Hauteur d'une calotte sphérique

Le volume V d'une calotte sphérique de hauteur h, inscrite dans une sphère de rayon r, se calcule grâce à une formule bien connue. On va la retrouver et la démontrer dans la preuve du théorème suivant dont le contenu est moins connu, je pense : on va exprimer la hauteur d'une calotte sphérique en fonction de son volume. On sera amené à une équation du troisième degré que l'on va résoudre en utilisant la méthode de Cardan.

Théorème

Soit r un nombre réel strictement positif. Si une calotte sphérique, inscrite dans une sphère de rayon r, a un volume V (éventuellement nul), alors la hauteur h de cette calotte est donnée par la formule :

$$h = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1 - \frac{3V}{2\pi r^3}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Preuve

Soit h un nombre réel vérifiant $0 \leqslant h \leqslant 2r$.
Grâce au calcul intégral on a

$$\begin{aligned} V &= \int_{r-h}^{r} \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{r-h}^{r} \\ &= \frac{\pi}{3} h^2(3r - h) \end{aligned}$$

Donc

$$V = \frac{\pi}{3} h^2(3r - h). \tag{1}$$

On remarque que si $h = 0$, alors l'égalité (1) donne $V = 0$, et si $h = 2r$ l'égalité (1) donne $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, soit le volume d'une sphère de rayon r. Maintenant, afin d'obtenir l'égalité du théorème, résolvons l'équation (1) par rapport à h.

L'égalité (1) peut s'écrire

$$h^3 - 3rh^2 + \frac{3V}{\pi} = 0. \tag{2}$$

Afin de faire disparaître le terme en h^2 dans l'équation (2), posons $h = x + r$. L'équation (2) devient $(x+r)^2 - 3r(x+r)^2 + \frac{3V}{\pi} = 0$ ou encore

$$x^3 - 3r^2x + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0. \tag{3}$$

Posons encore $x = a + b$. L'équation (3) devient :

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - 3r^2(a+b) + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0.$$

Et par suite

$$a^3 + b^3 + 3(ab - r^2)(a+b) + \frac{3V}{\pi} - 2r^3 = 0.$$

En imposant $ab = r^2$, on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} ab = r^2 \\ a^3 + b^3 = 2r^3 - \dfrac{3V}{\pi} \end{cases}$$

En élevant au cube la première équation du système précédent, on obtient :

$$\begin{cases} a^3b^3 = r^6 \\ a^3 + b^3 = 2r^3 - \dfrac{3V}{\pi} \end{cases}$$

Les quantités a^3 et b^3 sont solutions de l'équation

$$t^2 - \left(2r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)t + r^6 = 0. \tag{4}$$

Le discriminant Δ de l'équation (4) est égal à

$$\left(2r^3 - \frac{3V}{\pi}\right)^2 - 4r^6 = \frac{3V}{\pi}\left(\frac{3V}{\pi} - 4r^3\right).$$

Comme le volume d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$, on a $V \in \left[0\,;\frac{4\pi r^3}{3}\right]$. Procédons par disjonction de cas :

I. $\boxed{V = 0}$

L'équation (2) s'écrit $h^2(h - 3r) = 0$. Alors $h = 0$ puisque $0 \leqslant h \leqslant 2r$.

II. $\boxed{V = \dfrac{4\pi r^3}{3}}$

L'équation (2) s'écrit $h^3 - 3rh^2 + 4r^3 = 0$ ou encore $(h-2r)^2(h+r) = 0$. Alors $h = 2r$ puisque $0 \leqslant h \leqslant 2r$.

III. $\boxed{0 < V < \dfrac{4\pi r^3}{3}}$

On a $\Delta < 0$.
L'équation (4) possède alors 2 racines complexes conjuguées (distinctes) :

$$t_1 = \frac{2r^3 - \dfrac{3V}{\pi} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{3V}{\pi}\left(4r^3 - \dfrac{3V}{\pi}\right)}}{2},$$

$$t_2 = \frac{2r^3 - \dfrac{3V}{\pi} - \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{3V}{\pi}\left(4r^3 - \dfrac{3V}{\pi}\right)}}{2}.$$

On a $|t_1| = |t_2|$ et l'équation (4) donne, grâce une relation de Viète [1], l'égalité $t_1 t_2 = r^6$. Il s'ensuit que $|t_1| = |t_2| = r^3$.
Soit α l'argument de t_1, avec $0 < \alpha < 2\pi$.
Puisque $\cos(\alpha) = 1 - \dfrac{3V}{2\pi r^3}$ et parce que $\sin(\alpha) > 0$, on a

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{3V}{2\pi r^3}\right). \tag{5}$$

Sous forme trigonométrique :

$$t_1 = r^3\left(\cos(\alpha + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\alpha + 2k\pi)\right)$$

$$t_2 = r^3\left(\cos(\alpha + 2k\pi) - \mathrm{i}\sin(\alpha + 2k\pi)\right)$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Puisque $t_1 = a^3$ et $t_2 = b^3$ (ou le contraire, ce qui reviendrait au même) et parce que $ab \in \mathbb{R}$, l'équation (3) possède les 3 solutions réelles suivantes :

$$x_{k+1} = 2r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2.$$

Par suite, puisque $h = x + r$, l'équation (2) possède les 3 solutions réelles suivantes :

$$h_{k+1} = r + 2r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2.$$

1. Pour toute équation du deuxième degré (réelle ou complexe) $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des racines (éventuellement complexes) vaut $\frac{c}{a}$.

Grâce à l'égalité (5) on peut écrire :

$$h_{k+1} = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1 - \frac{3V}{2\pi r^3}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \text{ pour } k = 0, 1, 2.$$

Lorsque le volume de la calotte vaut la moitié du volume de la sphère, soit $\frac{2\pi r^3}{3}$, la hauteur h de cette calotte vaut r.

Or, pour $V = \frac{2\pi r^3}{3}$, on a

$$h_1 = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(1-1)\right)\right) = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = r\left(1 + \sqrt{3}\right) \neq r,$$

$$h_2 = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = r\left(1 - \sqrt{3}\right) \neq r,$$

$$h_3 = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = r\left(1 + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = r.$$

Donc h_3 est la hauteur recherchée.

Enfin, on vérifie sans peine que $\lim\limits_{V \to 0^+} h_3 = 0$ et que $\lim\limits_{V \to \frac{4\pi r^3}{3}^-} h_3 = 2r$.

Le théorème est démontré. $\square$