

Existence d'endomorphismes du groupe additif des nombres réels qui ne sont pas linéaires

Considérons l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Grâce à l'**axiome du choix**¹, il existe une $\mathbb{Q}$ -base de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in I \subset \mathbb{R}\}$, contenant la partie libre $\{1; \sqrt{2}\}$. Soit $i_1, i_2 \in I$ tels que $e_{i_1} = 1$ et $e_{i_2} = \sqrt{2}$. Soit encore $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{Q}$ -linéaire définie comme suit :

$$f(e_{i_1}) = 1 = f(e_{i_2}) \quad \text{et} \quad f(e_i) = 0 \quad \text{pour tout } i \in I \setminus \{i_1; i_2\}.$$

On a donc

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

et

$$f(q \cdot x) = q \cdot f(x) \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{Q} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Mais

$$f(e_{i_2} \cdot e_{i_2}) = f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$

alors que

$$e_{i_2} \cdot f(e_{i_2}) = \sqrt{2} \cdot 1 \neq 2.$$

Conclusion

Il **existe** une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est un endomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$, mais qui n'est pas $\mathbb{R}$ -linéaire.

Que se passe-t-il si l'on ajoute une hypothèse de continuité? Répondons à cette question de la manière suivante :

Soit f une fonction réelle **continue en 0** et vérifiant pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

1. L'axiome du choix est équivalent au lemme de Zorn qui permet de montrer que toute famille libre d'un espace vectoriel peut être complétée en une base. En particulier, en prenant comme famille libre l'ensemble vide, le lemme de Zorn permet de prouver que tout espace vectoriel possède une base.

On va montrer que

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. (La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.)
3. $f(x) = f(1) \cdot x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

On aura donc démontré en particulier que la fonction f est $\mathbb{R}$ -linéaire.

Passons maintenant à la démonstration des points 1, 2 et 3.

1. Soit x_0 et h deux nombres réels.
Vu l'égalité (1), on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$. Par suite, comme f est supposée continue en zéro, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(x_0) + f(0).$$

Or l'égalité (1) entraîne aussi $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, et par suite $f(0) = 0$. On a donc démontré que f est continue en x_0 . Comme x_0 est quelconque, on vient de prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

On va intégrer pour dériver :

2. Comme la fonction f est continue, elle est intégrable (au sens de Riemann) sur l'intervalle $[0; 1]$. L'égalité (1) donne

$$\int_0^1 f(x + y) \, dy = \int_0^1 f(x) \, dy + \int_0^1 f(y) \, dy.$$

Puis

$$\int_0^1 f(x + y) \, dy = f(x) + K \tag{2}$$

où $K = \int_0^1 f(y) \, dy$ est un nombre réel.

En effectuant le changement de variable $t = x + y$, l'égalité (2) devient

$$\int_x^{x+1} f(t) \, dt = f(x) + K.$$

Si F est une primitive de f , on a $f(x) = F(x + 1) - F(x) - K$. Comme F est de classe C^1 , la fonction f est aussi de classe C^1 .

3. En dérivant les deux membres de l'égalité (1) par rapport à y , on obtient

$$f'(x+y) = f'(y).$$

Pour $y = 0$ on a

$$f'(x) = f'(0).$$

Donc $f(x) = f'(0) \cdot x$ et comme $f(1) = f'(0) \cdot 1$ on a $f(x) = f(1) \cdot x$.

Comme clairement toute fonction f vérifiant la dernière égalité est continue (en zéro) et vérifie aussi l'égalité (1), le point 3 est démontré.