Équation du troisième degré
Résolution réelle et détaillée

Vincent Genilloud

Le mathématicien italien
Gerolamo Cardano (1501-1576)

Sommaire

1 Nombre de solutions d'une équation du troisième degré

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, considérons l'équation

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \tag{1}$$

Le but de ce paragraphe est de discuter, selon la valeur des coefficients a, b, c et d, le nombre de racines réelles de l'équation (1). Ce paragraphe n'est pas nécessaire pour l'obtention des formules du paragraphe 2.

Soit f l'application réelle définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. La dérivée première de f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le discriminant réduit Δ' du trinôme $3ax^2 + 2bx + c$ vaut $b^2 - 3ac$.

CAS I $\Delta' \leqslant 0$ i.e. $b^2 - 3ac \leqslant 0$

Alors f est strictement monotone et l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$. Comme la fonction f est continue, l'équation (1) possède une unique racine réelle.

CAS II $\Delta' > 0$ i.e. $b^2 - 3ac > 0$

Alors f' possède deux zéros réels distincts : $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta'}}{3a}$ et $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta'}}{3a}$.

Sens de variation de f

II.1 $a > 0$

Alors $x'' < x'$, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; x''] \cup [x'; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[x''; x']$.

II.2 $a < 0$

Alors $x' < x''$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; x'] \cup [x''; +\infty[$ et f est strictement croissante sur $[x'; x'']$.

Conséquences

1. Si $f(x')f(x'') < 0$, i.e. si $f(x')$ et $f(x'')$ ont des signes opposés, alors l'équation (1) admet trois racines réelles réelles (distinctes).
2. Si $f(x')f(x'') > 0$, i.e. si $f(x')$ et $f(x'')$ ont le même signe, alors l'équation (1) admet une unique racine réelle.
3. Si $f(x')f(x'') = 0$, i.e. si $f(x') = 0$ ou bien $f(x'') = 0$, alors l'équation (1) admet (exactement) deux racines réelles distinctes, dont une double.

Ainsi, afin de déterminer le nombre de racines de l'équation du troisième degré selon les valeurs de a, b, c, d, il suffit de calculer $f(x')$ et $f(x'')$ puis le produit $f(x')f(x'')$. Après quelques calculs, on obtient :

$$f(x')f(x'') = \frac{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}{729a^4}.$$

Conclusion

1. Si $\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 > 4\left(b^2 - 3ac\right)^3$, l'équation (1) possède une unique racine réelle.
2. Si $\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 = 4\left(b^2 - 3ac\right)^3$, l'équation (1) possède deux racines réelles distinctes si $b^2 - 3ac \neq 0$ et une racine triple sinon. (Si $b^2 - 3ac = 0$ alors $x' = x''$ et $f(x') = f'(x') = f''(x') = 0$.)
3. Si $\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 < 4\left(b^2 - 3ac\right)^3$, l'équation (1) possède trois racines réelles distinctes.

2 Résolution de l'équation du troisième degré

On va résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1) en utilisant la méthode de Cardan.

En divisant l'égalité (1) par $a \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0} \tag{2}$$

Afin de faire disparaître le terme en x^2, posons $z = x + \dfrac{b}{3a}$.

Alors l'égalité (2) devient $\left(\dfrac{3az - b}{3a}\right)^3 + \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{3az - b}{3a}\right)^2 + \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{3az - b}{3a} + \dfrac{d}{a} = 0$.

D'où :

$$\boxed{z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}z + \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3} = 0} \tag{3}$$

Remarque

L'application réelle g définie par

$$g(z) = z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}z + \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $b^2 - 3ac \leqslant 0$. Alors, dans ce cas, les équations (1) et (3) possèdent une seule racine réelle. (Voir le paragraphe 1, CAS I.)

En posant $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$ et $q = \dfrac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}$, l'équation (3) s'écrit :

$$\boxed{z^3 + pz + q = 0} \tag{4}$$

Posons $z = u + v$, où u et v sont deux nombres (réels à priori).
Alors on a

$$u^3 + v^3 + 3uv\underbrace{(u + v)}_{z} + pz + q = 0$$

Et par suite

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)z + q = 0.$$

En imposant $3uv = -p$, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

En divisant la première équation par trois puis en élevant l'équation obtenue au cube, on obtient :

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Les quantités u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du deuxième degré :

$$\boxed{t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0} \tag{5}$$

Le discriminant Δ de l'équation (5) est égal à $\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$.

En remplaçant p par $\dfrac{3ac - b^2}{3a}$ et q par $\dfrac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}$, on obtient :

$$\Delta = \frac{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 + 4\left(3ac - b^2\right)^3}{729a^4}.$$

Discussion

CAS I $\Delta > 0$

Dans ce cas, on a $27q^2 + 4p^3 > 0$ ou encore $\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 + 4\left(3ac - b^2\right)^3 > 0$.

L'équation (5) possède alors deux racines réelles distinctes :

$$t' = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad t'' = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Or $t' = u^3$ et $t'' = v^3$ (ou, ce qui reviendrait au même, $t' = v^3$ et $t'' = u^3$). Donc $u = \sqrt[3]{t'}$ et $v = \sqrt[3]{t''}$. Comme $z = u + v$, $z_0 = \sqrt[3]{t'} + \sqrt[3]{t''}$ est solution réelle de l'équation (3).
Enfin, $x_0 = \sqrt[3]{t'} + \sqrt[3]{t''} - \dfrac{b}{3a}$ est solution réelle de l'équation (1).

Remarque

Si $\Delta > 0$, l'équation du troisième degré possède une racine réelle x_0 et deux racines complexes conjuguées. On peut obtenir ces deux solutions imaginaires en calculant les deux racines cubiques complexes de t' et t''.

En posant $\delta = \left(27a^2d - 9abc + 2b^3\right)^2 + 4\left(3ac - b^2\right)^3$ on obtient :

$$x_0 = \frac{\sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 - \sqrt{\delta}} - b\sqrt[3]{2}}{3a\sqrt[3]{2}}.$$

CAS II $\quad \Delta < 0$

Dans ce cas, on a $27q^2 + 4p^3 < 0$ ou encore $(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 + 4\,(3ac - b^2)^3 < 0$.

Remarque

Si $\Delta < 0$ on a $b^2 - 3ac > 0$.

L'équation (5) possède deux racines complexes conjuguées :

$$t' = \frac{-q + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad t'' = \frac{-q - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Leur module commun r est égal à $\dfrac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2}$.

Sous forme trigonométrique :

$$t' = r\,(\cos(\varphi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2k\pi))$$
$$t'' = r\,(\cos(-\varphi - 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi - 2k\pi))$$

où φ est l'argument de t' et où $k \in \mathbb{Z}$.

Les nombres t' et t'' possèdent chacun trois racines cubiques complexes :

Les racines cubiques de t' sont :

$$\begin{cases} t'_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\varphi}{3}\right)\right) \\ t'_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\varphi + 2\pi}{3}\right)\right) \\ t'_3 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\varphi + 4\pi}{3}\right)\right) \end{cases}$$

Les racines cubiques de t'' sont :

$$\begin{cases} t''_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\dfrac{\varphi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\varphi}{3}\right)\right) = \overline{t'_1} \\ t''_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\dfrac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\varphi + 2\pi}{3}\right)\right) = \overline{t'_2} \\ t''_3 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\dfrac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\varphi + 4\pi}{3}\right)\right) = \overline{t'_3} \end{cases}$$

Donc, puisque $uv \in \mathbb{R}$ (car $uv = -\frac{p}{3}$), les solutions de l'équation (4) sont

$$z_1 = t'_1 + t''_1, \quad z_2 = t'_2 + t''_2 \quad \text{et} \quad z_3 = t'_3 + t''_3.$$

D'où :

$$z_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad z_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad z_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right).$$

Et les trois racines réelles de l'équation (1) sont

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}.$$

En calculant r et $\cos(\varphi)$ en fonction des coefficients a, b, c, d, on obtient :

$$r = \frac{\sqrt{(b^2 - 3ac)^3}}{27|a|^3} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi) = -\operatorname{sgn}(a)\frac{27a^2 - 9abc + 2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}.$$

Puisque $\sin(\varphi) > 0$, on a à $2k\pi$ près :

$$\varphi = \arccos\left(-\operatorname{sgn}(a)\frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right).$$

D'où les trois racines (distinctes, comme on le verra plus loin) de l'équation (1) :

$$x_{k+1} = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3|a|}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\operatorname{sgn}(a)\frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

pour $k = 0, 1, 2$.

On va maintenant voir qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte du signe de a dans l'expression précédente.

- Si $a > 0$ alors

$$x_{k+1} = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

  pour $k = 0, 1, 2$.

- Si $a < 0$ alors

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= -\frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a}\\
&= -\frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi-\arccos\left(-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right)\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a}\\
&= \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi-\arccos\left(-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right)\right)+\frac{2k\pi}{3}-\pi\right)-\frac{b}{3a}\\
&= \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(-\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right)-\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a}\\
&= \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right)+\frac{2(1-k)\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a}
\end{aligned}$$

  pour $k = 0, 1, 2$.

Il est facile de constater que :

x_1 (pour $a < 0$) correspond à x_2 lorsque $a > 0$;
x_2 (pour $a < 0$) correspond à x_1 lorsque $a > 0$;
x_3 (pour $a < 0$) correspond à x_3 lorsque $a > 0$.

Ainsi, les trois solutions de l'équation (1) peuvent être données par la formule suivante :

$$x_{k+1} = \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{2(b^2-3ac)\sqrt{b^2-3ac}}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a}$$

pour $k = 0, 1, 2$.

La proposition suivante montre en particulier que les trois racines de l'équation (1) (lorsque $\Delta < 0$) sont deux à deux distinctes.

Proposition

a) Si $a > 0$ on a $x_2 < x_3 < x_1$.
b) Si $a < 0$ on a $x_1 < x_3 < x_2$.

Peuve

Puisque $\arccos\left(\frac{-27a^2d+9abc-2b^3}{(b^2-3ac)\sqrt{b^2-3ac}}\right) \in]0;\pi[$, il est aisé de constater que

$$\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-27a^2d+9abc-2b^3}{(b^2-3ac)\sqrt{b^2-3ac}}\right)\right) \in \left]\frac{1}{2};1\right[,$$
$$\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-27a^2d+9abc-2b^3}{(b^2-3ac)\sqrt{b^2-3ac}}\right)+\frac{2\pi}{3}\right) \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[,$$
$$\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-27a^2d+9abc-2b^3}{(b^2-3ac)\sqrt{b^2-3ac}}\right)+\frac{4\pi}{3}\right) \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[.$$

Le résultat est alors immédiat. $\square$

Proposition

Si x' et x'' sont les racines de $f'(x)$, où $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, on a $\Delta = \frac{f(x')f(x'')}{a^2}$.

Preuve

On a vu au paragraphe 1 que

$$f(x')f(x'') = \frac{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}{729a^4}.$$

Le résultat est alors immédiat. $\square$

Remarque

La proposition précédente est encore vraie si $x' = x''$ ou si x' et x'' sont des nombres complexes.

CAS III $\quad \Delta = 0$

Dans ce cas, on a $27q^2 + 4p^3 = 0$ ou encore $(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 + 4\,(3ac - b^2)^3 = 0$.

L'équation (5) possède une racine réelle double $-\dfrac{q}{2}$. En calculant la racine cubique réelle t_0 et les racines cubiques complexes conjuguées t_1 et t_2 du nombre $-\dfrac{q}{2}$, on obtient deux racines réelles pour l'équation (4) :

$$2t_0 \quad \text{et} \quad t_1 + t_2.$$

Des calculs semblables à ceux faits dans le cas II donnent le résultat suivant :

- Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 > 0$:

  une racine double $x_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$ et une racine simple $x_2 = -\dfrac{2\sqrt{b^2 - 3ac} + b}{3a}$.

- Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 < 0$:

  une racine simple $x_1 = \dfrac{2\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$ et une racine double $x_2 = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 3ac} + b}{3a}$.

  Proposition

  Si $\Delta = 0$ et $27a^2d - 0abc + 2b^3 \neq 0$, alors
  a) $x_1 > x_2$ si $a > 0$.
  b) $x_1 < x_2$ si $a < 0$.

  Preuve

  La preuve est immédiate. $\square$

- Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 = 0 = b^2 - 3ac$:

  On a alors $p = q = 0$ et l'équation (4) n'est autre dans ce cas que $z^3 = 0$. Par conséquent, cette dernière équation possède la racine triple zéro et l'équation (1) possède la racine triple $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.

Avant de donner un résumé des formules obtenues, signalons encore que la méthode utilisée dans ce paragraphe est aussi valable si les coefficients a, b, c, d sont des nombres complexes. Elle peut même s'étendre à des corps (commutatifs) de caractéristique différente de deux et de trois. Cette méthode, découverte au 16^{e} siècle, est due notamment au mathématicien italien Gerolamo Cardano.

Résumé

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Notons $\delta = \left(27a^2d - 9abc + 2b^3\right)^2 + 4\left(3ac - b^2\right)^3$.

I. Si $\delta > 0$, une racine réelle (simple) :

$$x = \frac{\sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-27a^2d + 9abc - 2b^3 - \sqrt{\delta}} - b\sqrt[3]{2}}{3a\sqrt[3]{2}}$$

II. Si $\delta < 0$, trois racines réelles distinctes :

$$x_{k+1} = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-27a^2d + 9abc - 2b^3}{2\left(b^2 - 3ac\right)\sqrt{b^2 - 3ac}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - b}{3a}$$

pour $k = 0, 1, 2$

III. Si $\delta = 0$ et $27a^2d - 9abc + 2b^3 \neq 0$, deux racines réelles dont une double :

- Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 > 0$:

$$x_1 = \frac{\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a} \quad \text{(racine double)}$$
$$x_2 = \frac{-2\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$$

- Si $27a^2d - 9abc + 2b^3 < 0$:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$$
$$x_2 = \frac{-\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a} \quad \text{(racine double)}$$

IV. Si $\delta = 0$ et $27a^2d - 9abc + 2b^3 = 0$, une racine réelle triple :

$$x = -\frac{b}{3a}$$

3 Signe des racines de l'équation du troisième degré

Relations de Viète

Supposons que l'équation (1) possède trois racines réelles x_1, x_2, x_3 distinctes ou non. Alors on a $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$ ou encore

$$ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - ax_1x_2x_3 = 0.$$

Ainsi, en posant $S = x_1+x_2+x_3$, $P = x_1x_2x_3$ et $Q = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, on a

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = -\frac{d}{a} \quad \text{et} \quad Q = \frac{c}{a}.$$

Les trois dernières égalités sont appelées relations de Viète.

CAS I

Supposons que l'équation (1) ne possède qu'une solution réelle x_0.

- Supposons $a > 0$. Comme $f(0) = d$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cd+d) = +\infty$, on a $x_0 < 0$ si $d > 0$ et $x_0 > 0$ si $d < 0$.
- Supposons $a < 0$. Comme $f(0) = d$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cd+d) = -\infty$, on a $x_0 < 0$ si $d < 0$ et $x_0 > 0$ si $d > 0$.
- Si $d = 0$ on a $x_0 = 0$ pour tout $a \neq 0$.

Conclusion

Le signe de x_0 est égal au signe de $-\dfrac{d}{a}$.

CAS II

Supposons que l'équation (1) possède trois racines réelles x_1, x_2, x_3, distinctes ou non, telles que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. En utilisant les relations de Viète, on va discuter le signe des racines x_1, x_2, x_3 selon le signe des nombres $\dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}, \dfrac{d}{a}$.

Remarque

La discussion qui suit va permettre de déterminer le nombre de racines négatives, positives ou nulles. Et, grâce aux propositions du paragraphe 2, il sera aussi possible de déterminer quelles sont les racines négatives, positives ou nulles obtenues par les formules fournissant les racines de l'équation du troisième degré.

Discussion

$\boxed{\dfrac{d}{a} > 0}$

Comme $x_1x_2x_3 < 0$, on a $x_1 < 0$ et $\operatorname{sgn}(x_2) = \operatorname{sgn}(x_3) \neq 0$.

- Si $\dfrac{b}{a} > 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$:

  Tous les coefficients de l'équation (1) ont le même signe. Cette équation ne possède donc aucune solution positive. Par conséquent on a $x_2 < 0$ et $x_3 < 0$.

- Si $\dfrac{c}{a} \leqslant 0$:

  On a $Q = x_1(x_2+x_3) + x_2x_3 \leqslant 0$. Donc, puisque $x_2x_3 > 0$ et parce que $x_1 < 0$, on a $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$.

- Si $\dfrac{b}{a} \leqslant 0$:

  On a $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0$. Donc $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$.

Conclusion

Si $\dfrac{d}{a} > 0$, l'équation (1) possède trois racines négatives si $\dfrac{b}{a} > 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$. Sinon l'équation (1) possède une racine négative et deux racines positives.

$\boxed{\dfrac{d}{a} < 0}$

Comme $x_1x_2x_3 > 0$, on a $x_3 > 0$ et $\operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2) \neq 0$.

- Si $\dfrac{b}{a} < 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$:

  On a $x_1 + x_2 + x_3 > 0$ et $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 > 0$.
  Par conséquent on a $x_3 > -(x_1+x_2)$ et $x_3(x_1+x_2) > -x_1x_2$. Si l'on suppose x_1 et x_2 négatifs, alors des deux précédentes inégalités entraînent $(x_1+x_2)^2 < x_1x_2$ i.e. $\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 < 0$, ce qui est absurde. Donc $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

- Si $\dfrac{c}{a} \leqslant 0$:

  On a $Q = x_3(x_1+x_2) + x_1x_2 \leqslant 0$. Donc, puisque $x_1x_2 > 0$ et parce que $x_3 > 0$, on a $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$.

- Si $\dfrac{b}{a} \geqslant 0$:

  On a $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 0$. Donc $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$.

Conclusion

Si $\dfrac{d}{a} < 0$, l'équation (1) possède trois racines négatives si $\dfrac{b}{a} < 0$ et $\dfrac{c}{a} > 0$. Sinon l'équation (1) possède deux racines négatives et une racine positive.

$\boxed{d=0}$

Comme $x_1x_2x_3 = 0$, l'équation (1) admet au moins une racine nulle. Notons x_0 ce nombre et x', x'' les deux autres racines.
On a donc $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ et $x'x'' = \dfrac{c}{a}$.
Vu les propriétés concernant la somme et le produit des solutions d'une équation du deuxième degré, on obtient le résultat suivant :

- Si $\dfrac{c}{a} < 0$:

  l'équation (1) possède une racine négative, une racine nulle et une racine positive.
- Si $\dfrac{c}{a} > 0$:
  - Si $\dfrac{c}{a} > 0$ l'équation (1) possède deux racines négatives et une racine nulle.
  - Si $\dfrac{c}{a} < 0$ l'équation (1) possède deux racines positives et une racine nulle.
  - Si $b = 0$ l'équation (1) ne possède que zéro comme racine simple.
- Si $c = 0$:
  - Si $\dfrac{b}{a} > 0$ l'équation (1) possède une racine négative et une racine nulle. Cette dernière est double.
  - Si $\dfrac{b}{a} < 0$ l'équation (1) possède une racine positive et une racine nulle. Cette dernière est double.
  - Si $b = 0$ l'équation (1) ne possède que zéro comme racine triple.

4 Introduction à l'équation du quatrième degré

Soit a, b, c, d, e des nombres réels avec a non nul et l'équation suivante (équation du quatrième degré, dont la méthode de résolution proposée ci-dessous est due notamment au mathématicien italien Ferrari) :

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0} \tag{6}$$

On pose d'abord $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$, $r = \dfrac{d}{a}$ et $s = \dfrac{e}{a}$. L'équation (6) devient alors

$$\boxed{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0} \tag{7}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante est équivalente à l'équation (7) :

$$\boxed{\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda\right)^2 - \left(\left(\frac{p^2}{4} + 2\lambda - q\right)x^2 + (p\lambda - r)x + \lambda^2 - s\right) = 0} \tag{8}$$

Notons $T(\lambda)$ le trinôme $\left(\frac{p^2}{4}+2\lambda-q\right)x^2+(p\lambda-r)x-s$ et $\Delta(\lambda)$ son discriminant.
On a
$$\boxed{\Delta(\lambda)=-8\lambda^3+4q\lambda^2+2(4s-pr)\lambda+p^2s+r^2-4qs}$$

En utilisant la méthode de résolution de l'équation du troisième degré, on sait trouver $\lambda_0\in\mathbb{R}$ tel que $\Delta(\lambda_0)=0$. Si λ_0 est tel que $\frac{p^2}{4}+2\lambda_0-q=0$, alors forcément $p\lambda_0-r=0$. Dans ce cas particulier, l'équation (8) s'écrit :

$$\left(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda_0\right)^2-\left(\lambda_0^2-s\right)=0.$$

Dans le cas contraire, l'équation (8) est de la forme

$$\left(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda_0\right)^2-D(x+E)^2=0. \qquad (D\in\mathbb{R}^*,E\in\mathbb{R})$$

Donc dans les deux cas on sait factoriser le membre de gauche de l'équation (8) en un produit de deux polynômes du deuxième degré qui sont tous deux complexes si $\lambda_0^2-s<0$ ou si $D<0$, réels sinon. Si ces deux polynômes sont à coefficients complexes, alors en factorisant dans $\mathbb{C}$ et en regroupant les facteurs linéaires ayant des zéros conjugués, l'expression $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ s'écrit comme un produit de deux polynômes réels du deuxième degré.

En résumé, on sait trouver $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que l'équation (7) puisse s'écrire sous la forme
$$\boxed{(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)=0}$$

Ainsi, résoudre l'équation (6) revient à résoudre deux équations du deuxième degré à coefficients réels.

Remarque

Cette méthode de résolution est encore valable pour les équations du quatrième degré à coefficients complexes.