

Le déterminant de Smith (1885)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice carrée de taille n définie par $s_{ij} = i \wedge j$, où $i \wedge j$ désigne le plus grand commun diviseur des nombres i et j . On va calculer $|S|$, le déterminant de S .

L'idée est d'écrire S comme un produit de deux matrices triangulaires A et B dont le déterminant est simple à calculer. Comme le déterminant d'un produit de deux matrices est le produit de leur déterminant, on pourra calculer $|S|$.

Pour ce faire, on va utiliser la fonction indicatrice d'Euler :

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \wedge n = 1\}).$$

La fonction ainsi définie s'appelle l'indicatrice d'Euler.

Lemme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Preuve

Considérons l'ensemble $E = \left\{ \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; \frac{n}{n} \right\}$.

Écrivons les n éléments de E sous la forme d'une fraction irréductible, de sorte que

$$E = \bigcup_{d|n} \left\{ \frac{k}{d} \mid 1 \leq k \leq d \text{ et } k \wedge d = 1 \right\}.$$

Comme toute fraction irréductible (de numérateur et dénominateur positifs) est unique, si d_1 et d_2 sont deux diviseurs distincts de n , on a

$$\left\{ \frac{k}{d_1} \mid k \wedge d_1 = 1 \right\} \cap \left\{ \frac{k}{d_2} \mid k \wedge d_2 = 1 \right\} = \emptyset.$$

On a donc

$$n = \text{Card}(E) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Le lemme est démontré. □

Calculons maintenant le déterminant de S .

Grâce au lemme, on peut écrire, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$i \wedge j = \sum_{d|i \wedge j} \varphi(d).$$

Afin de faire apparaître le produit de deux matrices, écrivons :

$$i \wedge j = \sum_{d|i \text{ et } d|j} \varphi(d) = \sum_{d=1}^n \varphi(d) \delta_{d|i} \delta_{d|j} \quad \text{où} \quad \delta_{d|k} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit maintenant les matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définies par

$$a_{ij} = \varphi(j) \delta_{j|i} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \delta_{i|j}.$$

Si $P = AB$, on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \varphi(k) \delta_{k|i} \delta_{k|j} = i \wedge j.$$

Autrement dit, $S = AB$.

Or

$$A = (\varphi(j) \delta_{j|i})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(1) & 0 & \cdots & 0 \\ * & \varphi(2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \varphi(n) \end{pmatrix} \quad \text{car si } j > i, j \nmid i.$$

Par conséquent, on a $|A| = \prod_{k=1}^n \varphi(k)$.

Et

$$B = (\delta_{i|j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car si } i > j, i \nmid j.$$

Par suite, on a $|B| = 1$.

Finalement, $|S| = |AB| = |A||B| = \prod_{k=1}^n \varphi(k)$.