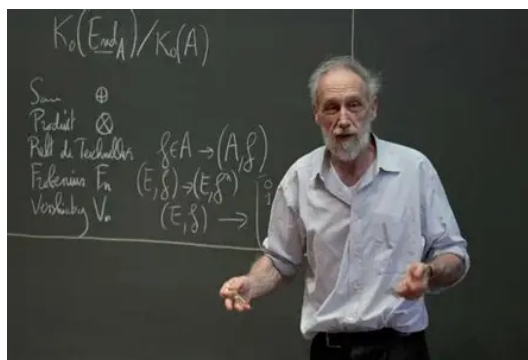


QUESTIONS D'ORAUX DE
MATHÉMATIQUES
DE CONCOURS D'ENTRÉE
À DE GRANDES ÉCOLES FRANÇAISES

Partie III

Dénombrément et probabilités
Nombres complexes
Équations fonctionnelles
Divers

471 exercices



Alain Connes (né en 1947)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 10 avril 2026

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Dénombrement et probabilité	6
2 Nombres complexes	48
3 Équations fonctionnelles	56
4 Divers	67

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)

X (École Polytechnique (Paris))

Centrale

Centrale-Supélec

Mines

Mines-Ponts

Mines-Télécom

ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)

EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)

ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)

ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)

ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)

CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté!

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

\emptyset	ensemble vide
\mathbb{N}	ensemble des nombres naturels
\mathbb{N}^*	ensemble des nombres naturels non nuls
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
\mathbb{Z}^*	ensemble des entiers relatifs non nuls
\mathbb{Z}_-	ensemble des entiers relatifs négatifs
\mathbb{Q}	ensemble des nombres rationnels
\mathbb{Q}^*	ensemble des nombres rationnels non nuls
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
\mathbb{R}^*	ensemble des nombres réels non nuls
\mathbb{R}_+	ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{R}_+^*	ensemble des nombres réels strictement positifs
\mathbb{R}_-	ensemble des nombres réels négatifs
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{C}^*	ensemble des nombres complexes non nuls
\mathbb{U}	ensemble des nombres complexes de module 1
\mathbb{U}_n	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$\llbracket a; b \rrbracket$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leq k \leq b$ (a, b entiers)
$\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de a_1, \dots, a_n
$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de a_1, \dots, a_n
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\text{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$ E $	cardinal de l'ensemble E
$[x]$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\text{sgn}(x)$	signe de x
\mathbb{K}	corps commutatif
\mathbb{K}^*	ensemble des éléments non nuls de \mathbb{K}
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}
$\text{deg}(P)$	degré du polynôme P
$\mathbb{K}[X, Y]$	ensemble des polynômes en X et Y , à coefficients dans \mathbb{K}
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{Z}
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré au plus n
$a \equiv b \pmod n$	a et b congrus modulo n
\bar{x}	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
\mathbb{F}_p	corps des entiers modulo p (p premier)
\mathbb{F}_p^*	ensemble des éléments non nuls de \mathbb{F}_p
$\text{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A
$\text{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\text{Ker}(u)$	noyau de u
$\text{Im}(u)$	image de u
$\text{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$ A $	déterminant de la matrice A
$\text{com}(A)$	comatrice de A
$C(A)$	commutant de A
$\text{Tr}(u)$	trace de u
$\text{Sp}(u)$	spectre de u
$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de u sur \mathbb{K}
$\text{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$\text{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S sur A
S^\perp	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du \mathbb{K} -vectoriel E
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E, F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K}
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{Z}
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{K}
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$

$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$
f^*	adjoint de f
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\ A\ $	norme subordonnée (à la norme $\ \cdot\ $) de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de x et y
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E
ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\ \cdot\ _p$
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie
$\ \cdot\ _p$	p -norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R
\mathcal{P}	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p -adique de n ($p \in \mathcal{P}$)
$ \cdot _p$	valeur absolue p -adique
$ x - y _p$	distance p -adique entre x et y
\mathbb{Q}_p	complété du corps \mathbb{Q} pour la distance p -adique
F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f _A$	restriction de la fonction f à A ($A \subset E$)
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E , à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F
\cosh	cosinus hyperbolique
\sinh	sinus hyperbolique
\tanh	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique

\overline{A}	adhérence de l'ensemble A
$\overset{\circ}{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\text{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\text{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$\text{dist}(A; B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E
\overline{E}	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\text{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\text{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire X suit la loi \mathcal{L}

1 Dénombrement et probabilité

III.1.1 X-ENS

1. Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2 .
2. Montrer que si n est assez grand, a_n est la partie entière de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

III.1.2 Mines-Ponts MP 2021

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Montrer que $\mathbb{E} \left(\frac{X}{Y} \right) \geq 1$.

III.1.3 X-ENS

Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G pris au hasard commutent est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

III.1.4 Mines-Ponts

On suppose que la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{a \cdot 2^n}{n!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Trouver a .
2. Quelle est la probabilité que la famille ait au moins un garçon ?
3. La famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux enfants ?

III.1.5 Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\Omega = \{1; \dots; n\}$, ensemble qu'on munit de la probabilité uniforme \mathbb{P} . Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que d divise n . On note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω .

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$.
2. Soit $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en nombres premiers de n . Les évènements $(D_{p_i})_{i \in \{1; \dots; r\}}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n .

$$\text{Montrer que } \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

III.1.6 Mines-Ponts PC 2016

Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

III.1.7 x

On suppose que 80 hommes et 40 femmes défilent dans un ordre aléatoire. Montrer que la probabilité de ne jamais avoir deux hommes et deux femmes successivement est de l'ordre de 1 sur le nombre d'Avogadro.

III.1.8 Mines-Ponts PC 2024

Soit Ω un univers au plus dénombrable.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Caractériser les évènements A indépendants de tout évènement B .
2. Existe-t-il une probabilité sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que tous les évènements de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants? Le cas échéant, caractériser toutes ces probabilités.

III.1.9 ENS MP

Soit un tirage aléatoire indépendant avec probabilité uniforme de deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelle est la probabilité que le produit de ces deux nombres soit nul?

III.1.10 Mines-Ponts MP

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(A_1; A_2) \in \mathcal{T}^2$. Calculer :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cup \overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{T}^n$. On pose $\Gamma_n = \{A_1; \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n; \overline{A_n}\}$.
Calculer :

$$\sum_{(B_1; \dots; B_n) \in \Gamma_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n).$$

III.1.11 CCINP PSI 2021

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. En développant de deux manières $(1 + X)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. En déduire la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.12 Mines-Télécom MP 2024

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0; 1[$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.13 CCINP PC 2022

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.14 Mines-Ponts PSI 2019

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = P(Y = -n)$
- $|Y| \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\text{rang}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.15 Mines-Ponts PSI 2019

Soit X, Y, Z, T des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\text{Tr}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit inversible.
3. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.16 Centrale PC 2023

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).

On pose $A = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.17 Mines-Télécom PC 2024

Soit X_1, X_2 et Y des variables aléatoires indépendantes telles que X_1 et X_2 suivent la même loi, $P(Y = 1) = p$, $P(Y = -1) = 1 - p$ ($p \in]0; 1[$).

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $X_1 + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).
Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.18 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se réalise est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$.

III.1.19 ENS PC 2019

On lance cinq dés à six faces. Chaque dé affichant un 6 est écarté. On recommence cela jusqu'à ne plus avoir de dé et on note K la variable aléatoire égale au nombre d'étapes de cette expérience. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(K \leq n)$. En déduire la loi de K .

III.1.20 X MP/PC PSI 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de S_n .

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la loi de X_n .
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| = 0.$$

III.1.21 CCP MP

Soit $(X_i)_{i \in \{1; \dots; n\}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On pose, pour $i \in \{1; \dots; n\}$:

$$Y_i = 1 + (e - 1)X_i \quad S_n = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \quad M_n = \left(\prod_{i=1}^n Y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Déterminer les lois de Y_i et de $\ln(Y_i)$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{E}\left(t^{\ln(X_i)}\right) = G_{X_i}(t)$ et que $\mathbb{E}\left(t^{\ln(Y_i)}\right) = G_{\ln(Y_i)}(t)$.
 - (b) Calculer $G_{S_n}(t)$.
 - (c) Donner $\mathbb{E}(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
2. Trouver une relation entre S_n et M_n .
3. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(M_n^2)$ à l'aide de G_{S_n} , puis en déduire $\text{Var}(M_n)$.

III.1.22 Mines-Ponts MP

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs strictement positives, avec $X(\Omega)$ fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes suivant la loi de X . Calculer l'espérance de

$$\frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\sum_{k=1}^n X_k}.$$

III.1.23 Mines-Ponts 2023

Soit $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. (*fonction zêta*)

On définit la probabilité \mathbb{P}_α sur \mathbb{N}^* par :

$$\mathbb{P}_\alpha(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, soit $A_m = \{qm \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}_\alpha(A_m)$.
2. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que les évènements A_{p_k} sont indépendants.
3. En déduire le *produit eulérien* :

$$\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}.$$

III.1.24 CCP MP

On considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes des lois de Bernoulli de paramètre p_i non nécessairement tous égaux. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$.
2. Déterminer les valeurs de p_1, \dots, p_n pour que $\text{Var}(S)$ soit maximale.
3. Déterminer la loi de S dans le cas où $\text{Var}(S)$ est maximale, et calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$.

III.1.25 Mines-Télécom MP 2023

On considère n tulipes qui ont chaque année une probabilité $p \in]0; 1[$ de fleurir. Si une tulipe fleurit une année, alors elle fleurira toutes les années suivantes. Soit les variables aléatoires suivantes :

- X_i : année de la première floraison de la $i^{\text{ème}}$ tulipe
- X : année à partir de laquelle toutes les tulipes ont fleuri

1. Exprimer X en fonction des X_i .
2. Donner la loi des X_i .
3. Si $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$.
4. En déduire que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.26 X MP 2023

Soit X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket^2$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, soit $u_n(r) = \mathbb{P}(X_n \neq Y_n, (X_n Y_n) \text{ de pente } r)$. Trouver un équivalent de $u_n(r)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

III.1.27 CCINP MP 2025

Un homme peint un mur en étant placé sur un échafaudage, des passants passent sous son échafaudage et ont chacun une probabilité $p \in]0; 1[$ de se faire toucher par une goutte de peinture. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées en une journée et Y celui du nombre de personnes qui ne sont pas touchées. On suppose que n personnes passent dans la journée.

1. Donner les lois de X et Y , puis dire si X et Y sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que N personnes passent dans la journée et que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y , puis l'espérance et la variance de X .
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\text{Cov}(X, N)$. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

III.1.28 CCP

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires X_1, \dots, X_N définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
 - (b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

III.1.29 CCINP

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 . Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « La boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche. » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

III.1.30 CCP MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

III.1.31 CCP MP

Soit $\lambda \in]0; +\infty[$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* .

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par

$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

2. Calculer λ .
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. La variable aléatoire X admet-elle une variance? Justifier.

III.1.32 CCP MP

On admet, dans cet exercice, que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et } \forall x \in]0; 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0; 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).

On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.

Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.

La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.

Les tirs de laser sont indépendants.

La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.

Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X .
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

III.1.33 CCP MP

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que la loi du couple $(X; Y)$ est donnée par :

$$\forall (i; j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

III.1.34 CCP MP

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C .

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A .

Quand il a puisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'évènement « L'animal est en A après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On note B_n l'évènement « L'animal est en B après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On note C_n l'évènement « L'animal est en C après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
(b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
 - (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
 - (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n .

III.1.35 Mines 2016

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Montrer que $\frac{1}{X}$ est bien définie et calculer son espérance.

III.1.36 CCP MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A; B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A; B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A; B; C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

III.1.37 CCP MP

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

III.1.38 CCP 2016

Une machine à sous tire au hasard un entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$. (Si T est l'entier tiré, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}$). Si le nombre tiré n est pair, le joueur gagne n points, si le nombre tiré n est impair, le joueur perd n points.

1. Justifier qu'une telle loi de probabilité est cohérente. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Soit G la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer l'espérance de G .

III.1.39 CCP 2016

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire qui a pour loi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer la constante a .
2. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ? Expliciter sa fonction génératrice.

III.1.40 Mines-Télécom PC 2018

Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires. On choisit un urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2. Soit l'évènement : « Tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. » et $P_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer P_1 .
2. Calculer P_{n+1} en fonction de P_n .
3. Calculer P_n en fonction de n .

III.1.41 X PC 2019

On munit l'ensemble des permutations de $\{1; \dots; n\}$ de la distribution uniforme. On note P_n la probabilité qu'une permutation n'ait aucun point fixe. Calculer P_n et sa limite pour $n \rightarrow +\infty$.

III.1.42 X ESPCI 2017

La durée de vie d'une ampoule électrique comptée en années est représentée par une variable aléatoire X , à valeurs dans \mathbb{N}^* , vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Si l'ampoule fonctionne toujours au bout de n années, quelle est la durée moyenne pendant laquelle elle fonctionnera encore ?

III.1.43 TPE/EIVP 2016

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Donner la fonction génératrice de X . Quel est son rayon de convergence ?
3. La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

III.1.44 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

III.1.45 Mines-Ponts PC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

III.1.46 X ESPCI

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

III.1.47 ENSEA/ENSIIE PSI

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que :

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}, \quad \text{avec } N = \lfloor \lambda \rfloor.$$

III.1.48 Mines-Télécom

On pose une série de questions indépendantes, et on note p_k la probabilité de répondre correctement à la question k . On pose $r_k = p_1 \cdots p_k$.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions justes avant le premier échec. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge. Prouver qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$.

III.1.49 Centrale PC

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose, de plus, que $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k^2) = \sigma \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note T_1 la fonction indicatrice de l'ensemble $(|S_1| > \alpha)$, et pour tout $m \geq 2$, T_m la fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{m-1} (|S_k| \leq \alpha) \cap (|S_m| > \alpha)$.

- (a) Montrer que $\sum_{i=1}^n T_i$ est l'indicatrice de l'évènement :

$$\exists k \in \{1; \dots; n\}, |S_k| > \alpha.$$

- (b) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T_i S_n^2) \leq \sigma^2.$$

- (c) Montrer que, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$:

$$\mathbb{E}(T_k S_k^2) \leq \mathbb{E}(T_k S_n^2).$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1; \dots; n\}, |S_k| > \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Conclure que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |S_n| > \alpha\right) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

III.1.50 Mines-Télécom PC 2017

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme ?

III.1.51 X-ENS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tout $(A; B) \in \mathcal{A}^2$,

$$|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Quel est le cas d'égalité ?

III.1.52 CCINP MP

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'évènement : « La puce est en O après n sauts. ». On note $\mathbb{P}(C_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(C_{2n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{2n})$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$ en admettant que $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.
3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.
 - (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$.

III.1.53 Mines-Télécom PSI 2024

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p , avec $p \in]0; 1[$. On pose $Z = \frac{X}{Y}$.

1. Montrer que $Z \leq X$ et que Z admet une espérance et une variance finies.
2. Calculer l'espérance de Z .
3. Donner la loi de Z .

III.1.54 Mines-Télécom MPI 2025

Soit une matrice aléatoire $M \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix},$$

où X et Y sont deux variables indépendantes, suivant une même loi géométrique. Déterminer la probabilité que la matrice M soit nilpotente.

III.1.55 Mines-Ponts PC 2022

On choisit au hasard $f : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $n \geq 2$. Quelle est la probabilité que f soit surjective ?

III.1.56 Mines-Télécom PSI 2022

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

III.1.57 Mines-Télécom PSI 2024

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , telles que :

$$\forall i, k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = k) = a \frac{i+k}{2^{i+k}}.$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

III.1.58 Mines-Télécom MP 2021

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Soit $p \in]0; 1[$. On pose :

$$\forall n \geq k, \mathbb{P}(n) = \binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}.$$

Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

III.1.59 Mines-Ponts MP 2016

On considère un meuble à huit tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p . Lorsque cet objet est dans le meuble, il a autant de chances de se trouver dans un tiroir que dans un autre. On a ouvert sept tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble.

III.1.60 ENSAE MPI 2025

Soit A_2 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 dont les coefficients sont contenus dans $\{-1; 0; 1\}$. On munit A_2 de la probabilité uniforme.

1. Quel est le cardinal de A_2 ?
2. Quelle est la probabilité qu'une matrice de A_2 soit inversible ?
3. Quelle est la probabilité que la matrice soit exactement de rang 1 ?

III.1.61 TPE/EIVP MP 2017

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$. On tire au hasard et avec remise A, B des parties de E , les deux tirages étant successifs et indépendants. Calculer la probabilité que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

III.1.62 Mines-Ponts MP 2024

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(|X|) = 0$.

Montrer que X est *presque-sûrement nulle*, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|X| > 0) = 0$.

III.1.63 CCINP MP 2023

On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec une probabilité de $\frac{1}{2^n}$. On note A_k l'évènement : « Le nombre n est un multiple de k . ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* .
2. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

III.1.64 Mines-Télécom MP 2024

On dispose de N coffres. Il y a une probabilité p que le trésor se trouve dans ces coffres. Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor. Sachant que le trésor n'était pas dans les $N - 1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

III.1.65 CCINP PSI 2025

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. En admettant la formule de Vandermonde, déterminer l'espérance de X .

III.1.66 Mines 2022

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n . On tire une poignée de boules. On replace cette poignée dans l'urne et on mélange. On tire une deuxième poignée. Déterminer la probabilité que les deux poignées n'aient aucune boule en commun.

III.1.67 CCINP PC 2021

Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant être ou non correcte) avec la probabilité p , ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1 - p$. On note A_n l'évènement « La $n^{\text{ème}}$ personne reçoit correctement l'information initiale. », et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis exprimer p_n en fonction de n .

III.1.68 ENS PC 2023

On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « pile », la probabilité d'obtenir « pile » à chaque lancer étant p . On note ℓ le rang du lancer auquel « pile » est obtenu. Puis, on lance ℓ fois un dé à 6 faces et pour gagner le jeu il faut obtenir 6 une seule fois. Déterminer p de sorte que la probabilité de gagner soit maximale.

III.1.69 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note Y le reste de la division euclidienne de X par p . Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

III.1.70 Mines PSI 2024

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4k!}.$$

1. Déterminer a .
2. Déterminer l'espérance de X .
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

III.1.71 Mines-Télécom MP 2024

On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On pioche les boules 2 par 2 et sans remise. Quelle est la probabilité que l'on tire exactement une boule blanche et une boule noire à chaque tirage ?

III.1.72 Mines-Télécom PC 2022

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note $U = \min(X; Y)$ et $V = \max(X; Y)$.

1. Rappeler la loi de X et son espérance.
2. Trouver la loi de V et son espérance.
3. Que vaut $U + V$? En déduire l'espérance de U .

III.1.73 CCINP TSI 2022

On considère un dé truqué à $2n$ faces, pour lequel la probabilité de tomber sur la face k est proportionnelle à k^3 .

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Calculer la probabilité que le dé tombe sur la face k .

III.1.74 Mines-Ponts MP 2022

Montrer qu'une intersection dénombrable d'évènements presque certains est un évènement presque certain.

III.1.75 X MP 2021

On considère une urne avec 10000 boules dont 6000 rouges et 4000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules. Déterminer la probabilité que l'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages.

III.1.76 Mines-Télécom MP 2024

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{1; 2\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2)$. On pose $Z = XY$.

1. Donner l'espérance de Z .
2. Donner la loi de Z .

III.1.77 Mines-Télécom MP 2025

On a un QCM de 40 questions. Chaque question comporte 4 choix et 1 seule bonne réponse existe. Un élève y répond au hasard. Chaque bonne réponse rapporte 3 points et chaque mauvaise en fait perdre 1. On note les variables aléatoires X_i qui valent 1 si la réponse à la $i^{\text{ème}}$ question est bonne, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de points.

1. Donner la loi de X_i .
2. Donner la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y .
4. En utilisant l'inégalité de Pafnouti (Tchebychev), majorer p , la probabilité d'avoir une note supérieure à 60.

III.1.78 Mines-Ponts MP 2018

Soit $r > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r dx.$$

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

III.1.79 Mines-Ponts MP 2022

On considère $2p + 1$ lumières disposées en cercle. À l'instant initial, seules deux lumières adjacentes sont allumées. À chaque instant, on éteint toutes les lumières et, pour chaque lumière qui était allumée à l'instant précédent, on allume une des deux lumières adjacentes avec une équiprobabilité. On note N la variable aléatoire indiquant le premier instant où une seule lumière est allumée. Déterminer la loi de N , puis son espérance pour $p = 2$.

III.1.80 Mines-Télécom PSI 2023

Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\frac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n clients durant sa journée de travail. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N .
2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

III.1.81 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{C} et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que X et λX suivent la même loi. Que dire de X et λ ?

III.1.82 Mines-Télécom MP 2021

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On considère X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X(\Omega)$ est fini. Montrer que :

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

2. On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et que X et $f(X)$ admettent des espérances finies. Montrer que l'inégalité ci-dessus reste vraie.

III.1.83 CCINP MP 2018

Une puce se déplace sur un triangle équilatéral ABC . Elle se situe initialement en A .

Si elle est en A à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement « La puce est en A (resp. B, C) à l'instant n . ».

On note u_n (resp. v_n, w_n) le nombre $\mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$).

1. (a) Déterminer $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ en fonction de u_n, v_n, w_n .

- (b) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X_n = M^n X_0$.

2. (a) Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n .
(b) Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow +\infty$? Expliquer.

III.1.84 Mines-Ponts MP 2023

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X_1$, avec $X_1 \geq 0$.

Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

III.1.85 Mines-Télécom MP 2018

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\exp(-b)a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

1. Donner les lois de X et de Y , ainsi que leur espérance.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi de $Z = X - Y$.

III.1.86 CCINP TSI 2022

On pose 20 questions sous forme de QCM à un candidat. Pour chaque question, il y a k ($k > 2$) réponses possibles, une seule est correcte.

Si le candidat trouve la bonne réponse du premier coup, il marque 1 point.

Si le candidat trouve la bonne réponse au second essai, il marque 0,5 point.

Sinon il ne marque aucun point.

Déterminer la valeur de k pour que le candidat, qui répond au hasard, ait 5/20 en moyenne.

III.1.87 CCINP MP 2021

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \text{ où } p \in]0; 1[.$$

On pose $Y = (-1)^X$.

1. Calculer la loi de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

III.1.88 TPE/EIVP PC 2021

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire sans remise une à une les boules. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée porte le numéro i et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i .
2. Lorsque l'on vide entièrement l'urne, combien de fois peut-on espérer que le numéro d'une boule ait coïncidé avec son rang dans le tirage?

III.1.89 Mines-Télécom MP 2025

1. Calculer

$$\text{Card} \left(\left\{ (A; B) \in \mathcal{P}(\{1; \dots; n\})^2 \mid A \subset B \right\} \right).$$

2. On choisit au hasard deux parties A et B de $\{1; \dots; n\}$.

Quelle est la probabilité que l'une soit incluse dans l'autre?

III.1.90 TPE/EIVP MP 2017

On dispose d'une urne contenant n boules. À chaque tirage, on tire une boule, on la marque et on la remet dans l'urne. Les tirages sont indépendants. On note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules marquées au bout de n tirages.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Trouver un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.91 Centrale-Supélec PC 2017

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir pile, donc une probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir face. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs (et l'expérience s'arrête). Donner la loi de X et son espérance.

III.1.92 Mines-Télécom MP 2019

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$.

Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur \mathbb{N}^* .

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Donner le domaine de définition de la fonction génératrice G_X , son expression et étudier sa continuité.

III.1.93 Mines-Ponts MP 2019

Soit n un entier naturel non nul. On organise un tournoi de football entre $2n$ équipes : n de première division, n de deuxième division.

1. On note a_n la probabilité que chaque match fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer a_n , en donner un équivalent.
2. On note b_n la probabilité qu'aucun match ne fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer b_n , en donner un équivalent.

III.1.94 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $U = \max(X; Y)$ et $V = \min(X; Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Interpréter.
2. Trouver les lois de U et V .
3. Calculer l'espérance de U . Interpréter.

III.1.95 ENSEA/ENSIIE MP 2016

Alice et Bob sont des correspondants téléphoniques. Ils appellent au hasard des clients. Alice a une probabilité $p_A \in]0; 1[$ de signer un contrat et une probabilité $q_A \in]0; 1[$ d'effectuer une erreur de saisie dans le contrat. On définit de même p_B et q_B pour Bob. Alice étant plus avenante, on a $p_A > p_B$. Un contrat a été signé et comporte une erreur de saisie.

1. Quelle est la probabilité qu'Alice s'en soit chargée.
2. On suppose que ce contrat a été traité par Alice ou Bob avec la même probabilité. Comparer q_A et q_B .

III.1.96 CCINP MP 2016

Marcel effectue N tirages dans une urne contenant b boules blanches en ivoire et n boules noires en chocolat. Lorsqu'il tire une boule en chocolat, il la mange.

1. (a) Quelle est la probabilité que Marcel mange au moins une boule en chocolat ?
(b) Quelle est la probabilité que Marcel mange une et une seule boule en chocolat ?
2. Marcel mange une et une seule boule en chocolat. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la dernière boule tirée ?

III.1.97 X ESPCI

On considère n droites vectorielles de \mathbb{R}^d . On suppose que les angles qu'elles forment deux par deux sont tous égaux. Montrer que :

$$n \leq \binom{d+1}{2}.$$

III.1.98 ENS MP 2016

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déénombrer :

$$A_n = \left\{ (x_i)_{i \in [1;r]} \in (\mathbb{N}^*)^r \mid \sum_{i=1}^r x_i = n, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Déénombrer :

$$B_{n,k} = \left\{ (x_i)_{i \in [1;k]} \in (\mathbb{N}^*)^k \mid \sum_{i=1}^r x_i = n, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

III.1.99 Mines-Télécom MP 2023

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On suppose aussi que, pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, la loi de Y conditionnée à $X = i$ est la loi binomiale de paramètre $n - i$ et p . Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

III.1.100 Mines-Télécom MP 2017

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Montrer que :

$$\mathbb{P} \left(\frac{X}{n} - p \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\varepsilon}.$$

III.1.101 Mines-Télécom MPI 2025

On lance n boules dans N boîtes de manière indépendante. La probabilité qu'une boule tombe dans une boîte suit une loi uniforme.

1. On pose Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans la boîte k , et Z_k la variable aléatoire valant 0 si la $k^{\text{ème}}$ boîte est vide, et 1 sinon. Déterminer les lois des variables Y_k et Z_k .
2. Les variables Z_k sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. On pose T_n la variable aléatoire comptant le nombre de boîtes contenant au moins une boule à l'issue de n lancers. Calculer l'espérance de T_n .
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

III.1.102 CCINP PSI 2022

Soit $p, q \in [0; 1]$ tels que $p + q = 1$.

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires réelles telles que $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et :

$$\forall (j; k) \in \llbracket 0; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}((X = j) \cap (Y = k)) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Quelles sont les lois marginales de X et Y ? Que vaut $\mathbb{E}(Y)$?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$.

III.1.103 CCINP TSI 2022

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires suivant une *loi de Rademacher*, c'est-à-dire :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = -1) = 1 - p.$$

Déterminer la loi de $Y = \prod_{k=1}^n X_k$.

III.1.104 Mines-Télécom PC 2024

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit $Z = X + Y + 1$ qui suit une loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler l'espérance, la variance et la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
2. Donner l'espérance et la variance de X .

III.1.105 Mines-Ponts MP 2022

On considère un mobile Z qui se déplace aléatoirement à droite ou à gauche, sur un axe orienté. À l'instant 0, le mobile est à l'origine. Lorsqu'il est à l'abscisse $n \in \mathbb{Z}$, le mobile fait un bond B_n dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(B_n = k) = ap^{|k|} \text{ avec } p \in]0; 1[.$$

On suppose que les bonds sont indépendants.

1. Déterminer a .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse où se trouve le mobile après n bonds. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_n \geq n) \leq \frac{p}{n(1-p)^2}.$$

III.1.106 Mines-Ponts MP 2022

Soit a, b, m trois nombres réels vérifiant $a \leq m \leq b$. On considère l'ensemble des variables aléatoires discrètes X qui vérifient $\mathbb{E}(X) = m$ et $a \leq X \leq b$.

1. Qualitativement, que caractérise la variance ?
2. Déterminer le maximum des $\mathbb{E}(X^2)$ pour X dans l'ensemble considéré.

III.1.107 Centrale-Supélec TSI 2025

Soit X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = XX^T$.

1. Soit R la variable aléatoire égale au rang de la matrice M . Déterminer la loi de R .
2. Soit T la variable aléatoire égale à la trace de la matrice M . Déterminer la loi de T .
3. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur.

III.1.108 Mines-Ponts MP 2024

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in]0; 1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, et telles que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent la loi géométrique de paramètre p . Soit enfin Z la variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans \mathbb{N}^* , telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) + Y(\omega) \\ X(\omega) \end{pmatrix}.$$

À quelle(s) condition(s) Z admet-elle une espérance finie ? une variance finie ? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ quand elle est finie.

III.1.109 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $p \in]0; 1[$. Un petit garçon se promène dans un jardin et ramasse un nombre aléatoire N de feuilles. Pour une feuille donnée, la probabilité qu'il la trouve jolie vaut p .

1. Déterminer la probabilité qu'il trouve toutes les feuilles jolies.
2. Le nombre de feuilles qu'il trouve jolies est une variable aléatoire notée X . Exprimer sa loi à partir de la loi de N .
3. Dans chacun des trois cas suivants, déterminer la loi de X .
 - (a) La loi de N est une loi de Poisson.
 - (b) La loi de N est une loi géométrique.
 - (c) La loi de N est une loi binomiale.

III.1.110 Centrale-Supélec PC 2016

Soit N une variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ . La probabilité qu'un œuf éclore est p .

1. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule. Déterminer la loi de D .
2. Les variables D et N sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de $N - D$ et D ?
3. Comment retrouve-t-on la loi de N à partir de celles de $N - D$ et de D ?

III.1.111 Centrale-Supélec PSI 2017

Soit X une variable aléatoire. S'il existe, on note $\mu(n) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n)$ son moment centré d'ordre n . On dit que X admet un *Kurtosis*, si X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et des moments centrés $\mu(2), \mu(3), \mu(4)$. Dans ce cas on note

$$K(X) = -3 + \frac{\mu(4)}{\mu(2)^2} = -3 + \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)}{(\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2))^2}$$

son Kurtosis.

1. Montrer que si X admet un Kurtosis, alors $aX + b$ admet aussi un Kurtosis et que $K(aX + b) = K(X)$.
2. Calculer $K(X)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.
3. Montrer que pour toute variable aléatoire X , on a $K(X) \geq -2$.
4. Existe-t-il $M > 0$ tel que pour toute variable aléatoire X , on ait $K(X) \leq M$?

III.1.112 Mines-Télécom MP 2017

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ .

1. Donner la fonction génératrice de X et de $3Y$.
2. Soit $Z = 3Y + X$. Donner la fonction génératrice de Z .
3. Donner l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ et la variance $\text{Var}(Z)$ de Z .
4. Donner le minimum de $\text{Var}(Z + tX)$ lorsque t décrit \mathbb{R} .

III.1.113 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probablisé. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. Soit encore $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. On pose :

$$S_n = \sum_{\ell=0}^n X_\ell \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{\ell=0}^n X'_\ell.$$

En supposant $\mathbb{E}(X_1) \neq \mathbb{E}(X'_1)$, étudier la convergence de $\mathbb{P}(S_n < S'_n)$.

III.1.114 Mines-Ponts MP 2017

Une bactérie mortelle menace l'espèce humaine d'extinction. Heureusement, des scientifiques ont développé un remède miracle pour la combattre : un super rayon laser. En sachant qu'ils ont une probabilité $p \in]0; 1[$ de toucher la bactérie à chaque tir, et que la bactérie a $r \in \mathbb{N}^*$ points de vie, donner la probabilité que la bactérie meure lors du $k^{\text{ème}}$ tir, puis déterminer l'espérance du nombre de tirs nécessaires pour que les scientifiques viennent à bout de la bactérie, et sauvent ainsi l'humanité.

III.1.115 TPE/EIVP MP 2019

Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise et si on tire une boule rouge, on la remet avec 2 autres boules rouges. Soit l'évènement $A_n = \ll$ Lors des n premiers tirages, on a eu des boules rouges. \gg . On convient que $\mathbb{P}(A_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n | A_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_n)$.
3. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

III.1.116 CCINP TSI 2019

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = q^n p$, où $q = 1 - p$. On note aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, $Y + 1$ et S .
2. Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p , puis donner $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.
3. Déterminer la loi de S .
4. Soit $I = \min(X; Y)$. Montrer que $\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2k}$ et en déduire la loi de I . Calculer $\mathbb{E}(I)$ et $\text{Var}(I)$.

III.1.117 CCINP PSI 2018

Soit $p \in]0; 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k (1 - p)^{k-1}$.

1. Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* .
2. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
 - (a) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}(X - 1)$.
 - (b) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}((X - 1)(X - 2))$.
3. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

III.1.118 Mines-Ponts PC 2018

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p . On note A_n : « Au $n^{\text{ème}}$ lancé on obtient pour la première fois deux piles consécutifs. ». On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 .
2. Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n .
3. Pourquoi est-il quasi certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

III.1.119 ENS MP 2018

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que XY suit une loi de Poisson. Montrer que X ou Y ne prend presque sûrement que la valeur 0 et 1, c'est-à-dire que X ou Y appartient presque sûrement à $\{0; 1\}$.

III.1.120 Mines-Ponts PC 2018

Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (respectivement 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0; 1[$, (respectivement $p_2 \in]0; 1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
2. Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

III.1.121 Mines-Ponts MP 2015

Soit n couples (homme/femme) de danseurs. Lorsque la musique change, les membres des couples doivent trouver un nouveau partenaire de sexe opposé. Déterminer la probabilité que tous les couples nouvellement formés soient différents des couples initiaux. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.122 Centrale-Supélec MP 2016

Soit x, y et n trois entiers naturels vérifiant $0 \leq x, y \leq n$. On considère deux joueurs E et F et un chapeau dans lequel on dispose de n jetons, dont x jetons sont marqués d'un X et y jetons d'un Y . Le jeu se décompose en deux temps :

Le joueur E tire consécutivement deux jetons avec remise. S'il tire deux fois un jeton marqué d'un X , il a gagné.

Si le joueur E n'a pas gagné, alors c'est au joueur F de tirer consécutivement deux jetons avec remise. Si il tire deux fois un jeton marqué d'un Y , alors il a gagné.

Si aucun des joueurs n'a gagné, alors on recommence.

1. Déterminer la probabilité q qu'aucun des deux joueurs ne gagne au premier tour.
2. Déterminer la probabilité que le joueur E gagne, que le joueur F gagne puis qu'aucun des deux joueurs ne gagne.

Un triplet $(a; b; c)$ d'entiers est dit *pythagoricien* s'il vérifie $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Montrer que le jeu est équilibré, c'est-à-dire que les deux joueurs ont la même probabilité de gagner, si et seulement si il existe un triplet pythagoricien $(a; b; c)$ tel que $x = ab$, $y = ac$ et $n = bc$.

III.1.123 Mines-Ponts MP 2017

Des personnes P_1, \dots, P_n se transmettent un signe $+$ ou $-$ avec la probabilité p de le passer inchangé et la probabilité $q = 1 - p$ de le changer. La personne 1 reçoit le signe $+$. Sachant que la personne n a reçu un signe $+$, quelle est la probabilité que P_1 ait transmis son signe sans le changer ?

III.1.124 CCINP PC 2021

1. Soit Y une variable aléatoire discrète telle que :

$$Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}, \mathbb{E}(Y) = 1 \text{ et } \mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{3}.$$

Calculer p_0, p_1, p_2 , où $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{0; 1; 2\}$.

2. Soit X un variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}.$$

On suppose connaître $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2), \dots, \mathbb{E}(X^n)$.

Comment faire pour calculer p_0, p_1, \dots, p_n ?

III.1.125 CCINP MP 2017

On dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n . On tire p boules simultanément. Les variables aléatoires X et Y représentent respectivement le maximum et le minimum des numéros tirés.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^n \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}.$$

2. (a) Quel est le nombre de tirages différents ?
(b) En déduire la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{n!} \frac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}.$$

- (c) Déterminer l'espérance de X .
3. (a) Déterminer la loi de Y .

- (b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{p+1}$.

III.1.126 CCINP MP 2017

1. En exprimant $(X+1)^{2n}$ de deux manières, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

2. Deux joueurs tirent chacun une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus de « pile ». Quelle loi suit le nombre de « pile » obtenu par un joueur ? Donner son espérance et sa variance.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un gagnant.
4. Donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de la probabilité calculée précédemment.

III.1.127 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

III.1.128 ENS MP 2024

Soit G un groupe fini de cardinal N . On considère A une partie aléatoire de G . On note $AA = \{ab \mid (a; b) \in A^2\}$.

1. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(1 \in AA) = 1$.
2. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(AA = G) = 1$.

III.1.129 Mines-Ponts MP 2021

On étudie la diffusion d'une information. Il y a une probabilité p qu'une personne trouve cette information intéressante à tout instant. Si une personne trouve cette information intéressante à un instant n , elle la diffuse à N personnes, qui sont alors au courant à l'instant $n + 1$. À l'instant $n = 0$, une seule personne a l'information. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant reçu l'information à l'instant n et qui l'ont trouvée intéressante. On pose $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
2. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1} , p et N .
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III.1.130 Mines-Ponts MP 2021

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leq m \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Établir la loi de Z .
2. Établir les espérances de X, Y et Z .
3. Trouver les valeurs de m maximisant $\mathbb{E}(Z)$.

III.1.131 Mines-Ponts MP 2018

On tire n fois une pièce à pile ou face. La variable aléatoire X compte le nombre de « face » obtenus. À partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver n tel que la probabilité que

$$\left| \frac{X}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{100}$$

soit supérieure à 0,99.

III.1.132 Mines-Ponts PC 2017

On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel. On effectue une deuxième vague d'appels à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel. On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la $j^{\text{ème}}$ personne a répondu.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Donner la loi de Y_j .
3. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .

III.1.133 Mines 2022

Soit $f \in C^1([0 ; 1], \mathbb{R}_+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définisse une distribution de probabilité. L'hypothèse « f de classe C^1 » est-elle nécessaire ?

III.1.134 CCINP PSI 2022

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . On note :

$$Y_n = X_{n+1} + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

1. Énoncer la loi faible des grands nombres.
2. Les variables Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n .
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - 2p| \geq \varepsilon) = 0.$$

III.1.135 CCINP PSI 2021

Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N .
2. Pour tout $(k; n) \in \llbracket 1 ; 6 \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = k, N = n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$. En déduire la loi de X .
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

III.1.136 Mines-Ponts MP 2017

On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a \left(\frac{\alpha^k + \beta^k}{k!} \right)$ avec $(a, \alpha; \beta) \in \mathbb{R}^3$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} , telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de α et β peut-on définir un $a \in \mathbb{R}$ pour lequel la probabilité est bien définie? Quelle est alors cette valeur de a ?
2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson?

III.1.137 ENS MP 2019

Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n possède un cycle de taille strictement supérieure à $\frac{n}{2}$.

III.1.138 ENSAM PSI 2018

On considère un jeu de ballon et trois joueurs, notés A , B et C . Le joueur A envoie le ballon à B avec une probabilité de 0.75, B envoie toujours le ballon à C , C envoie le ballon à A avec une probabilité de 0.25 et à B avec une probabilité de 0.75.

On note A_n l'évènement « Le joueur A possède le ballon à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer. » et on considère de même B_n et C_n . On note a_n la probabilité de l'évènement A_n et on note de même b_n et c_n .

Au début du jeu, c'est le joueur A qui a le ballon.

1. Donner a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n . Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} .
2. Montrer que :

$$\exists M \in M_3(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer M .

3. Déterminer la limite de a_n, b_n, c_n , quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.139 TPE/EIVP MP 2016

On a une urne avec 2 boules vertes et 6 boules blanches et on effectue des tirages avec remise. On note X_n le nombre de boules vertes obtenues après n tirages et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance, ainsi que l'espérance et la variance de F_n .
3. Pour $n = 10000$, notons : $A = \{F_n \in]0.22 ; 0.26[\}$.
Minorer $\mathbb{P}(A)$.
4. Trouver n tel que $\mathbb{P}(A) \geq 0.99$.

III.1.140 CCINP MP 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ dont la loi de couple est donnée par :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X .
4. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ pour tout $(i; j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$.
 - (a) Justifier que B est diagonalisable.
 - (b) En calculant B^2 , déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espaces propres associés.

III.1.141 ENS MP 2017

Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{Z} telle que X et $X + \varepsilon$ soient de même loi, où ε est une variable aléatoire indépendante de X qui vaut $+1$ ou -1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$?

III.1.142 Mines-Ponts PC 2015

On considère une urne contenant une proportion p dans $]0; 1[$ de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X la longueur de la première suite de même couleur, Y la longueur de la deuxième.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X .
3. Idem pour Y .
4. Vérifier rapidement que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.

III.1.143 CCINP PSI 2016

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans \mathbb{N}^* selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur. Donner G et calculer son espérance.

III.1.144 Centrale-Supélec MP 2015

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} , et \mathbb{P} une probabilité. Montrer que Y admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n)$ converge.

III.1.145 ENSEA/ENSIIE MP 2015

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$.

Déterminer le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^{N+1}}$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi de probabilité :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \llbracket 0; N-1 \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}.$$

Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.146 TPE/EIVP MP 2018

On dispose de n pièces numérotées. La $k^{\text{ème}}$ pièce a une probabilité $\frac{1}{2^{k+1}}$ de donner « pile ».

- On note u_i la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » après avoir lancé les i premières pièces. Exprimer u_{i+1} en fonction de i et u_i .
- Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » en lançant toutes les pièces ?

III.1.147 CCINP PC 2023

On pose :

$$\forall x \in]0; 1], \varphi(x) = -x \ln(x).$$

1. Donner le tableau de variations de φ sur $]0; 1]$.

Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

On appelle *entropie* de X , lorsqu'elle existe, la quantité :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n).$$

2. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p . Montrer que X admet une entropie et la calculer.

On revient au cas général d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* et on suppose que celle-ci est d'espérance finie.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = 0$.
 - Montrer que $\sqrt{p_n} \ln^2(p_n) \leq 4$.
4. Dédire de la question 3 que :

$$0 \leq -p_n \ln(p_n) \leq np_n + \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}} \sqrt{np_n}.$$

5. En déduire que X admet une entropie.

III.1.148 Mines-Ponts MP 2021

Soit $r > 0$.

1. Montrer que la relation

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^1 r x^{k-1} (1-x)^r dx$$

définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X dans \mathbb{N}^* .

2. Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

III.1.149 CCINP PC 2022

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n + 2) = 4\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

Déterminer la loi de X .

III.1.150 Mines-Ponts PSI 2025

Déterminer le nombre de parties A de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, i \in A \text{ ou } i+1 \in A.$$

III.1.151 X MP 2017

Un polygone à $2n$ sommets est inscrit dans un cercle. On trace n cordes de telle sorte qu'elles ne se croisent pas (même en un point). On note p_n le nombre d'arrangements de ces cordes.

1. Montrer que $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k}$.
2. Calculer p_n .
3. Donner un développement asymptotique de p_n .

III.1.152 Mines-Ponts MP 2018

Soit une urne remplie de a boules blanches et de b boules d'une autre couleur. On tire successivement et sans remise toutes les boules de cette urne. On note X la variable aléatoire représentant le numéro du tirage où la dernière boule blanche a été tirée.

1. Soit $p < q$. Vérifier que $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Soit $n \in X(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$.

III.1.153 Mines-Télécom MP 2018

On dispose de deux boîtes A et B . Initialement, A contient deux jetons marqués « 0 », et B deux jetons marqués « 1 ». On tire un jeton au hasard de A , que l'on échange avec un jeton tiré au hasard de B . On répète l'expérience indéfiniment. On note X_n la somme des valeurs des jetons situés dans A au bout de n tirages.

Pour tout n , on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout n , exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
2. Pour tout n , exprimer U_n en fonction de n .
3. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

III.1.154 Mines-Ponts MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de \mathbb{N}^* et $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $]0; 1[$. On considère n variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes suivant chacune une loi binomiale : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m_i, p_i)$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale si, et seulement si, les p_i sont tous égaux.

III.1.155 Mines-Télécom MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = \mathbb{P}(X_{ij} = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $m_{ij} = X_{ij}$ pour tout $(i; j)$.

1. Calculer l'espérance de $\text{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
3. Calculer la probabilité que $\text{rang}(M) = 1$.

III.1.156 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $p \in]0; 1[$. On considère des cellules susceptibles de se diviser en deux (avec une probabilité p) ou de mourir (avec une probabilité $1 - p$).

On suppose qu'il y a exactement une cellule à la génération 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la génération n . En particulier, la variable aléatoire X_0 vaut 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n .

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .
2. Déterminer l'univers image $X_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$, montrer l'égalité $g_{n+1}(t) = g_n(g_1(t))$.

III.1.157 CCINP MP MPI 2026

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
 (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
 (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
 (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

III.1.158 Mines-Télécom PC 2024

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, μ et $Z = X + Y$.

1. Lequel de ces deux évènements est le plus probable :
 - X est pair ;
 - X est impair ?
2. Déterminer $\max_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)$.
3. Montrer de deux façons différentes que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En donner l'espérance et la variance.

III.1.159 Mines-Ponts MP 2024

1. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Calculer de deux manières l'espérance de S_n^4 .

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
 Montrer que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement presque sûrement vers la loi constante $\frac{1}{2}$.

III.1.160 X MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note T_n le triangle de sommets $(0; 0)$, $(0; n)$ et $(n; 0)$.

1. On note R_n l'ensemble des rectangles inclus dans T_n , dont les sommets sont à coordonnées entières et dont les côtés sont horizontaux et verticaux. Calculer $|R_n|$.
2. Soit U_n l'ensemble des rectangles dont les sommets sont à coordonnées entières et qui sont inclus dans un rectangle de R_n . Les côtés des rectangles de U_n ne sont pas nécessairement horizontaux ou verticaux. Calculer $|U_n|$. En donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.161 Mines-Ponts PC 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C des points d'affixes a, b, c dans \mathbb{U}_n .

1. Combien y a-t-il de triangles non aplatis de sommets A, B, C ?
2. Combien d'entre eux sont rectangles ?

III.1.162 Mines-Ponts MP 2019

Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} , de cardinal n . On définit $B = A + A$ par :

$$B = \{a + a' \mid (a, a') \in A^2\}.$$

1. Montrer que $2n - 1 \leq \text{Card}(B) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ et que ces inégalités sont optimales.
2. Peut-on généraliser pour $B = kA = \underbrace{A + \dots + A}_{k \text{ fois } A}$?

III.1.163 Mines-Ponts MP 2022

Soit $p \in]0; 1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On note Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \min(m; (X - 1)(\omega)).$$

Calculer l'espérance et la variance de Y .

III.1.164 CCINP MP 2015

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3×3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 2$. Montrer que la classe du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes r_{ij} de la division euclidienne de a_{ij} par 2.
2. On note \mathcal{M} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\text{Card}(\mathcal{M})$.
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M} \mid \det(M) \text{ est impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\text{Card}(\Omega)$ et $\text{Card}(\Delta)$.
4. Détermination de $\text{Card}(\Delta)$.
 - (a) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1. Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
 - (b) On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
 - (c) Calculer $\text{Card}(\Delta)$.
 - (d) En déduire $\text{Card}(\Omega)$.
5. Déterminer la probabilité p .

III.1.165 CCINP MP 2019

Soit E un ensemble à n éléments. On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E .

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$.

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence non nul.

3. Calculer $e^x f(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n .

5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'évènement « Aucun des n élèves n'a sa propre copie. ».

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

III.1.166 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(a; \alpha; \beta) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = a \frac{\alpha^n + \beta^n}{n!}$.

1. Déterminer une condition sur $(\alpha; \beta)$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que vaut alors a ?

2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson ?

3. Généraliser à $p_n = a \frac{\alpha_1^n + \dots + \alpha_k^n}{n!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

III.1.167 ENS Lyon

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les variables X et Y sont indépendantes.

ii) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\mathbb{E}(P(X)Q(Y)) = \mathbb{E}(P(X))\mathbb{E}(Q(Y))$.

III.1.168 Mines-Ponts MP

Soit p_1, p_2 et p des réels de $]0; 1[$, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2 . Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?

2. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soit réelles ?

3. Soit $\theta_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soient dans l'ensemble $S = \{\rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}_+^*, |\theta| \leq \theta_0\}$?

III.1.169 TPE/EIVP

Soit X, Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de même loi uniforme sur $E = \{0, \dots, n\}$. Soit encore $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X; Y)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

En déduire $\mathbb{E}(T)$.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs entières dans $\llbracket 0; k \rrbracket$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer une relation entre $\sum_{j=1}^k \mathbb{P}(U \geq j)$ et $\mathbb{E}(U)$.

(b) Trouver de même une relation entre $\sum_{j=1}^k j^2 \mathbb{P}(U \geq j)$ et $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(U^2)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.

Retrouver $\mathbb{E}(T)$ à l'aide de la question 2(a).

III.1.170 Centrale-Supélec PSI 2022

Soit ξ une variable aléatoire discrète suivant la loi de Rademacher, ne prenant que les valeurs -1 et 1 , avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(u\xi)) \leq \exp\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

- On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par le produit scalaire sur $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- Soit $M = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.
- On considère une matrice colonne $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ telle que $\|X\| = 1$.
- Soit $\zeta = MX$ et $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de ζ dans la base canonique de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{P}(|\zeta_i| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

3. En déduire l'existence d'une constante $C \geq 0$, indépendante de n , telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\zeta_i^2}{4}\right)\right) \leq C.$$

III.1.171 Mines-Télécom PC 2019

Soit X un variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

III.1.172 Mines-Ponts

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance, centrée avec $|X| \leq 1$. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et a_1, \dots, a_n dans \mathbb{R}_+^* . On suppose de plus, que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|X_i| \leq a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

III.1.173 Mines-Télécom MP 2017

Considérons un dé équilibré à six faces.

1. Dans cette première question, on effectue 10 lancers de dé indépendants. Soit T la variable aléatoire qui donne le premier lancer où l'on obtient 6. (On supposera que si l'on n'obtient aucun 6, alors $T = 0$.)
Déterminer la loi de T .

Dans les questions suivantes, on ne limite plus le nombre de lancers de dés. Notons T_n la variable aléatoire renvoyant le numéro de lancer où l'on obtient le $n^{\text{ème}}$ 6.

2. (a) Déterminer la loi de T_1 .
(b) Calculer la fonction génératrice de T_1 , son rayon de convergence et sa somme.
3. (a) Déterminer la loi de $T_2 - T_1$.
(b) Calculer la fonction génératrice de $T_2 - T_1$, son rayon de convergence et sa somme.
(c) En déduire la loi de T_2 .

III.1.174 X-ENS Cachan PSI 2021

Soit A, B deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0; 1; 2\}$.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & A - B & 0 \\ 0 & A & A - 1 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

III.1.175 ENS PC 2025

Une urne contient n boules, dont r rouges. Pour tout entier $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, notons N_k le nombre de boules tirées au moment où on tire la $k^{\text{ème}}$ boule rouge. Calculer $\mathbb{E}(N_k)$.

III.1.176 CCINP MP 2023

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, 5 boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Déterminer la loi de Y .

III.1.177 Centrale-Supélec MP 2015

Soit Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \Gamma, \mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Montrer que Y admet une espérance si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq k)$$

converge et que dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

III.1.178 Centrale-Supélec MP 2015

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \Gamma, \mathbb{P})$ admettant une variance et telle que l'on ait $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit encore $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X < k)$.

Montrer que $S_n \sim n$ et préciser cette propriété asymptotique.

III.1.179 Centrale-Supélec MP 2017

On considère une urne contenant n boules. Il y a b boules blanches et les autres sont rouges. On effectue une succession de tirages avec remise et à chaque tirage on tire sans remise et dans l'ordre deux boules de l'urne. Si les deux sont de la même couleur on les remet dans l'urne, si elles sont de couleurs différentes on remet deux boules de la première couleur tirée.

On note X_k la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches et on note $U_k = (\mathbb{P}(X_k = i))_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur associé à l'état de l'urne après le $k^{\text{ème}}$ tirage.

1. Calculer la matrice A_n telle que $U_{k+1} = A_n U_k$.
2. On se place dans le cas où $n = 4$. Calculer A_4 et son polynôme caractéristique.
3. Étudier la limite de A_4^m quand m tend vers l'infini.

III.1.180 ENS PC 2025

Soit f une fonction convexe avec $f'' \geq 2a$ et X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que :

$$\mathbb{E}(f(X)) - f(\mathbb{E}(X)) \geq a\text{Var}(X).$$

III.1.181 ENS PC 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$X_n = \left| \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \{-1; 0; 1\}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2} \right\} \right|.$$

Estimer X_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.1.182 ENS PC 2025

Soit X de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour un réel $\lambda > 0$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{e}{4} \right)^\lambda \right).$$

III.1.183 ENS PC 2025

Soit σ une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tirée aléatoirement parmi les $n!$ permutations possibles avec une loi uniforme.

1. Donner la loi de la longueur du cycle de σ contenant 1.
Par exemple, si $\sigma = (1\ 4\ 2)(3\ 5)$, la longueur est 3.
2. Calculer l'espérance du nombre de cycles de σ .

III.1.184 ENS PC 2025

On note S_{2n} l'ensemble des permutations sur $\llbracket 1; 2n \rrbracket$. Calculer la moyenne :

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + \dots + |\sigma(2n-1) - \sigma(2n)|).$$

III.1.185 ENS PC 2025

Considérons deux joueurs de tennis étant du même niveau (chaque jeu est gagné avec la probabilité $\frac{1}{2}$).

1. Quelle est la probabilité qu'ils atteignent le tie-break (6-6) ?
2. Calculer :

$$\sum_{k < n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}}.$$

III.1.186 ENS PC 2025

Soit N une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On lance N pile ou face équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de faces ?

III.1.187 ENS PC 2025

Une urne contient n boules, dont une seule rouge. On tire, sans remise, des boules uniformément au hasard, l'une après l'autre. Quand on tire la boule rouge, on a une chance sur deux de s'arrêter, et une sur deux de la remettre dans l'urne, remélanger, et poursuivre le tirage. Combien de boules auront été tirées, en espérance, quand on s'arrête ?

III.1.188 ENS PC 2025

Calculer l'espérance de la norme 1 d'un point pris uniformément dans l'hypercube $\llbracket -n ; n \rrbracket^d$, et en calculer un équivalent quand n tend vers $+\infty$. Faire le même exercice avec la norme infinie.

III.1.189 ENS PC 2025

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$ dont les entrées sont aléatoires avec $(M_{ij})_{i \leq j}$ indépendantes qui suivent une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note $\lambda_1(M)$ sa plus grande valeur propre. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que pour k suffisamment grand,

$$c(1-p)^k \leq \mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \leq C(1-p)^{\frac{k}{3}}.$$

1. Montrer que $\lambda_1(M) \geq M_{11}$.
2. Montrer que $\lambda_1(M)^2 \leq \text{Tr}(M^2)$.
3. Conclure.

III.1.190 ENS PC 2025

On dit qu'une variable aléatoire est de *Rademacher* si elle prend les valeurs 1 et -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Soit X une variable aléatoire de Rademacher. Montrer que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{\gamma X}) \leq e^{\gamma^2}.$$

2. Soit $(X_n)_{n=1}^{2025}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes et $(c_n)_{n=1}^{2025}$ une suite de réels (non triviale). On pose :

$$Y = \sum_{n=1}^{2025} c_n X_n.$$

Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{t^2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}.$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y| > \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{4(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}}.$$

III.1.191 ENS PC 2025

On joue à pile ou face et on note p la probabilité d'avoir « Face », $q = 1 - p$ la probabilité d'avoir « Pile » et l'évènement A_n suivant :

« Il n'y a pas eu 2 résultats « Face » de suite lors de n lancers. »

Donner un équivalent de $\mathbb{P}(A_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2 Nombres complexes

III.2.1 X ESPCI

Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système :

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ xyz & = 1 \\ |x| = |y| = |z| & = 1 \end{cases}$$

III.2.2 Mines-Ponts MP 2023

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

III.2.3 ENS PC 2015

Soit a et b deux nombres complexes distincts. Soit P et Q deux polynômes complexes non constants. On fait les hypothèses :

$$P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\}) \quad \text{et} \quad P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\}).$$

Montrer que P et Q sont égaux.

III.2.4 Mines-Télécom MP 2022

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, où \mathbb{U} est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

III.2.5 ENSEA/ENSIIE 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n} |\alpha - 1|$.

On rappelle que $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$.

III.2.6 Mines-Télécom 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n$ définie par $f(z) = z^2$.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle une involution ?

III.2.7 Centrale 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

III.2.8 Mines-Ponts PC 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et impair. On pose $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Montrer l'existence de $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-w^k}{1+w^k}$ et calculer P_n .
2. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

III.2.9 Mines-Ponts PC 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n^* = \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ et

$$P_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} (x - \alpha) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} \frac{1}{1 - \alpha}.$$

1. Simplifier P_n .
2. Simplifier S_n .

III.2.10 CCINP

Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

$$1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$.

III.2.11 CCINP MP 2024

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (On ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre.)
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$.
3. En déduire, pour $n \geq 2$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

III.2.12 ENSAM 2012

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

III.2.13 X-ENS

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

III.2.14 CCINP

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

III.2.15 Mines 2015

On considère le plan complexe \mathbb{C} . Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3 ait pour orthocentre le point O , d'affixe 0.

III.2.16 Centrale 2015

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note Ω_P l'ensemble des nombres complexes tels que le polynôme $P(X) + c$ est scindé à racines simples sur \mathbb{C} .

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note Θ_P l'ensemble des nombres réels r tels que le polynôme $P(X) + r$ est scindé à racines simples sur \mathbb{R} .
 - (a) Montrer que Θ_P est un intervalle non vide et ouvert dans \mathbb{R} .
 - (b) Déterminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que Θ_P soit non borné.

III.2.17 Mines-Ponts PSI 2015

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

III.2.18 CCP PC 2015

Soit $w = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Soit $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

Calculer $S + T$ et ST , puis en déduire S et T .

III.2.19 Mines-Ponts PSI 2015

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^n = \frac{1+ai}{1-ai}.$$

III.2.20 CCINP PC 2018

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.

1. Exprimer $|1+z|$ en fonction de θ .
2. Montrer que $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

III.2.21 Centrale-Supélec PSI 2014

Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{C}^4$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 des quatre racines du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient sur les quatre sommets d'un carré du plan complexe.

III.2.22 Mines-Ponts PSI 2017

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2, z^5 soient alignés.

III.2.23 ENS Ulm

Soit $(a_1; \dots; a_m) \in \mathbb{C}^m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $z_n = \sum_{k=1}^m a_k^n$.

Que dire des nombres complexes a_1, \dots, a_m si la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

III.2.24 ENSEA/ENSIIE PSI 2023

Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mapsto \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Trouver tous les z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Trouver tous les z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

III.2.25 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

1. Factoriser dans \mathbb{C} les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$.
2. Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

III.2.26 CCINP PC

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$, puis que $\frac{3+4i}{5} \in \mathbb{U}$.
2. Soit a_k la partie réelle de $(3+4i)^k$ et b_k sa partie imaginaire.
Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k , puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.
3. Montrer que, pour $k \geq 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3, puis montrer que le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4. Conclure.
4. Démontrer l'inégalité :

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leq |\beta - \alpha|.$$

III.2.27 Mines-Télécom MP 2018

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0.$$

Indication : l'équation possède une solution réelle.

2. Que peut-on dire du triangle ABC , où A, B, C sont les points du plan dont les affixes sont les racines trouvées à la question 1 ?

III.2.28 Centrale-Suplélec PSI 2025

- Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Rappeler la définition de « f est bornée sur Ω ».
 - Rappeler la définition de « f admet un maximum sur Ω ».
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.
 - L'application φ est-elle bornée ?
On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.
 - Montrer que φ est bornée sur D .
 - Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.

III.2.29 Mines-Télécom MP 2022

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{U}_n &\longrightarrow \mathbb{U}_n \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

où \mathbb{U}_n est le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

- Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ l'application f est-elle bijective ?
- Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $f \circ f = \text{Id}$?

III.2.30 Mines-Télécom MP 2016Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z) = 3$.**III.2.31** CCINP TSI 2024Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P .
- Trouver toutes les racines de P .

III.2.32 X MP 2019Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x + jy + j^2z = 0$, avec $j^3 = 1$ et $j \neq 1$.Que peut-on dire du triangle xyz ?**III.2.33** ENS MPI 2025

- Soit $(a; b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$. Prouver qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + bi$.
- Démontrer que $z \mapsto ze^z$ est surjective sur \mathbb{C} .

III.2.34 Mines-Ponts MPCalculer $\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}}$.**III.2.35** CCINP PC 2014Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n = (X + 1)^n + (X - 1)^n$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n , puis factoriser ce polynôme sur \mathbb{C} .

III.2.36 Centrale-Supélec PSI 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$.
2. Calculer le produit des solutions non nulles.

III.2.37 TPE/EIVP MP 2017

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont comprises dans l'enveloppe convexe contenant les racines de P .

III.2.38 X MP 2019

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| = \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

III.2.39 CCINP PC 2019

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant un tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z^n) = P_n(f(z)).$$

On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1} .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z^n) = Q(f(z))$$

est P_n .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$.

Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire? Donner une expression des P_n .

5. (a) Montrer que $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
(b) En déduire le coefficient constant de P_n .

6. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

7. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

III.2.40 Mines-Ponts PC 2024

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer l'existence d'un polynôme réel P_n tel que :

$$(1 + iX)^{2n+1} - (1 - iX)^{2n+1} = 2iX P_n(X^2).$$

2. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
3. Déterminer les racines de P_n .
4. Simplifier $\prod_{k=1}^n \left(4 + \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)$.

III.2.41 X-ENS

Soit $(z_1; \dots; z_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Prouver qu'il existe une partie I contenue dans $\{1; \dots; n\}$ telle que :

$$\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

III.2.42 X ESPCI

Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}} \frac{1}{2-z}$.

III.2.43 ENSEA/ENSIIE PSI 2024

Soit $n > 1$ un entier. On considère le polynôme P tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

1. Déterminer les racines de P .
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}} \right| = n$.
3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

III.2.44 TPE/EIVP MP 2017

Soit a, b, c trois nombres complexes quelconques. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\begin{cases} x + y + z & = a \\ x + jy + j^2z & = b \\ x + j^2y + jz & = c \end{cases}$$

admette une solution $(x; y; z)$ dans \mathbb{R}^3 .

On rappelle que $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

III.2.45 Mines-Télécom MP 2019

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $4X^4 + 3X^2 + 1$.
3. Trouver quatre diviseurs (positifs) de 40301.

III.2.46 X MP 2014

Soit z une racine $n^{\text{ème}}$ primitive de l'unité. Montrer pour $d \geq 1$:

$$z^{(k+n)d} = z^{k^d}.$$

Calculer le module de la somme des z^{k^2} pour k variant de 0 à $n-1$.

III.2.47 CCINP PC 2021

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

III.2.48 CCINP PC 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-1)^{2n+1} - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer les racines complexes du polynôme P .
2. En déduire une simplification du produit :

$$\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

III.2.49 X PC 2024

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ a 4 racines distinctes qui sont toutes sur le même cercle dans le plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

III.2.50 ENS PC 2025

Soit $n > 2$ un nombre impair. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k^2 i}{n}} \right| = \sqrt{n}.$$

3 Équations fonctionnelles

III.3.1 X-ENS 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $f(f(n)) = n + 2023$ pour tout entier n .

III.3.2 Centrale 2020

Trouver les fonctions réelles définies et continues sur $]0; +\infty[$ vérifiant, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$,

$$f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

III.3.3 Mines-Ponts PSI 2022

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X + 1) = (X + 4)P(X)$.

III.3.4 X PC 2015

1. Montrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe sur \mathbb{R} .
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f \circ f = \cos$.

III.3.5 X MP

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \end{cases}$$

Que dire de f ?

On commencera par montrer que f est bornée au voisinage de 0 en considérant la fonction $\varphi : x \mapsto x + x^{-1}$.

III.3.6 Centrale

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors ω^2 l'est aussi.
2. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.
3. En déduire que 0 n'est pas une racine de P .
4. Déterminer P en le factorisant.

III.3.7 X

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y).$$

III.3.8 X MP

Trouver toutes les fonctions continues f telles pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+r) - f(x) \in \mathbb{Q}$.

III.3.9 CCP MP

On note F l'ensemble des fonctions de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur \mathbb{R} et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Soit $f \in F$. Montrer que f vérifie une équation différentielle de la forme

$$y'' + ky = 0. \quad (1)$$

2. Déterminer les solutions de (1).
3. Déterminer F .

III.3.10 Mines-Télécom PSI 2015

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

III.3.11 X MP

Trouver toutes les fonctions f et g appartenant à $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que, pour tous x et t appartenant à \mathbb{R}_+^* , $f(xt) = f(x)f(t)$.

III.3.12 X-ENS

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient, pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

III.3.13 TPE/EIVP PC 2016

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$.

III.3.14 Mines-Ponts MP 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.

III.3.15 Mines-Ponts MP

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

III.3.16 Centrale

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

III.3.17 Mines-Ponts PC 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = f(x) + 1.$$

III.3.18 Centrale MP 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = 2f(x) - x.$$

III.3.19 CCINP MP 2022

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 - X)P'' = 6P$.

III.3.20 Centrale PC 2024

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.
2. $P(X^2) = P(X + 1)P(X)$.

III.3.21 Mines-Ponts MP 2022

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

III.3.22 X-ENS

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 1) = P(X^2 + X + 1)$.

III.3.23 Mines-Ponts PSI 2019

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \cos(P(x))$.

1. Trouver les solutions de degré 0.
2. Trouver les solutions de degré 1.
3. Trouver toutes les solutions.

III.3.24 X 2024

Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x)).$$

III.3.25 X 2024

Trouver les fonctions $f \in C^2([0; 1], \mathbb{R})$ telles que

$$f(x) = 2 \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right).$$

III.3.26 X PC 2019

Trouver les fonctions f de classe C^1 définies sur \mathbb{R} vérifiant

$$|f| + |1 + f'| \leq 1.$$

III.3.27 X PC 2019

Déterminer les fonctions continues $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

III.3.28 CCP 2015

Trouver les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

III.3.29 CCP 2015

On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)). \quad (E)$$

1. Soit f une fonction vérifiant la relation (E), et les conditions $f(0) = f(1) = 0$.
 - (a) Montrer que f est impaire.
 - (b) Montrer que f est 2-périodique et en déduire que f est bornée.
 - (c) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$.
 - (d) Qu'en déduire sur f ?
2. Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété (E).

III.3.30 Mines-Ponts 2015

Trouver toutes les fonctions f continues de $] -1; 1[$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t) dt.$$

III.3.31 ENS Ulm

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \geq 0, f(xy) \geq f(x)f(y) \text{ et } f(1) = 1.$$

III.3.32 Centrale PSI 2017

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle (E) : $2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Montrer qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème (E) se ramène à deux équations différentielles du premier ordre, et résoudre le problème (E).

III.3.33 X ESPCI

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

III.3.34 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

III.3.35 Mines

Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \exists a, b \in \mathbb{R}_+, f([x; y]) = [a; b] \text{ et } |x - y| = |a - b|?$$

III.3.36 Mines-Ponts MP 2015

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$f'(f(x))f'(x) = 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) > 0.$$

III.3.37 Centrale-Supélec PC 2014

Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \cos(x)f(x).$$

III.3.38 X FUF 2024

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x + y}.$$

III.3.39 X MP 2020

Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n > 0, f(n + 1) > f(f(n)).$$

III.3.40 Mines 2022

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t) dt.$$

III.3.41 ENS Ulm 2022

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x - 1) + f(x + 1) + f(x - \pi) + f(x + \pi)}{4}.$$

III.3.42 Mines-Télécom MP 2023

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $XP(X) = (X - 3)P(X + 1)$.

1. Montrer que si P vérifie la relation, alors 1, 2 et 3 sont des racines de P .
2. Donner tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X + 1)$.
3. Conclure.

III.3.43 Mines-Télécom MP 2023

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R} et 2π -périodiques, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x - \pi) + \sin(x).$$

III.3.44 Mines-Télécom MP 2023

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

III.3.45 Mines-Ponts MP 2023

1. Soit $c > 2$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue 1-périodique vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x).$$

Montrer que $f = 0$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x - n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

III.3.46 Mines-Ponts PC 2023

On admet que si I est un intervalle de \mathbb{R} non trivial, alors toute fonction définie sur I , à valeurs réelles, continue et injective est strictement monotone. Pour tout réel x , on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x + 1\}.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x + 1) = f(x) + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$.
4. On pose $d = f(0)$ et on note g la restriction de f à l'intervalle $[0; d]$.
 - (a) Montrer l'encadrement $0 < d < 1$.
 - (b) Montrer que g réalise une bijection de $[0; d]$ sur $[d; 1]$ et que celle-ci est continue et strictement croissante.
5. Décrire les éléments de \mathcal{E} .

III.3.47 Mines-Télécom PSI 2019

Trouver toutes les fonctions continues f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)f(x-t) dt.$$

III.3.48 TPE/EIVP MP 2015

Trouver les fonctions $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in]0; 1[, \int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t} dt = f(x).$$

III.3.49 X MP 2018

Trouver toutes les fonctions continues f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

III.3.50 X MP 2017

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x; h) \in \mathbb{R}^2, f(x+h) - f(x) = f'(x)h.$$

III.3.51 X ESPCI 2015

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y).$$

III.3.52 X

Montrer qu'il n'existe pas trois fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , f, g et h telles que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, h(f(x) + g(y)) = xy.$$

III.3.53 ENS PC 2024

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t)^2 = f(t\sqrt{2}).$$

III.3.54 X PSI 2023

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotones telles que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y).$$

III.3.55 Mines-Ponts PC 2024

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 + (1 + f'(x))^2 \leq 1.$$

Que dire de f ?

III.3.56 X-ENS

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt.$$

III.3.57 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in]-1; 1[$. Soit encore $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x+a) = f(x).$$

2. Exprimer la fonction F dans le cas où f est la fonction cosinus.

III.3.58 Mines-Ponts PC 2015

Trouver les fonctions continues f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt + 1.$$

III.3.59 X MP 2015

Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée vérifiant :

$$f'(t) = f(t-1).$$

III.3.60 ENS MP 2014

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$.

Que dire de f ?

III.3.61 ENS 2013

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$?

III.3.62 Mines-Télécom PSI 2019

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

avec $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine fonction u .

2. Montrer que u est solution de (E) .
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à \mathbb{R}_+ est solution de (E) .

III.3.63 ENS MP 2015

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que :

- $\forall x \in]0; +\infty[, f(x+1) = \ln(x) + f(x)$;
- $f(1) = 0$;
- f est convexe sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que, en cas d'existence, la fonction f est unique.
2. Expliciter f .

III.3.64 Mines-Ponts

Soit l'équation fonctionnelle :

$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

1. Quelles sont les solutions constantes sur \mathbb{R} ?
2. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xh(x)$. À quelle condition sur h , la fonction f est-elle solution de (E) ?

On définit par récurrence une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} en posant $h_0 : x \mapsto 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1} : x \mapsto h_n \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x}{2} \left(h_n \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2.$$

Soit $x \in [0; 1]$ et $T_x : y \mapsto y - \frac{xy^2}{2}$.

3. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$ et que $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.
4. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $[0; 1]$.
5. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur \mathbb{R}_+ .

III.3.65 Mines-Ponts

Trouver les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos(x).$$

III.3.66 X MP 2019

On dit que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est *multiplicative* si :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, f(ab) = f(a)f(b).$$

1. Décrire ces fonctions.
2. Décrire celles qui sont croissantes.

III.3.67 X MP 2013

Soit f de classe C^∞ , 1-périodique. Résoudre :

$$g(t + \sqrt{ab}) - g(t) = f(t).$$

III.3.68 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C([0; 1], \mathbb{R}_+^*)$ telles que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = 1.$$

III.3.69 ENS PC 2024

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (P \circ P)(z) = 0\}.$$

III.3.70 ENS PC 2024

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$f(7x + 1) = 49f(x).$$

III.3.71 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait :

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt.$$

III.3.72 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait :

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt.$$

4 Divers

III.4.1 X/Centrale

On a $2n + 1$ cailloux. Lorsqu'on isole n'importe lequel d'entre eux, on peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n cailloux dont la somme des masses est égale. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

III.4.2 x

Calculer :

$$\inf_{\alpha \in]0; \pi]} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}.$$

III.4.3 Mines

1. Montrer que $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est une racine d'un polynôme de degré trois à coefficients entiers.
2. Justifier que a est irrationnel.

III.4.4 X-ENS

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer la *formule d'inversion de Pascal* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k (-1)^{n-k}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de *dérangements* de $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans point fixe. Calculer d_n .

III.4.5 ENS ULSR MP 2023

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que :

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x; y) > 0\}.$$

III.4.6 x

Montrer que $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \min\{x_{i_1}; \dots; x_{i_k}\} = \max\{x_1; \dots; x_n\}$.

III.4.7 X-ENS MP

On considère $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que les racines de P ont une partie réelle strictement négative si et seulement si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$.

III.4.8 x MP

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant n racines réelles distinctes supérieures à 1.

On pose $Q(x) = (1 + X^2)P(X)P'(X) + X(P(X)^2 + P'(X)^2)$.

Montrer que Q admet au moins $2n - 1$ racines réelles distinctes.

III.4.9 x PC 2015

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et p, q deux nombres réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

III.4.10 x

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

III.4.11 x-ENS

Soit $I \subset \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) $x \mapsto xf(x)$ est convexe ;
- ii) $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

III.4.12 Mines-Ponts

Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que $x^y = y^x$. Peut-on trouver des solutions non entières ?

III.4.13 x

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

III.4.14 x PC 2019

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} de la forme

$$f(x) = x^n + ax + b$$

avec $n \geq 2$ entier et a, b réels.

1. Montrer que f n'a pas plus de 3 racines réelles différentes.
2. Donner un exemple avec 3 racines réelles différentes.
3. Montrer que si de plus n est pair, f n'a pas plus de 2 racines réelles différentes.

III.4.15 x

Soit f la fonction définie pour tout $\lambda \in]0; 1]$ par :

$$f(\lambda) = \sup_{x \in [0; \frac{1}{\lambda}]} \left(e^{-x} - (1 - \lambda x)^{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de f en 0.

III.4.16 Mines-Ponts

Soit $(a; b; n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $a + b \geq n$.

Montrer que
$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$

III.4.17 X-ENS MP

Montrer que la fonction sinus n'est pas la restriction à $]a; b[$ d'une fraction rationnelle.

III.4.18 X

Soit I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *logarithmiquement convexe* si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_a : x \mapsto f(x)a^x$ est convexe.

III.4.19 Mines-Ponts PC 2022

Montrer que la seule involution continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est $\text{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

III.4.20 X-ENS

Une partie A de \mathbb{R} est dite *négligeable* (ou de *mesure nulle*) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que :

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon$$

où $\mu(I_n)$ désigne la longueur de l'intervalle I_n .

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On note Z l'ensemble des zéros de f' . Montrer que $f(Z)$ est négligeable.

III.4.21 Mines-Ponts PSI 2019

On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \inf_{(a;b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^k - ax - b)^2 e^{-x} dx$.

Montrer que I_k existe, est atteint, et calculer sa valeur.

III.4.22 X-ENS PC 2023

Soit $x_0 < \dots < x_n$ appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Montrer qu'il existe des nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ l'on ait

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k).$$

III.4.23 X-ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Calculer $T_{n+1} + T_{n-1}$. (Les polynômes T_n sont appelés *polynômes de Tchebychev*.)

2. Montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant. Déterminer ses racines et les extrema de la fonction $x \mapsto T_n(x)$.
3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré n , on a

$$\sup_{x \in [-1;1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

avec égalité si et seulement si $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

III.4.24 Mines

Montrer qu'il existe $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$P(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x+k) \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré inférieur à } n.$$

III.4.25 CCP

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a; b]$ dans \mathbb{R} . Démontrer que :

$$\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On pose, pour tout f et tout g de E ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III.4.26 Mines-Ponts

Soit $(\alpha; \lambda) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda \in]-1; 1[$.

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)\}$.

1. Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une fonction non nulle de E qui est développable en série entière.
3. Déterminer E .

III.4.27 Centrale

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer à quelles conditions sur n et p , les polynômes $X^n - 1$ et $(X + 1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

III.4.28 X PC 2019

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $[-1; 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant :

$$f(0) = f(1) \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 2.$$

On définit :

$$\begin{aligned} H : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{-1}^1 f^2(x) dx \end{aligned}$$

Montrer que le minimum de H sur E est atteint et le calculer.

III.4.29 X PC 2019

Soit $n \geq 3$ un entier. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à n côtés dont les milieux sont fixés.

III.4.30 Mines PSI 2017

Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$.

III.4.31 Mines-Ponts 2012

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

III.4.32 Mines-Ponts 2016

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\arctan(x - 1) + \arctan(x) + \arctan(x + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

III.4.33 Mines-Ponts

Quelles sont les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont limite uniforme de polynômes convexes ?

III.4.34 Centrale PSI

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt = \int_0^\pi P(t) Q(t) \sin(t) dt$.

III.4.35 X ESPCI

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$$

et le déterminer.

III.4.36 X ESPCI

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
 - (a) Calculer $\frac{P'(X)}{P(X)}$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} privé des racines de P . En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X)P''(X) \leq P'(X)^2$.
 - (b) Montrer que, si $\deg(P) \geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

III.4.37 Mines-Ponts PSI

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes deux à deux. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls, autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|a_k| + |a_{k+1}| \neq 0$.

III.4.38 X MP 2019

Pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, on considère sa *fonction moyenne* :

$$\begin{aligned} Mf &: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (M^m f)(n) = f(1).$$

III.4.39 Mines-Ponts MP 2019

Soit $a_1 < \dots < a_n$ des entiers, et

$$P = 1 + \prod_{i=1}^n (X - a_i)^2.$$

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

III.4.40 Mines-Télécom MP 2024

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

III.4.41 Mines-Télécom MP 2022

Exprimer $\sin(3x)$ comme polynôme de $\sin(x)$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

III.4.42 Mines-Ponts 2021

On pose $g : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Déterminer pour quelles valeurs de α la fonction g est polynomiale.

III.4.43 CCINP PC 2014

Soit

$$P : x - y + z = 3 \quad \text{et} \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Déterminer l'intersection de S et P .

III.4.44 X MP 2015

Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est un *nombre algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

III.4.45 X MP 2019

Existe-t-il des fractions rationnelles non constantes $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ telles que $X^2 + Y^2 = 1$?

III.4.46 Mines-Ponts MPI 2024

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} .
(b) Étudier la réciproque.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie.
Soit $a \in]0; 1[$ et $f : E \rightarrow E$ telle que :

$$\forall (u; v) \in E^2, \|f(u) - f(v)\| \leq a\|u - v\|.$$

Démontrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x; y) = \frac{1}{5}(\cos(x) - \sin(y); \sin(x) - \cos(y)).$$

Démontrer que f admet un unique point fixe.

III.4.47 ENSEA/ENSIIE MP 2021

Montrer que l'équation

$$\arctan(x) + x = 1$$

admet une unique solution sur $[0; 1]$.

III.4.48 CCINP PC 2019

Soit E un ensemble non vide et f une application de E dans lui-même.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f \circ f$ est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

III.4.49 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 + 1$.

III.4.50 Mines-Ponts MP 2018

1. Comment définir l'angle formé par deux plans dans \mathbb{R}^3 ?
2. Trouver l'angle formé par les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$P_1 : 2x + 3y - z = 0 \quad \text{et} \quad P_2 : x - 2y + 3z = 0.$$

III.4.51 Mines-Ponts PC 2024

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non trivial. Montrer que toute fonction de classe C^2 sur I est différence de deux fonctions convexes.

III.4.52 CCINP PSI 2012

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

III.4.53 Mines-Télécom PSI 2021

Résoudre le système suivant où $(m; a; b) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$$

III.4.54 CCINP PSI 2014

Soit la conique d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.

1. Donner la nature de cette conique. La tracer.
2. Donner l'équation des tangentes aux points d'intersection avec les axes.

III.4.55 TPE/EIVP MP 2017

Soit un entier n supérieur ou égal à 2 et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes. Comparer la moyenne arithmétique des racines de P et celle des racines de P' .

III.4.56 X MP 2023

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$0 \leq x \leq y \leq x^2 + z \quad \text{et} \quad z < \frac{1}{4}.$$

Montrer que :

$$y \leq 2z \quad \text{ou} \quad x \geq 1 - z.$$

III.4.57 ENSEA/ENSIIE MP 2019

On définit une suite de polynômes telle que $H_0 = 1$ et $H_{n+1}(X) = XH_n(X) - H'_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer H_1 et H_2 .
2. Expliciter, en justifiant, le degré de H_n .
3. Montrer que pour tout entier n non nul, $H'_n(X) = nH_{n-1}(X)$.
4. En déduire que $H_n(X+a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{n-k}(a) X^k$.

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

III.4.58 TPE/EIVP MP 2017

Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t) dt.$$

III.4.59 Mines-Ponts MP 2025

Soit

$$f(x) = x^3 - \ln(x).$$

Déterminer les intervalles sur lesquels f admet une fonction réciproque, et donner un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction réciproque.

III.4.60 X 2022

On considère le nombre rationnel :

$$r = \frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 \dots$$

1. Que vous inspire r ?
2. Formuler une conjecture à l'aide d'une série, puis la démontrer.
3. Que peut-on dire du développement décimal de r ?
4. En déduire une conjecture faisant intervenir la suite de Fibonacci, puis la démontrer.

III.4.61 X 2022

Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

III.4.62 ENS 2022

Montrer que, dans tout triangle, on peut inscrire une ellipse tangente au milieu de chaque côté du triangle.

III.4.63 Mines 2022

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes a_1, \dots, a_n . Calculer, sous réserve d'existence :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(a_i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i P'(a_i)}.$$

III.4.64 X 2022

Existe-t-il un cercle contenant exactement trois points à coordonnées rationnelles ?

III.4.65 Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{A'(k)} \frac{A}{X-k}.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in \{1; \dots; n\}$ tel que :

$$|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

III.4.66 Mines 2022

On pose $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.

On note $A = \{i \in \{0; \dots; n\} \mid a_i \neq 0\}$ et $\mu(P) = \text{Card}(A)$. On suppose que $(x-1)^k$ divise P pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mu(P) \leq k$.

1. On pose $P_0 = 1$ et $P_{s+1} = X(X-1) \cdots (X-s)$ pour $s \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $s \in \{0; \dots; k-1\}$:

$$P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que $a_i = 0$ pour tout $i \in A$. Conclure.
3. Discuter de l'optimalité de la minoration obtenue.

III.4.67 Mines-Télécom MP 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme

$$P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1.$$

1. Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n .
2. Dans le cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne.

III.4.68 TPE/EIVP MP 2018

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible.

Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admet que des racines simples.

III.4.69 X MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$.

III.4.70 X ESPCI 2024

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non constants, n'ayant pas de racine en commun et tels que AB est un carré. Montrer que A et B sont des carrés.

III.4.71 Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$ et a_0, \dots, a_n des nombres réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $a_0 \neq 0$

ii) $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists ! P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$

III.4.72 Centrale-Supélec TSI 2025

Soit f une fonction 1-périodique, définie par :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], f(x) = |x|.$$

1. Tracer le graphe de f sur deux périodes.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
4. Déterminer les sommes suivantes :

(a) $A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

(b) $B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

(c) $C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

III.4.73 Centrale-Supélec TSI 2024

Soit f une fonction 2π -périodique, impaire, telle que :

$$\forall x \in [0; \pi], f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer f sur deux périodes.
2. Calculer la série de Fourier de f .

3. Calculer $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

III.4.74 Mines-Ponts MP 2015

Étudier $x \mapsto \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-2|}$.

III.4.75 Mines-Ponts MP 2025

On considère un sous-espace vectoriel U convexe de \mathbb{R}^n . On dit que f est *convexe* si :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0; 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. On suppose que f est différentiable.
Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in U, f(y) - f(x) \geq Df(x) \cdot (y - x).$$

2. Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Montrer que $\min \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ pour $f \in \mathcal{F}$ est atteint par la seule fonction affine appartenant à \mathcal{F} .

III.4.76 Centrale-Supélec TSI 2024

Soit une surface S d'équation $z^3 = xy$ et la droite D d'équation $x = 2$ et $y = 3(z + 1)$. Déterminer les plans tangents à S qui contiennent D .

III.4.77 Mines-Ponts MP 2018

Soit f une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(x) = e^{-xf(x)}$.

1. Étudier les variations de $x \mapsto (f(x) + f(-x))^2$.
2. Qu'en déduire sur f ?
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ supérieure ou égale à 1.

III.4.78 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{7}{10}\right], f(x) \neq f\left(x + \frac{3}{10}\right).$$

1. Montrer que f s'annule en 7 points distincts de $[0; 1]$.
2. Dessiner l'allure de cette fonction.

III.4.79 ENS MP 2016

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.

1. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit rationnelle en ces points. Montrer qu'alors F est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers.
2. On suppose désormais qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit entière en ces points. Montrer que F est un polynôme à coefficients rationnels.

III.4.80 CCINP PC 2023

1. Soit $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.
Vérifier que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et que Q est strictement positive sur \mathbb{R} .
2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur \mathbb{R} et on pose :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$

- (a) Exprimer Q' .
 - (b) À l'aide de la fonction $g : t \mapsto e^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur \mathbb{R} .
3. Pour tout couple $(P; Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0).$$

- (a) Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire.
 - (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
 - (c) Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. Ce nombre est noté u_n .
4. Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-\frac{1}{n}}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n).$$

III.4.81 CCINP MP 2018

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = 0$.
3. Pour quels entiers p l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = p$ a-t-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

III.4.82 Mines-Télécom PC 2018

On se place dans un repère orthonormé du plan. On considère n points du plan, A_1, \dots, A_n , donnés par leurs coordonnées dans ce repère orthonormé : pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_i(a_i; b_i)$. Soit $M(x; y)$. On définit f telle que $f(M) = \sum_{i=1}^n MA_i^2$. Déterminer les éventuels extrema de f .

III.4.83 CCINP TSI 2021

Étudier la courbe paramétrée par $\left(\frac{t^2}{1-t^2}; \frac{t^3}{1-t^2}\right)$.

III.4.84 CCINP PSI 2016

Soit la surface d'équation $xyz = 1$.

1. Cette surface est-elle régulière ?
2. Montrer que quelque soit le point de cette surface, les intersections du plan tangent à la surface en ce point avec les plans Oxy , Oxz et Oyz forment un tétraèdre dont le volume est toujours le même.

III.4.85 X MP 2017

Soit α, β et γ les trois angles d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta)} \geq \frac{8}{3 + 2\cos(\gamma)}.$$

III.4.86 Mines-Ponts MP 2017

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $m_j = \cos((j-1)x)$.
Montrer que m_j est un polynôme en $\cos(x)$.

III.4.87 Mines-Ponts MP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une subdivision de $[a; b]$. On note A l'ensemble des applications de $[a; b]$ dans \mathbb{R} qui, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, sont affines sur $[s_k; s_{k+1}]$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel, de dimension finie, et déterminer sa dimension.
2. Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement. Montrer que $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et que sa limite est dans A .

III.4.88 Mines-Ponts MP

Pour tout réel t , on considère la droite d'équation $(1-t^2)y + 2tx = 2t - 4$. Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes ces droites.

III.4.89 Centrale PC 2013

Étudier la courbe donnée par l'équation polaire $\rho(t) = \frac{\cos(t)}{1 - \cos(t)}$.

III.4.90 Mines-Ponts MP 2015

Montrer qu'il existe une fraction rationnelle F telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'on ait $F(\tanh(x)) = \tanh(5x)$. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

III.4.91 CCINP TSI 2023

On pose, pour tout $x \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire.
2. Montrer que f^{-1} est C^∞ et admet un développement limité à tout ordre en 0.
3. Déterminer le développement limité de f^{-1} , en 0, à l'ordre 4.

III.4.92 Centrale-Supélec MP 2019

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que P et Q ont les mêmes racines. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $P + \alpha$ et $Q + \alpha$ ont les mêmes racines. Montrer que $P = Q$.

III.4.93 CCINP MPI 2024

Soit $n \geq 2$ entier, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On pose deux fonctions f et g telles que, pour tout $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$f(x_1; \dots; x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} & \text{si } \prod_{i=1}^n x_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On pose également $\Gamma = \{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid g(x_1; \dots; x_n) = 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ , en particulier sur $\Gamma \cap]0; +\infty[^n$.
2. Déterminer μ et $A \in \Gamma \cap]0; +\infty[^n$ tels que $f(A) = \mu$.
3. En déduire que :

$$\forall (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

III.4.94 ENS MP 2023

1. Montrer l'existence d'une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta).$$

Montrer que ces polynômes sont à coefficients entiers.

2. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Trouver les valeurs rationnelles possibles de $\cos(r\pi)$.

III.4.95 Centrale 2015

On considère $n + 1$ nombres réels tels $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Montrer, après avoir justifié l'existence des intégrales considérées, qu'il existe $n + 1$ nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k).$$

III.4.96 CCINP MPI 2024

1. Soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall t \in [-1; 1], \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{2i\pi t}.$$

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$.

2. Soit g une fonction de classe C^1 de $[a; b]$ dans \mathbb{C}^* . On note :

$$\phi : t \mapsto \frac{1}{i} \int_a^t \frac{g'(s)}{g(s)} ds \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto g(t)e^{-i\phi(t)}.$$

- (a) Montrer que ϕ est de classe C^1 .
 (b) Montrer que ψ est constante.
 (c) Montrer qu'il existe $\rho : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [a; b], g(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}.$$

3. Soit $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe C^1 tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}$.

Pouvait-on déduire la valeur de la question 1 ?

III.4.97 CCINP PC 2024

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.
 2. On note M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
 (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.
 (b) En déduire le spectre de $M + I_3$.
 3. Soit $D = \{(x_1; x_2; x_3) \in]0; 1[\mid x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$.
 (a) Montrer que D est un ouvert de \mathbb{R}^3 .
 (b) Montrer que la fonction f définie sur D par :

$$(x_1; x_2; x_3) \mapsto x_1^n + x_2^n + x_3^n + (1 - x_1 - x_2 - x_3)^n$$

est de classe C^2 sur D et calculer ses dérivées partielles.

4. Montrer que le seul point critique de f est $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$.
 5. Calculer la matrice hessienne de f en a .
 6. En déduire que f admet un minimum local strict en a .

On admettra dans la suite que f atteint un minimum global strict en a .

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes de même loi à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3\}$. Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n) \geq \frac{1}{4^{n-1}}$.

III.4.98 Centrale-Supélec TSI 2025

Faire une étude complète de la courbe paramétrée par :

$$x(t) = 3 \cos(t) + \cos(3t) \quad \text{et} \quad y(t) = 3 \sin(t) + \sin(3t).$$

III.4.99 X ESPCI 2023

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \frac{2n}{5}$.

III.4.100 Mines-Télécom MP 2023

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ est irréductible sur \mathbb{Q} .

III.4.101 Mines-Ponts MP 2025

Soit n un entier naturel non nul et x un réel tel que $x \notin \llbracket 1; n \rrbracket$.

On définit :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{(k-x)^2}.$$

Calculer $\frac{u_n(x)}{v_n(x)}$.

III.4.102 X ESPCI 2019

On pose $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $f : (x; y) \mapsto x + ixy$.

Représenter $f(\mathbb{R}^2)$. La courbe présente-elle des points multiples ? Si oui, les déterminer.

III.4.103 Mines-Télécom MP 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle α . Montrer que $\alpha > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi \alpha^n)$ converge.

III.4.104 ENS MP MPI 2024

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}_+^3$. Démontrer que :

$$(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx).$$

III.4.105 X PC 2023

Soit P défini par $P(X; Y) = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $P|_{\mathbb{N}^2}$ soit injective.

III.4.106 Mines-Ponts MPI 2023

Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.
Ce résultat est-il vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

III.4.107 Mines-Télécom PSI 2023

Soit

$$f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)).$$

Tracer le graphe de f .

III.4.108 X ESPCI 2017

Pour tout $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$, prouver l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

III.4.109 Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, soit $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$.

Pour quels couples $(n; p)$, le nombre $S_{n,p}$ est-il un entier ?

III.4.110 Mines-Ponts MP 2017

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R} . On pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt.$$

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.
2. On pose $e_0 : t \mapsto 1$ et pour $k > 0$, $e_k : t \mapsto \sqrt{2} \cos(kt)$.

Interpréter $S_n(f) = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

3. Montrer que $\sum_{k \geq 0} \langle f, e_k \rangle^2$ converge.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que :

$$\|f - p \circ \cos\|_\infty \leq \varepsilon.$$

5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0$ et déterminer la somme de $\sum_{k \geq 0} \langle f, e_k \rangle^2$.

III.4.111 X MP 2019

Soit deux ensembles A et B . On admet que si on dispose de deux injections respectivement de A dans B et de B dans A , alors A et B sont en bijection et ont même cardinal.

1. Montrer que $\{0; \dots; 9\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $C([0; 1], \mathbb{R})$ est en bijection avec \mathbb{R} .

III.4.112 Mines-Télécom MP 2019

Déterminer tous les n -uplets $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = n$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

III.4.113 Mines-Ponts MP 2018

Soit $P = X^n + \dots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $Q = X^n + \dots + b_{n-1}X + b_n \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que si les b_i sont assez proches des a_i , alors Q est scindé à racines simples.

III.4.114 ENS MP 2019

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 10 ayant 8 racines (au moins) dans \mathbb{U} , 2 (au moins) dans \mathbb{R}_+^* , vérifiant $P(0) = 1$ et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

III.4.115 Centrale-Supélec PSI 2015

On sait que pour tout $x \in]0; 1[$, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que x puisse s'écrire $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ en base 10. On définit f sur $[0; 1]$ qui associe 0 à 0, 1 à 1 et, pour tout $x \in]0; 1[$ associe $0, a_2 a_1 a_3 \dots$

1. Donner la représentation graphique de f .
2. La fonction f est-elle continue sur $[0; 1]$?
3. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?
4. Donner une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) dx$.

III.4.116 ENS MP 2015

Soit f de classe C^∞ . On dit que x est un « *super zéro* » de f si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = 0$. Quelles sont les implications valables entre les trois propositions suivantes ? Pour les implications fausses, fournir des contre-exemples.

- La fonction f s'annule une infinité de fois.
- La fonction f s'annule une infinité de fois sur un segment.
- La fonction f a un super zéro.

III.4.117 CCINP PC 2024

1. Déterminer $\sup \left\{ n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
2. Comparer e^π et π^e .

III.4.118 X MP

1. Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \quad (\text{formule de Legendre})$$

2. Par combien de zéros l'entier $100!$ s'achève-t-il ?

III.4.119 Centrale-Supélec MP 2015

Soit N une application de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}_+ . On dit que N est une *valeur absolue* si et seulement si :

- $\forall x \in \mathbb{Q}, N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{Q}^2, N(xy) = N(x)N(y)$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Une valeur absolue N est dite *ultramétrique* si

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq \max(N(x); N(y)).$$

La valeur absolue N est dite *triviale* si elle est constante sur \mathbb{Q}^* .

Si p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p -adique définie sur les entiers. On pose par convention $\nu_p(0) = +\infty$.

1. Soit N une valeur absolue. Déterminer $N(1)$ et $N(-1)$.
2. Soit $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, où $(a; b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, et p un nombre premier.
Montrer que $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ ne dépend que de q .
On le note $\nu_p(q)$. On définit pour $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-\nu_p(q)}$.
Montrer que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
3. Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $N = |\cdot|_p^\alpha$.

III.4.120 Mines-Ponts

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe.
2. On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ell x$ existe.

III.4.121 Mines-Ponts MP 2024

Soit $n \geq 2$ entier. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

III.4.122 Centrale-Supélec MP 2017

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que α est *valeur asymptotique* de f s'il existe une fonction $\gamma : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma(t)) = \alpha$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs asymptotiques de $f : z \mapsto \frac{z}{1 + |z|}$.
2. Même question pour $f : z \mapsto e^z$.
3. Même question pour $f : z \mapsto \sin(z)$.

III.4.123 Mines-ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, x^n - 1 \geq n \left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

III.4.124 Mines-Ponts MP 2016

Soit X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On dit qu'une matrice A vérifie la propriété (P) si et seulement si ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X - Y & Y - Z \\ X - Y & 0 & 0 \\ Y - Z & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que A vérifie la propriété (P) .

2. Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie la propriété (P) si, et seulement si, elle est diagonale.

III.4.125 ENS MP 2015

Soit H l'ensemble des bijections de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continues, dont la bijection réciproque est continue. Quelle est la nature de H ? Quels sont ses sous-groupes finis?

III.4.126 X MP 2018

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, P(x) = 0 \implies \operatorname{Re}(x) < 0.$$

Montrer que tous les coefficients de P sont de même signe.

III.4.127 X MP 2018

1. Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et n un entier supérieur à 1. Montrer que

$$\frac{\sin(4n\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)}$$

est un polynôme en $\cos^2(\theta)$ de degré inférieur ou égal à $2n - 1$.

2. Montrer que $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2^{4n-3}}}$.

3. Calculer de la même façon $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$.

III.4.128 X MP 2018

Décrire qualitativement l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$.

III.4.129 CCINP PC 2024

Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Montrer que P et Q possèdent les mêmes racines.
2. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

III.4.130 ENS

On se propose de montrer que $\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des entiers vérifiant $a_n - b_n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Conclure.

III.4.131 x

Montrer que parmi treize réels distincts on peut toujours en choisir deux, disons x et y , tels que :

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

III.4.132 ENS MP 2017

On dit que P est un *polygone entier* si P est l'enveloppe convexe de points de \mathbb{Z}^2 . On dit que P est équivalent à Q , et on note $P \sim Q$, si P et Q sont des polygones entiers et s'il existe une transformation affine A qui envoie P sur Q et telle que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Quelle est le nombre de classes d'équivalence (éventuellement infini) ? Même question si l'on fixe l'aire du polygone.

III.4.133 Mines-Télécom MP 2018

Déterminer toutes les fonctions convexes et bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

III.4.134 ENS MP 2016

Soit F et G deux polynômes non constants à coefficients entiers tels que pour tous entiers a et b , $F(a) - F(b)$ divise $G(a) - G(b)$. Montrer qu'il existe un polynôme H à coefficients rationnels tel que $G(X) = H(F(X))$.

III.4.135 Mines-Ponts MP 2016

Soit E l'ensemble défini par :

$$E = \{f \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R}), f \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+\}.$$

On pose ϕ définie par, pour tout f dans E et pour tout x dans \mathbb{R}_+ :

$$\phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\tanh(tx)}{\cosh(t)} dt.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
2. On pose, pour tout n dans \mathbb{N}^* , f_n définie sur \mathbb{R}_+ par $f_n(t) = \arctan(nt)$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(\phi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

III.4.136 Mines-Télécom MP 2017

Soit λ et μ deux nombres réels. On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 \in \mathbb{R}_2[X] \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P'_n \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, existe-t-il P_0 tel que $P_n = Q$?

III.4.137 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que $ff'' = 0$. On pose :

$$Z_{ff'} = \{x \in [a; b] \mid f(x)f'(x) = 0\}.$$

1. Montrer que $Z_{ff'}$ est un intervalle fermé.
2. Montrer que f est affine.

III.4.138 Mines-Ponts PC 2018

Soit P et Q deux polynômes réels non nuls. L'équation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = e^x$$

peut-elle avoir une infinité de solutions ?

III.4.139 X-ENS PSI 2021

Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension 2 muni d'une base $(e_1; e_2)$, et tel que, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\lambda e_1 + \mu e_2\| = \|\lambda|e_1 + |\mu|e_2\| \quad \text{condition } (C_1)$$

On veut montrer que pour tout $(\lambda_1; \lambda_2; \mu_1; \mu_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$|\lambda_1| \leq |\mu_1| \text{ et } |\lambda_2| \leq |\mu_2| \implies \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| \leq \|\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2\| \quad \text{condition } (C_2)$$

1. Donner un exemple d'espace vectoriel normé dans lequel (C_1) est vérifiée, puis un exemple dans lequel elle ne l'est pas.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mu \mapsto \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$. Montrer que :

$$\forall (\mu_1; \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(\mu_1) + \varphi(\mu_2)}{2}.$$

3. En déduire que φ est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (\mu_1; \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in [0; 1], \quad \varphi((1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2) \leq (1 - \alpha)\varphi(\mu_1) + \alpha\varphi(\mu_2).$$

4. Montrer que φ est croissante sur \mathbb{R}_+ .
5. En déduire la propriété (C_2) .

III.4.140 ENS MP 2018

Soit n un nombre premier. On considère dans le plan le triangle T formé par l'origine et les points de coordonnées $(0; n)$ et $(n; 0)$. On subdivise ce triangle en n triangles t_i , $i \in \{1; \dots; n\}$, où chaque t_i est formé par l'origine et les points de coordonnées $(i - 1; n + 1 - i)$ et $(i; n - i)$.

1. On admet le *théorème de Pick* :

Soit P un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières. Alors $S = A + \frac{B}{2} - 1$, où S est l'aire du polygone, A le nombre de points intérieurs à coordonnées entières du polygone, et B le nombre de points à coordonnées entières appartenant à la frontière du polygone.

Montrer alors que pour tout $i \in \{2; \dots; n - 1\}$, les t_i ont le même nombre de points intérieurs à coordonnées entières.

2. Démontrer le théorème admis.

III.4.141 ENS MP 2017

Existe-t-il une fonction f de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que l'on ait simultanément :

- $\forall \alpha > 0, f(x) = o(x^\alpha)$;
- $\forall \beta > 0, (\ln(x))^\beta = o(f(x))$?

III.4.142 ENS MP 2014

1. Montrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tous entiers p, q avec q non nul, l'on ait :

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2}.$$

2. En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}.$$

III.4.143 X MP 2018

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire, nul en 1 et en -1 , et strictement positif sur $] -1 ; 1[$. Soit \mathcal{S} l'aire sous la courbe de P entre -1 et 1. Soit \mathcal{T} l'aire du triangle défini par l'axe des abscisses et les tangentes à P en -1 et en 1.

Montrer que $\mathcal{S} \geq \frac{2}{3}\mathcal{T}$.

III.4.144 ENS

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m a_k z_k^n = 0.$$

Montrer que $a_1 = \dots = a_m = 0$.

III.4.145 X MP 2021

Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe un cercle du plan dont le nombre de points d'intersection avec \mathbb{Q}^2 soit n ? L'intersection peut-elle être infinie?

III.4.146 ENS MP 2017

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Trouver les fonctions f de $\llbracket 0 ; n \rrbracket^d$ dans \mathbb{R} vérifiant :

- La fonction f est nulle aux « bords » de $\llbracket 0 ; n \rrbracket^d$: pour $x \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^d$, si une des coordonnées de x est dans $\{0 ; n\}$, alors on a $f(x) = 0$.
- Pour tout $x \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^d$ n'ayant aucune coordonnée dans $\{0 ; n\}$, on a :

$$\sum_{y \in A_x} (f(x) - f(y)) = 0,$$

où A_x désigne l'ensemble des points de $\llbracket 0 ; d \rrbracket^n$ « adjacents » à x , c'est-à-dire obtenus en ajoutant ou soustrayant 1 à une des coordonnées de x .

III.4.147 Mines-Ponts MP 2019

1. Soit $P = (X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_n)^{\alpha_n}$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des r_j , $1 \leq j \leq n$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+d-1}}{d},$$

où $d \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\ell = \frac{2(u_0 + 2u_1 + \cdots + du_{d-1})}{d(d+1)}.$$

III.4.148 X MP 2019

Pour $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$V(f) = \sup_{n \geq 2, a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b} \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Montrer que :

$$V(f) < +\infty \iff f \text{ est la différence de deux fonctions croissantes.}$$

III.4.149 X MP 2016

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et μ_1, \dots, μ_n des réels, et la fonction P définie pour tout θ réel par :

$$P(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\theta) + \cdots + \lambda_n \cos(n\theta) + \mu_1 \sin(\theta) + \cdots + \mu_n \sin(n\theta).$$

Montrer que si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\theta) \geq 0$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$ pour tout θ .

III.4.150 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $\gamma \in [-1; 1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit

$$S_\alpha(\gamma) = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\gamma x) \text{ et } f(0) = \alpha\}.$$

1. Déterminer $S_\alpha(-1)$ et $S_\alpha(1)$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n$.

3. Montrer que la somme de la série précédente appartient à $s_1(\gamma)$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et T définie sur E par :

$$\forall t \in E, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t) dt.$$

4. Montrer que f est un point fixe de T si et seulement si $f \in S_\alpha(\gamma)$.

5. Soit $a \in]0; 1[$ et $(f; g) \in E^2$. Majorer $\|T(f) - T(g)\|_\infty$ en fonction de $\|f - g\|_\infty$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur $[-a; a]$.

6. Montrer que, pour tout $\gamma \in [-1; 1]$, T possède un unique point fixe dans $S_\alpha(\gamma)$. En déduire un élément de $S_\alpha(\gamma)$.

III.4.151 Mines-Ponts MP 2025

Soit a, b, c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que :

$$\sin(a) \sin(b) \sin(c) \leq \frac{1}{8}.$$

III.4.152 X MP

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. On note, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$n(z) = \text{Card}(\{x \in \mathbb{C} \mid P(x) = z\}).$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\deg((P - z) \wedge P') = d - n(z)$.

2. Calculer :

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z)).$$

III.4.153 Centrale-Supélec MP 2017

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $E = \{a \in \mathbb{R} \mid P + a \text{ est scindé}\}$.

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que Q' l'est aussi.

2. Soit a et b des éléments de E . Montrer que $\frac{a+b}{2} \in E$.

3. On suppose que P est unitaire. Montrer que P est scindé si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^{\deg(P)}.$$

III.4.154 ENS PC 2024

Un *répunit* est un nombre entier positif dont l'écriture décimale ne comprend que des 1. Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que l'image d'un répunit par ce polynôme soit toujours un répunit.

III.4.155 X MP 2024

1. Soit n un entier supérieur à 1 et premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.
2. On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0, \underbrace{142857} \underbrace{142857} \dots \underbrace{142857} \dots && \text{avec } 142 + 857 = 999 \\ \frac{2}{7} &= 0, \underbrace{285714} \underbrace{285714} \dots \underbrace{285714} \dots && \text{avec } 285 + 714 = 999 \\ \frac{1}{13} &= 0, \underbrace{076923} \underbrace{076923} \dots \underbrace{076923} \dots && \text{avec } 76 + 923 = 999 \end{aligned}$$

Expliquer.

III.4.156 X MP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_i)_{i \in [1;n]}$ les racines de $X^n + 1$. Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z^k - 1)^2}.$$

2. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Montrer l'inégalité de Bernstein :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \|P'\| \leq n\|P\|.$$

III.4.157 Centrale

Un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est dit *stable* si :

$$P(\lambda) = 0 \implies \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de P dans \mathbb{C} et

$$Q = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X - (\lambda_i + \lambda_j)).$$

1. Montrer que P est stable si et seulement si P et Q ont leurs coefficients tous strictement positifs.
2. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$.
Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$, $ab - c > 0$ et $c > 0$.

III.4.158 ENS PC 2025

On définit la fonction Rev par $\text{Rev}(0) = 0$ et si $P \neq 0$ est tel que $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k.$$

1. La fonction Rev est-elle linéaire ? inversible ?
2. Montrer qu'elle est inversible dans $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid P(0) \neq 0\}$.
3. Déterminer les $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$.