappelle que :

$$\Delta(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)^2.$$

1. Montrer que  $\Delta(\chi_A) = \det(H_A)$ .
2. On assimile  $\mathbb{C}^n$  à  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  par la base canonique.  
Montrer que  $\operatorname{Ker}(H_A) = \{P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mid P(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$ .

**II.2.1067** CCINP PC 2013

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de  $M$  ?
2. Déterminer les valeurs propres de  $M$ .
3. Donner une condition suffisante sur  $a$  pour que  $M$  soit diagonalisable.

**II.2.1068** Centrale

Soit  $u \in L(\mathbb{R}^{3n})$  tel que  $\text{rang}(u^2) = n$  et  $u^3 = 0$ .  
Calculer  $\dim(\text{com}(u))$ .

**II.2.1069** Mines

Soit  $n \geq 2$  entier et  $H \in M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\text{rang}(H) = 1$ .  
Trouver tous les  $\lambda$  réels tels que  $I_n + \lambda H$  est inversible, puis le cas échéant donner l'expression de son inverse.

**II.2.1070** ENS PC 2025

Soit  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{rang}(M) = k$  et  $\text{rang}(N) = \ell$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $\text{rang}(MN)$  ?

**II.2.1071** ENS PC 2025

Soit  $M, N \in M_2(\mathbb{C})$  deux matrices non nulles telles que :

$$M^2 = N^2 \quad \text{et} \quad MN + NM = I_2.$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible  $A$  telle que :

$$M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{et} \quad N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

**II.2.1072** ENS PC 2025

Montrer que pour tous  $M, N \in M_2(\mathbb{R})$  on a :

$$MN + NM - \text{Tr}(M)N - \text{Tr}(N)M + (\text{Tr}(N)\text{Tr}(M) - \text{Tr}(NM))I_2 = 0.$$

**II.2.1073** ENS PC 2025

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  symétriques telles que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$ .

Montrer que l'application  $M \mapsto AM - MB$  est un automorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**II.2.1074** ENS PC 2025

Soit  $A \in S_4(\mathbb{R})$  de rang 2 et dont le polynôme minimal est  $\pi(X) = X(X-1)(X+1)$ .  
Soit  $B \in S_4(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\inf_{P \in \mathbb{R}[X]} \|P(A) - B\|_2$$

est atteint pour un polynôme  $P_{\text{inf}} \in \mathbb{R}_2[X]$  dont on pourra expliciter les coefficients en fonction de  $\text{Tr}(B)$ ,  $\text{Tr}(AB)$  et  $\text{Tr}(A^2B)$ .

**II.2.1075** ENS PC 2025

Soit  $n \geq 2$  entier et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $P(A)$  est inversible. Montrer que  $P$  est constant.

**II.2.1076** ENS PC 2025

Soit  $D$  une matrice diagonale réelle et  $E$  la matrice réelle contenant un 1 en haut à droite et des 0 partout ailleurs.

1. Calculer  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $(D + E)^n = D^n + a_n E$ .
2. Déterminer un équivalent de  $a_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**II.2.1077** ENS PC 2025

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui tend vers 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , telle que la famille  $\{f; g : x \mapsto f(x + 1); h : x \mapsto f(x + 2)\}$  est liée. Montrer que  $f$  est nulle.

**II.2.1078** ENS PC 2025

Trouver l'ensemble des matrices  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telles qu'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n x\| = +\infty$ .

**II.2.1079** ENS PC 2025

Soit  $m \geq 2$  un nombre entier.

1. Soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$B^2 = mB, \quad \text{Tr}(B) = 0.$$

Montrer que  $B = 0$ .

2. Soit  $A_1, \dots, A_m$  des matrices différentes, inversibles de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall (j; k) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2, A_j A_k \in \{A_1, \dots, A_m\}.$$

On suppose que :

$$\text{Tr}(A_1 + \dots + A_m) = 0.$$

Montrer que :

$$A_1 + \dots + A_m = 0.$$

**II.2.1080** ENS PC 2025

Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que s'ils commutent, alors  $pq$  est aussi un projecteur orthogonal.
2. Montrer que dans tous les cas, les valeurs propres de  $pq$  sont réelles et dans  $[0; 1]$ .
3. Soit  $\lambda \in [0; 1]$ . Déterminer deux projecteurs orthogonaux tels que  $\lambda$  soit valeur propre de  $pq$ .

**II.2.1081** Centrale

Soit  $u \in L(\mathbb{R}^n)$  et  $H$  un hyperplan affine avec  $0 \notin H$ . On suppose que  $u(H) \subset H$ . Montrer que 1 est valeur propre de  $u$ .

**II.2.1082** ENS MP 2025

Soit  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$  avec  $n > p$ . Soit  $b \in \mathbb{R}^n$ . On considère la propriété

$$(P) : \text{Trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|.$$

1. Donner l'ensemble  $S_{(P)}$  des solutions de  $(P)$ .
2. Montrer qu'il existe un unique  $\bar{x} \in S_{(P)}$  de norme minimale, c'est-à-dire  $\|\bar{x}\| = \inf_{y \in S_{(P)}} \|y\|$ .
3. Bonus : montrer que  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de  $(P)$  si et seulement si  $A^T Ax = A^T b$  et que  $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ .

**II.2.1083** ENS PC 2025

1. Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré dans le plan. On suppose que  $\widehat{ACB}$  est aigu. Montrer que :

$$AC^2 + BC^2 > AB^2.$$

2. Soit  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ . On définit les demi-droites  $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{R}^3$  comme suit :

$$l_1 = \{te_1 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_2 = \{te_2 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_3 = \{te_3 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

On suppose que  $e_1, e_2, e_3$  sont deux à deux orthogonaux. Montrer que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$  le triangle  $A_1 A_2 A_3$  est aigu.

3. Avec les notations de la question précédente, on suppose que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$  le triangle  $A_1 A_2 A_3$  est aigu. Montrer que  $e_1, e_2, e_3$  sont deux à deux orthogonaux.

**II.2.1084** ENS PC 2025

Soit  $A_1, \dots, A_m$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  appartenant à  $\{-1; 1\}$  tels que :

$$\text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_m A_m)^2) \geq \text{Tr}(A_1^2) + \dots + \text{Tr}(A_m^2).$$

**II.2.1085** ENS PC 2025

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . On définit  $[A, B] = AB - BA$ ,  $f_0(A; B) = B$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$f_{k+1}(A; B) = [A, f_k(A; B)].$$

1. Montrer qu'il est possible d'écrire

$$f_k(A; B) = \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^j B A^{k-j}$$

et calculer les  $c_{k,j}$ .

2. Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , on note  $\|A\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ . À quelle condition sur  $\|A\|$  a-t-on que pour tout  $B \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $f_k(A; B) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$  ?
3. Trouver un contre-exemple si  $\|A\| = \frac{1}{2}$ .

**II.2.1086** ENS PC 2025

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique et  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$  ses valeurs propres. On considère des matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & a \end{pmatrix}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \mu_{n+1}$ . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe  $x, a$  tels que  $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$  soient les valeurs propres de  $M$ .

**II.2.1087** ENS PC 2025

Déterminer une famille de polynômes  $P_k$  de taille minimale telle qu'aucun d'entre eux n'est un monôme, et pour toute matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe un polynôme  $P_k$  dans cette famille tel que  $P_k(A)$  est inversible.