Le nombre plastique

Le nombre plastique est beaucoup moins connu que le nombre d'or. Cependant, il possède aussi de remarquables propriétés, en particulier en architecture, comme on le verra plus loin.

L'étude de la croissance de la fonction réelle $f(x) = x^3 - x - 1$ montre que l'équation $x^3 = x+1$ admet une unique solution réelle positive. Cette dernière est positive et s'appelle le nombre plastique. On le note généralement Ψ. On a donc

$$\Psi^3 = \Psi + 1.$$

Nous allons calculer la valeur exacte du nombre plastique en résolvant algébriquement l'équation $x^3 = x + 1$. Une fois n'est pas coutume, nous n'utiliserons pas la méthode de Cardan. L'idée de la méthode proposée ci-dessous est due au mathématicien français François Viète (1540-1603). Faisons d'abord quelques rappels.

Rappels

La fonction « cosinus hyperbolique » de x est la fonction notée $\cosh(x)$ et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Nous allons utiliser l'identité suivante qui peut s'obtenir simplement par un calcul direct :

$$\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x). \tag{1}$$

La fonction cosh est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Sa restriction à cet intervalle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathrm{Im}(f) = [1\,;+\infty[$. Sa réciproque, notée arcosh, est appelée « arc cosinus hyperbolique » et

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right). \tag{2}$$

Forts de ces rappels, résolvons l'équation

$$x^3 = x + 1. \tag{3}$$

Une observation attentive des égalités (1) et (3) suggère le changement de variable suivant :

$$x = m\cosh(z), \tag{4}$$

où m et z sont deux nombres réels que l'on va déterminer.

De (3) et (4) l'on obtient :

$$m^3\cosh^3(z) - m\cosh(z) = 1. \tag{5}$$

En comparant les égalités (1) et (5), il est naturel d'imposer $\dfrac{m^3}{m} = \dfrac{4}{3}$.
Ainsi, en choisissant la solution positive de cette dernière équation, on a $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $m\cosh(z) > 0$ et surtout, de l'équation (5),

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\cosh^3(z) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cosh(z) = 1.$$

Et par suite

$$4\cosh^3(z) - 3\cosh(z) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Alors, vu l'égalité (1), on a

$$\cosh(3z) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 1. \tag{6}$$

Puis, en utilisant l'égalité (2), on obtient :

$$3z = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}\right).$$

D'où :

$$\cosh(z) = \frac{(\mathrm{e}^{3z})^{\frac{1}{3}} + (\mathrm{e}^{3z})^{-\frac{1}{3}}}{2} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}{2}.$$

Finalement, grâce à l'égalité (4) et en se rappelant que $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$, on a

$$\boxed{\Psi = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}}$$

Voici une valeur approchée du nombre plastique obtenue grâce au logiciel *WolframAlpha* :

$$\Psi \approx 1,3247179572447460259609088544780973407344040569017333\,64.$$

Quelques remarques

1. En utilisant la méthode de Cardan, on trouve
$$\Psi = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}.$$

2. Toute équation réelle du troisième degré peut être résolue en utilisant, selon les cas [1], l'une des trois identités suivantes :
$$\begin{aligned}\cos(3z) &= 4\cos^3(z) - 3\cos(z)\\ \cosh(3z) &= 4\cosh^3(z) - 3\cosh(z)\\ \sinh(3z) &= 4\sinh^3(z) + 3\sinh(z)\end{aligned}$$

3. On a $\Psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}$.

4. Contrairement au nombre d'or, le nombre plastique n'est pas constructible à la règle et au compas.

5. D'après l'architecte et moine néerlandais Hans van der Laan (1904-1991), les dimensions respectives de deux objets sont perceptibles lorsque la plus grande dimension d'un objet est égale à la somme des deux plus petites dimensions de l'autre. Le principe est de construire une pièce dont les dimensions soient telles que, quand on remplace la plus petite dimension par la somme des deux plus petites, on obtient la plus grande dimension d'une pièce de mêmes proportions que la précédente. Si on appelle $a \leqslant b \leqslant c$ les trois dimensions de la pièce, cette condition se traduit par :
$$(a; b; c) \text{ et } (b; c; a+b) \text{ sont proportionnels, soit encore}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a+b}{c}.$$
Si l'on pose $\rho = \frac{b}{a}$, on a $c = a\rho^2$ et $a\rho^3 = a\rho + a$. Donc le rapport $\frac{b}{a}$ est le nombre plastique.

---

1. Si l'équation du troisième degré est de la forme $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ($a \neq 0$), on se ramènera d'abord à une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$ en faisant le changement de variable $y = x - \frac{b}{3a}$.