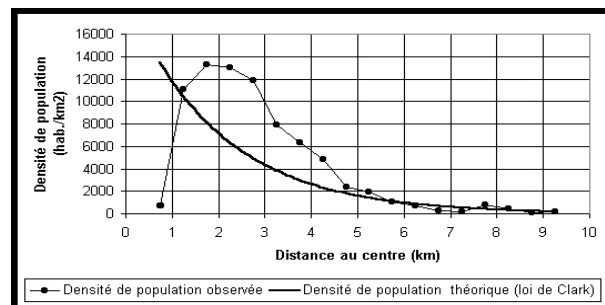


RECUEIL DE PROBLÈMES D'OPTIMISATION

FONCTIONS RÉELLES À UNE VARIABLE



Vincent Genilloud

Mai 2025

Sommaire

1	Problèmes faisant intervenir des fonctions rationnelles	2
2	Problèmes faisant intervenir des fonctions irrationnelles	8
3	Problèmes faisant intervenir des fonctions trigonométriques	11
4	Problèmes faisant intervenir des fonctions exponentielles et logarithmiques	17

1 Problèmes faisant intervenir des fonctions rationnelles

Problème 1.1

Le produit de deux nombres positifs vaut 256 et leur somme est minimale. Quels sont ces nombres ?

Problème 1.2

À Yaoundé, capitale du Cameroun, la densité de population (en milliers d'habitants par km^2) d'un quartier distant de x kilomètres du centre-ville est approximativement égale (en 1995) à

$$D(x) = \frac{156x}{x^3 + 16}$$

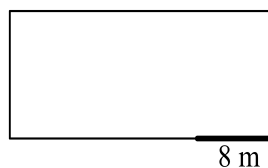
1. À quelle distance du centre-ville cette densité est-elle maximale ? Que vaut cette densité maximale ?
2. Sur quel(s) intervalle(s) cette densité augmente-t-elle ?

Problème 1.3

Parmi tous les rectangles de périmètre p , quel est celui qui a la plus grande aire ? Justifier.

Problème 1.4

Un paysan veut construire un enclos rectangulaire pour ses moutons. Il dispose de 60 mètres de fil de fer et une barrière de 8 mètres, déjà construite, sera utilisée pour une partie d'un des côtés. Trouver les dimensions de l'enclos admettant une aire maximale. Que vaut cette aire ?



Problème 1.5

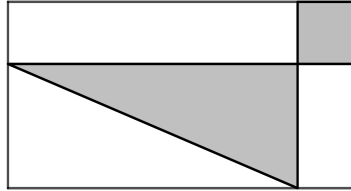
Le coût du combustible consommé par une locomotive est de $7+0,05v$ francs par kilomètre, v désignant la vitesse de la locomotive en kilomètres par heure. Les autres coûts se montent à 245 francs par heure, quelle que soit la vitesse. Trouver la vitesse (constante) pour laquelle on a un coût minimal pour un trajet de 140 kilomètres.

Problème 1.6

On veut fabriquer une boîte de forme cylindrique sans couvercle. Le fond coûte 6 francs par m^2 et la partie latérale 4 francs par m^2 . On dispose de francs pour construire cette boîte. Déterminer les dimensions de la boîte qui a un volume maximal.

Problème 1.7

Considérer la partie ombrée du dessin ci-dessous. Cette partie ombrée, formée d'un carré et d'un triangle rectangle, est contenue dans un rectangle de longueur 13 cm et de largeur 5 cm. Quelles doivent être les dimensions du carré et du triangle ombrés pour que l'aire de la partie ombrée soit minimale ?

**Problème 1.8**

On fait tourner un rectangle de périmètre 80 cm autour de l'un de ses côtés. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le cylindre ainsi obtenu soit de volume maximal. Préciser ce que vaut ce volume.

Problème 1.9

On veut construire une poubelle sans couvercle dont la base est un disque et dont le volume mesure $40\pi \text{ dm}^3$. Le matériel utilisé pour la base coûte 2 francs le dm^2 et celui utilisé pour les parois coûte 40 centimes le dm^2 . Calculer les dimensions pour lesquelles le coût des matériaux est minimal. Quel est ce coût ?

Problème 1.10

Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-disque. Si le périmètre de la fenêtre est de 5 m, quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?

Problème 1.11

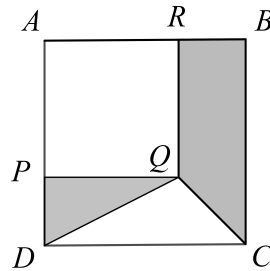
Une personne veut construire un cabanon à outils de 6 m^3 en forme de parallélépipède rectangle le long d'un mur de sa maison. Il n'y a pas besoin de faire un sol, et le mur de la maison est utilisé pour faire une des parois du cabanon. Pour des raisons pratiques, la paroi parallèle au mur de la maison doit être à un mètre de ce mur. Les parois latérales reviennent à 50 francs le m^2 et le plafond à 150 francs le m^2 . Déterminer les dimensions du cabanon dont le coût est minimal.

Problème 1.12

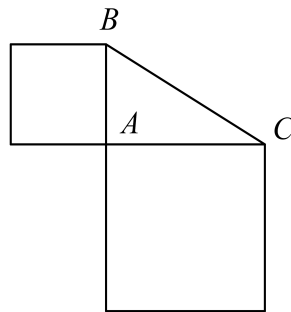
Un éleveur de bovins désire enclore un terrain rectangulaire bordant une rivière rectiligne. Il dispose de 1000 m de fil et ne veut pas enclore le côté longeant la rivière, car ses bovins ne savent pas nager. Calculer la surface maximale qu'il peut créer.

Problème 1.13

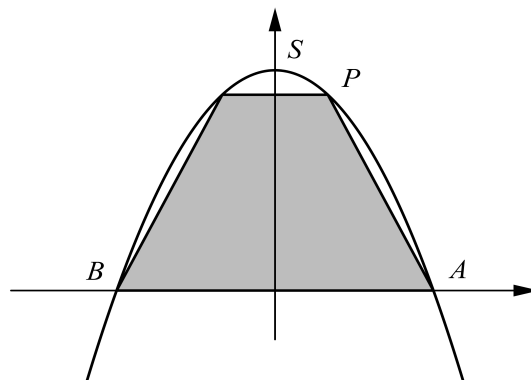
Le côté du carré $ABCD$ mesure 8 m. Quelle doit être la mesure du côté du carré $APQR$ pour que l'aire de la surface grise soit maximale ? Que vaut cette aire maximale ? Justifier.

**Problème 1.14**

L'aire d'un triangle ABC , rectangle en A mesure 18 cm^2 . Déterminer les longueurs des côtés AB et AC afin que la somme des aires des deux carrés (voir la figure ci-dessous) soit minimale.

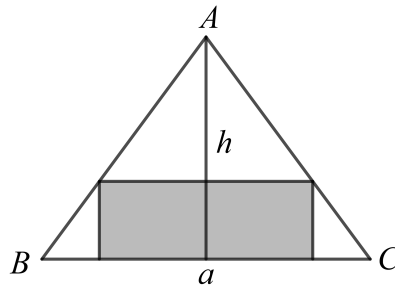
**Problème 1.15**

La parabole d'équation $y = 16 - x^2$ coupe l'axe des abscisses en A et B . Le point P se déplace sur la parabole entre le point A et le sommet S . Calculer les coordonnées du point P pour que l'aire du trapèze grisé soit la plus grande possible.



Problème 1.16

On donne un triangle isocèle de base a et de hauteur h . Trouver le rectangle de surface maximale qui peut être inscrit dans ce triangle.

**Problème 1.17**

Soit P un point d'abscisse x et d'ordonnée $49 - x^2$ avec $-7 \leq x \leq 7$. Considérons la droite d passant par les points $(-25; 0)$ et P .

1. Montrer que la pente de la droite d en fonction de x est :

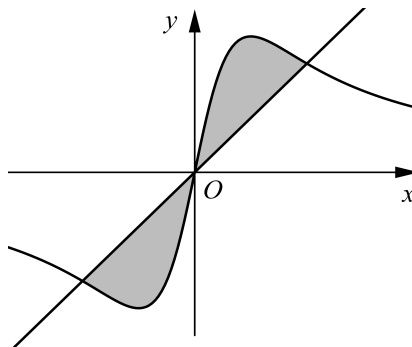
$$p(x) = \frac{49 - x^2}{25 + x}$$

2. Pour quelle valeur de x la pente de la droite d est-elle maximale? Quelle est la particularité de cette droite de pente maximale?

Problème 1.18

On considère les fonctions f et g données par $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$ et $g(x) = x$, et dont les graphes sont représentés ci-dessous dans un repère orthonormé.

Déterminer la longueur du plus grand segment vertical que l'on peut inclure dans la surface grisée.



Problème 1.19

Le site de votre école a reçu l'autorisation d'étudier l'implantation d'une piscine extérieure, en complément des installations sportives existantes. Toutefois, un tel projet est soumis à quelques conditions.

Tout d'abord, sa forme doit être un parallélépipède rectangle. Ensuite, pour pouvoir chronométrer des temps de courses, sa longueur est fixée à 25 m. De plus, pour tenir compte d'une saine gestion de l'eau, son volume a été limité à 536 m^3 .

Enfin, son coût global (sans les aménagements) est estimé comme suit : 1800 francs par m^2 pour le fond, 4000 francs par m^2 pour les côtés et 1200 francs par m^2 pour la couverture (toile qui ne sera utilisée qu'en hiver).

Déterminer la profondeur de cette piscine pour que son coût global soit minimal.

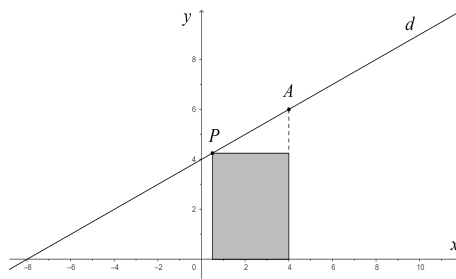
Problème 1.20

Une usine de biscuits découvre à l'occasion d'un contrôle que l'un de ses entrepôts est envahi de souris, ce qui est évidemment une véritable catastrophe. Un rapide comptage en dénombre 1152. De plus, le conseiller scientifique de l'entreprise évalue leur augmentation à 48 souris par jour. Immédiatement, un poison alimentaire est répandu à l'intérieur de l'entrepôt. Son efficacité est lente mais remarquable, puisque le nombre total de souris tuées depuis sa mise en place est égal au cube du nombre de jours écoulés. Quand le nombre de souris sera-t-il maximal ? Quel sera ce nombre ?

Problème 1.21

On considère la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}x + 4$ et le point A de cette droite, d'abscisse 4.

Pour quel point $P(x; y)$ de d l'aire du rectangle grisé est-elle maximale ? On ne considère que les abscisses x appartenant à l'intervalle $] -8 ; 4[$.

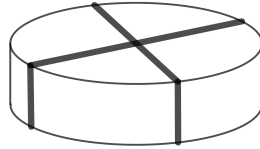


Problème 1.22

Dans beaucoup de pays européens, on admet que le mazout ou le gaz soit stocké à l'extérieur des maisons dans des réservoirs métalliques horizontaux, composés d'un cylindre auquel on accole une demi-sphère à chacune de ses deux extrémités. Quelles doivent être les dimensions d'un réservoir de $2\pi \text{ m}^3$ dont on veut minimiser le coût, si la fabrication du cylindre revient 81 francs par m^2 et celle des demi-sphères à 150 francs par m^2 ?

Problème 1.23

Tonton Jacques aimait sa petite nièce Mathilde. Il lui offrait souvent des bonbons dans des boîtes de forme cylindrique qu'il confectionnait lui-même. Chaque boîte était maintenue fermée et décorée à l'aide de deux rubans (voir la figure ci-dessous) et avait un volume d'un litre. Déterminer les dimensions d'une boîte (rayon de la base et hauteur) sachant que Jacques utilisait le moins de ruban possible.

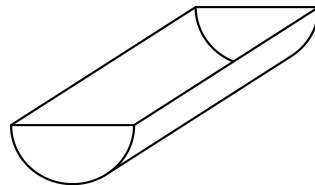


Problème 1.24

Dans le premier quadrant, on considère un point P d'abscisse x se trouvant sur la parabole d'équation $y = 6x - x^2$. Le point Q est la projection orthogonale du point P sur l'axe des abscisses et A est le point d'abscisse strictement positive, intersection de la parabole et de l'axe des abscisses. Déterminer par calcul les coordonnées de P pour que l'aire du triangle rectangle soit maximale. Que vaut cette aire ?

Problème 1.25

On veut construire un bassin en verre dont la forme est un demi-cylindre. Ses deux extrémités sont des demi-disques de rayon x (en mètres). Les deux demi-disques coûtent 100 francs le m^2 et la partie latérale coûte 400 francs le m^2 . On dispose de 900 francs pour l'achat du verre. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du bassin est maximal. Que vaut ce volume ?



Problème 1.26

Pour un certain bien X , la quantité q que les consommateurs sont prêts à acheter dépend du prix unitaire de vente p de ce bien. On admet ici que la demande des consommateurs est donnée par la relation $q + 2p = 90$.

Le bien X est produit par une firme en situation de monopole. Les frais totaux de production de q unités du bien sont donnés par le montant $CT(q) = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.

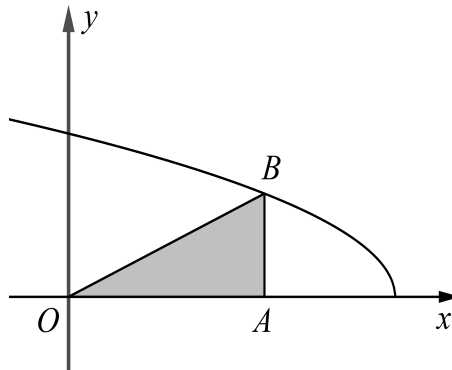
Pour éviter surplus et pénurie, le fabricant doit respecter la demande des consommateurs et fixer le prix de vente en fonction de la quantité qu'il veut écouler.

1. Pour une quantité q , calculer le prix unitaire p de vente, la recette $R = p \cdot q$ et le bénéfice de l'entreprise.
2. Combien le fabricant doit-il produire pour maximiser son profit ?
3. Étudier le bénéfice comme fonction du volume de production. À l'aide du graphe, donner l'intervalle de production qui assure une certaine rentabilité de l'entreprise.

2 Problèmes faisant intervenir des fonctions irrationnelles

Problème 2.1

On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le sommet B parcourt la courbe d'équation $y = \sqrt{5 - x}$.



Déterminer les coordonnées du sommet B pour que l'aire du triangle OAB soit maximale.

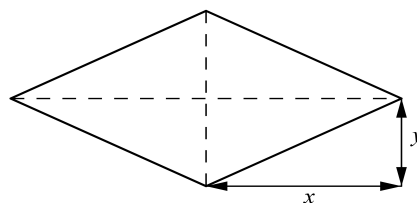
Problème 2.2

Parmi tous les triangles de périmètre 12 cm, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Problème 2.3

La figure ci-dessous représente un losange dont le périmètre mesure 12 cm et de demi-diagonales de longueur x et y .

1. Montrer que l'aire du losange est égale à $2\sqrt{9x^2 - x^4}$.
2. Trouver x et y pour que l'aire de ce losange soit maximale. Quelle est cette aire maximale ?



Problème 2.4

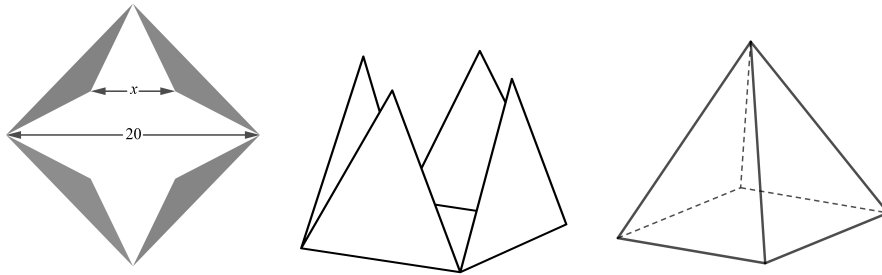
Une centrale électrique a été construite sur l'une des rives d'une rivière de 1 km de largeur. Sur l'autre rive, 20 km en amont, il y a une usine. Au-dessus du sol, chaque mètre de ligne électrique coûte 9 francs. Sous l'eau, le prix est de 15 francs par mètre. On veut alimenter l'usine en électricité à partir de la centrale. Pour minimiser les coûts, quel trajet devrait emprunter la ligne électrique ?

Problème 2.5

On désire fabriquer une tente en forme de pyramide régulière de base carrée. On dispose de 6 m^2 de toile pour fabriquer les quatre faces. Quelle doit être la hauteur de la tente pour que son volume soit maximal ?

Problème 2.6

On dispose d'une feuille cartonnée carrée dont la diagonale mesure 20 cm . On veut fabriquer une pyramide à base carrée en découpant les parties grisées puis en repliant les quatre triangles isocèles comme le montrent les trois figures ci-dessous.



1. Établir que le volume V de la pyramide en fonction de x est donnée par :

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{100 - 10x}$$

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide est maximal.

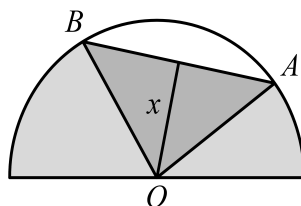
Problème 2.7

Parmi tous les triangles isocèles d'aire donnée, quel est celui qui a un périmètre minimal ?

Problème 2.8

Un artisan verrier réalise un vitrail en forme de demi-disque de rayon 2 m . Ce vitrail est composé de quatre parties dont l'une est un triangle ABO inscrit dans un demi-disque de centre O (voir la figure ci-dessous).

1. Exprimer l'aire $S(x)$ du triangle ABO en fonction de la hauteur x issue du sommet O du triangle.
2. Quelle valeur doit avoir la hauteur x pour que l'aire du triangle soit maximale ?
3. Calculer cette aire maximale.

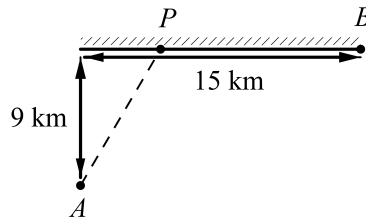


Problème 2.9

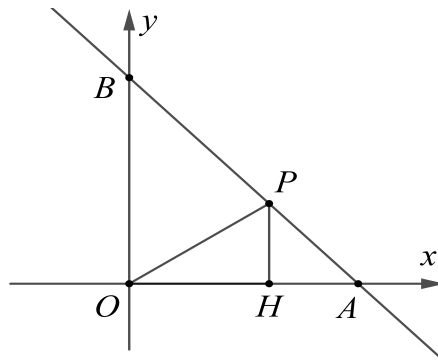
Quel est le point de la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x+2}$ qui est le plus proche de $P(5;0)$? En déduire la distance du point P à la courbe Γ .

Problème 2.10

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse constante de 4 km/h et à pied à la vitesse constante de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal? La côte est supposée rectiligne.

**Problème 2.11**

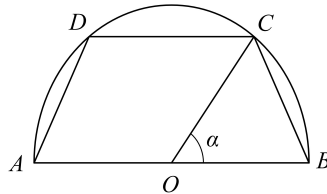
La droite d'équation $y = 7 - x$ coupe l'axe Ox en A et l'axe Oy en B . Le point $P(x; y)$ se déplace sur cette droite entre A et B (A et B non compris). Calculer les coordonnées du point P pour que le périmètre du triangle rectangle OPH soit minimal. (Voir la figure ci-dessous.)



3 Problèmes faisant intervenir des fonctions trigonométriques

Problème 3.1

Un trapèze $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de rayon OA valant 3 cm.



1. Montrer que l'aire S du trapèze $ABCD$ est donnée par la formule :

$$S(\alpha) = 9 \sin(\alpha) + 9 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

2. Étudier la croissance de la fonction $S(\alpha)$ et préciser la valeur de α pour laquelle l'aire du trapèze $ABCD$ est maximale.

Problème 3.2

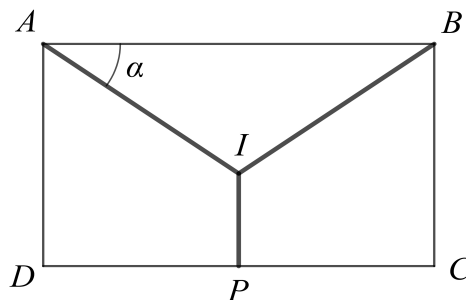
On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir. On donne ci-dessus le plan de la façade. La distance de A à B mesure 10 m et celle de B à C mesure 5 m. Les trois tuyaux sont représentés par les segments AI , BI et IP . Le point P est le milieu du côté CD .

1. Montrer que la longueur l des trois tuyaux est donnée par la formule :

$$l(\alpha) = \frac{10}{\cos(\alpha)} - 5 \tan(\alpha) + k,$$

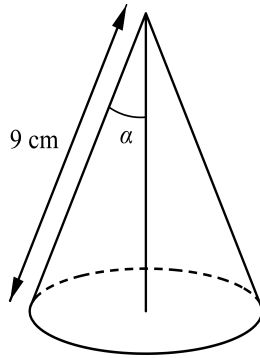
où k est une constante que l'on déterminera.

2. Pour quelle valeur de α la longueur des trois tuyaux est-elle minimale ? Justifier.



Problème 3.3

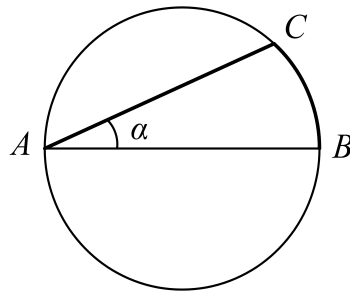
On considère le cône de révolution ci-dessous. Pour quelles valeurs de α le volume de ce cône est-il maximal ? Justifier.



Problème 3.4

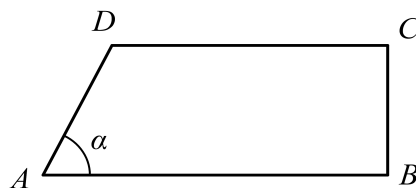
Luc part du point situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point diamétralement opposé. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h. L'angle est mesuré en radians. (Voir la figure ci-dessous.)

1. Vérifier que la longueur de l'arc $\widehat{BC}$ mesure 4α km.
2. Selon quel angle α Luc doit-il orienter sa barque pour que la durée de son trajet soit
 - (a) minimale ?
 - (b) maximale ?



Problème 3.5

Considérons le trapèze rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous. Le côté AD mesure 2 cm et la petite base CD mesure 4 cm. Déterminer la valeur de l'angle aigu α qui maximise l'aire du trapèze.



Problème 3.6

Une source lumineuse S est suspendue au-dessus du centre O d'une table circulaire de rayon r . L'intensité I de l'éclairement en un point P du bord de la table est donnée par la formule :

$$I = \frac{k \sin(\alpha)}{d^2}$$

où

k est un facteur de proportionnalité,

α désigne l'angle SPO ,

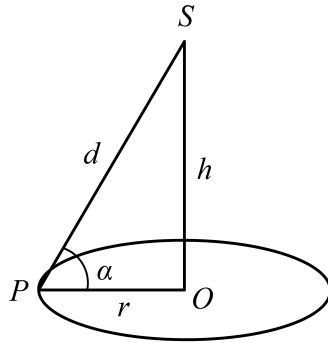
d désigne la distance SP ,

h désigne la distance SO .

1. Établir la formule :

$$I(\alpha) = \frac{k \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{r^2}$$

2. Pour quel(s) angle(s) α l'intensité $I(\alpha)$ est-elle maximale ?



Problème 3.7

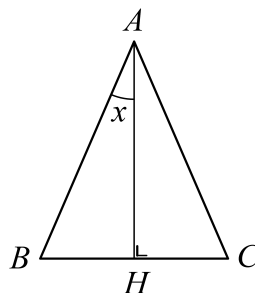
On considère un triangle ABC isocèle en A . On appelle x la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAH}$, où $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et où H est le pied de la hauteur issue du sommet A .

On sait de plus que le périmètre de ce triangle vaut 2.

1. Montrer que la surface du triangle ABC est donnée par la formule :

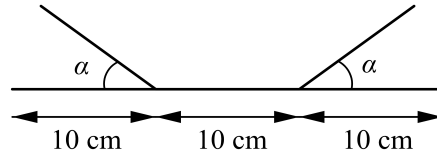
$$f(x) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

2. Déterminer x de sorte que l'aire du triangle ABC soit maximale. Justifier.



Problème 3.8

Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



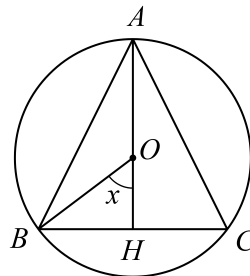
Problème 3.9

On considère un cercle de centre O et de rayon 2 dans lequel on a inscrit un triangle ABC isocèle en A . Le point H est le pied de la hauteur issue du sommet A . Soit x la mesure en radians de l'angle $\widehat{HOB}$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que l'aire du triangle ABC est donnée par la formule :

$$f(x) = 4 \sin(x)(1 + \cos(x))$$

2. Étudier la croissance de la fonction f et préciser la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.
3. Montrer que le triangle ABC d'aire maximale est équilatéral.



Problème 3.10

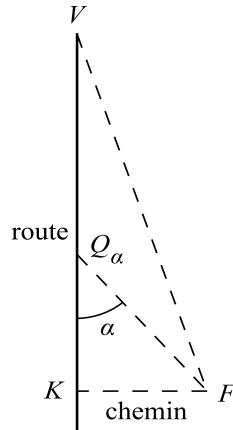
Soit d la demi-droite d'origine O située dans le premier quadrant et qui fait avec l'axe des x un angle aigu α . Par le point $I(1; 0)$ on mène la perpendiculaire à d ; elle coupe celle-ci en un point A . Par le point A on mène la perpendiculaire à l'axe des y ; elle coupe ce dernier en un point B . Calculer la valeur α pour laquelle la longueur du chemin IAB est maximale. Que vaut cette longueur maximale ?

Problème 3.11

Un cercle de rayon r est inscrit dans un triangle isocèle de surface minimale. Déterminer, en fonction de r , les dimensions de ce triangle.

Problème 3.12

Sur la figure, V représente un village et F une ferme isolée. La ferme est le long d'un chemin qui rejoint perpendiculairement une route rectiligne en K et elle est située à 1 km de cette route. Le village se trouve à 3 km de K . On veut relier par une ligne téléphonique le village et la ferme. Pour des raisons pratiques, il est deux fois moins cher de tirer une ligne le long de la route que sur le chemin ou à travers champ. La pose d'un kilomètre de ligne le long de la route coûte p francs.



Problème 3.13

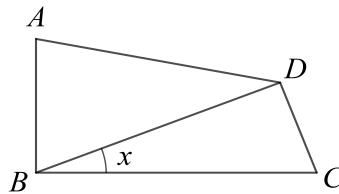
On considère un quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. Les côtés AB et BC sont perpendiculaires. De plus, la diagonale BD est perpendiculaire au côté CD .

Soit x la mesure en radians de l'angle $\widehat{CBD}$, avec $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

1. Établir que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est donnée par l'expression

$$S(x) = \sin(2x) + \cos^2(x)$$

2. Déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximale. Justifier.



Problème 3.14

On cherche sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ une approximation de la fonction sinus par la fonction linéaire

$$f_m : x \mapsto mx, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Dans ce but, calculer :

$$F(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - mx)^2 dx$$

et déterminer la valeur de m pour laquelle $F(m)$ est minimale.

Problème 3.15

Un couloir de largeur a est prolongé à angle droit par un couloir de largeur b . Quelle est la longueur de la plus longue barre (non flexible et d'épaisseur négligeable) qui puisse être transportée horizontalement d'un couloir à l'autre ?

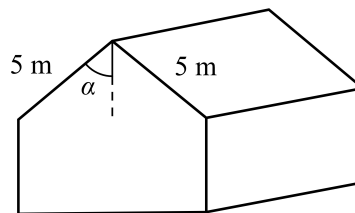
Problème 3.16

Une entreprise désire construire un nouvel entrepôt de 10 m de long. Afin d'en limiter les coûts, les responsables du projet ont pu récupérer certaines parties d'une ancienne bâtisse. Ainsi, cet entrepôt aura des parois verticales de 2,5 m, et les pans de son toit seront de 5 m comme on le voit sur la figure ci-dessous.

1. Montrer que le volume de l'entrepôt en fonction de l'angle α défini par la figure est donné par la fonction :

$$V(\alpha) = 250(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\alpha))$$

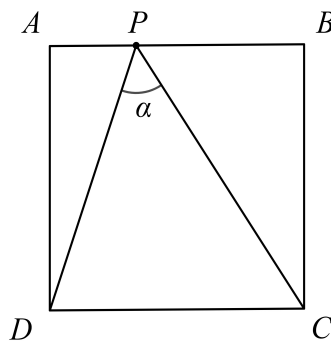
2. Déterminer l'angle α pour lequel le volume de l'entrepôt est maximal.
3. Calculer alors la hauteur et la largeur de l'entrepôt.



Problème 3.17

On considère un carré $ABCD$ de côté 1. Un point P se trouve sur le côté AB . À quelle distance de A se trouve le point P si

1. l'angle α est minimal ?
2. l'angle α est maximal ?



4 Problèmes faisant intervenir des fonctions exponentielles et logarithmiques

Problème 4.1

Une population de bactéries est introduite dans un milieu de culture. Elle va augmenter au cours du temps t . Notons-la $P(t)$; le temps t ($t \geq 0$) est mesuré en heures et $P(t)$ est mesurée en millions de bactéries. La fonction

$$v(t) = 14000 \cdot \frac{e^{1,4t}}{(99 + e^{1,4t})^2}$$

exprime la vitesse d'accroissement instantanée de cette population mesurée en millions de bactéries par heure. À quel instant cette vitesse est-elle maximale? Que vaut cette vitesse? Justifier.

Problème 4.2

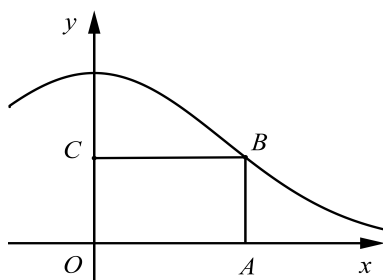
Quel est le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{\ln(x)}$ qui est le plus proche de $P\left(\frac{9}{4}; 0\right)$?

Problème 4.3

Sur la figure ci-dessous, $OABC$ est un rectangle pour lequel le sommet B (d'abscisse positive) est situé sur le graphe de la fonction

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Calculer les coordonnées de B sachant que le rectangle est d'aire maximale.



Problème 4.4

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = e^{x^2 - x^3}$$

Soit A un point du graphe de f , d'abscisse strictement positive. Soit B le point de l'axe Ox tel que le triangle OAB soit isocèle en A . Déterminer les coordonnées de A tel que la surface du triangle OAB soit maximale.

Problème 4.5

Le service de santé publique constate qu'un virus se propage de façon inquiétante parmi la population. La fonction $P(t)$ ci-dessous exprime le nombre de personnes atteintes en fonction du temps t :

$$P(t) = 80 + 40t^2e^{-0,4t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis la découverte de l'épidémie.

Quel sera le nombre maximal de personnes atteintes ? Justifier.

Problème 4.6

La capacité pulmonaire d'une personne d'âge x (en années) est donnée par la formule

$$C(x) = \frac{k(\ln(x) - 2)}{x},$$

où k est une constante réelle strictement positive dépendant de la morphologie de la personne. À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ?

Problème 4.7

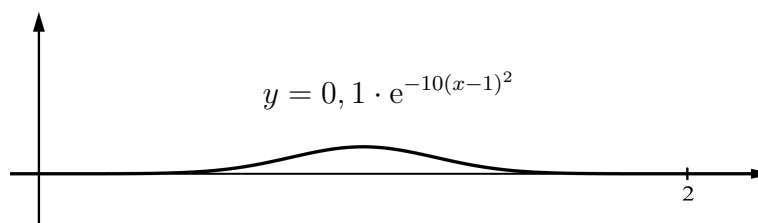
On donne la fonction $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{e^x}$.

On considère l'aire de la région comprise entre le graphe de f , l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = a + 1$. ($a \in \mathbb{R}$)

Déterminer a afin que cette aire soit minimale.

Problème 4.8

Votre société souhaite acheter une nouvelle machine produisant des gendarmes couchés auprès de la société « Fu-Du Vo-Lang ». En tant que titulaire d'une maturité, votre directeur vous demande de vérifier que ces ralentisseurs seront conformes aux normes en vigueur. Malheureusement, la notice est en mandarin. La seule information compréhensible est le graphe du profil des gendarmes couchés :



De plus, à l'aide d'un dictionnaire, vous parvenez à déterminer que x varie entre 0 et 2 mètres.

Une note du service des automobiles vous apprend que la hauteur d'un gendarme couché doit être comprise entre 5 et 15 centimètres afin d'être efficace tout en évitant d'arracher les pots d'échappement. De plus, pour éviter les pertes d'adhérence par temps de pluie, la pente maximale du ralentisseur doit être inférieure à 25%.

Qu'allez-vous conseiller à votre employeur ? Doit-il acheter cette machine trois fois moins chère que les équivalentes d'autres marques ou est-ce une dépense inutile ? Il vous faudra être convaincant : vous devrez exposer vos conclusions devant le conseil d'administration. Préparez votre justification. De votre réponse dépend l'avenir de votre entreprise et cette promotion que vous désirez tant.

Problème 4.9

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = x^{(x^{-1})}$$

Déterminer la limite à droite de f en zéro, la limite de f quand x tend vers l'infini et la dérivée de f . Donner le tableau de variation de f .

Déduire des résultats précédents le plus grand élément de l'ensemble

$$E = \left\{ n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Problème 4.10

Soit n un entier strictement positif et p_n la probabilité d'obtenir exactement un double 6 en lançant n fois deux dés.

1. Montrer que p_n est inférieure à 40% pour tout entier n strictement positif.
2. Pour quel(s) entier(s) n la probabilité p_n est-elle maximale? Justifier.