

RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LES ÉTUDES DE FONCTIONS

FONCTIONS RÉELLES À UNE VARIABLE



Vincent Genilloud

Mars 2025

Sommaire

1	Fonctions rationnelles	2
2	Fonctions irrationnelles	7
3	Fonctions trigonométriques	9
4	Fonctions exponentielles et logarithmiques	12

1 Fonctions rationnelles

Problème 1.1

Étudier la fonction f donnée par

$$f(x) = x^3 + x + 2$$

On demande :

1. l'ensemble de définition, les zéros et le signe ;
2. la croissance de f et la valeur des éventuels extremums ;
3. le tracé du graphe.

Problème 1.2

Même consigne que dans le problème précédent pour la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$.

Problème 1.3

On considère la famille de fonctions f_m définies par

$$f_m(x) = x^3 - mx^2 + mx - 1 \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe deux points A et B communs à tous les graphes des fonctions f_m .
2. On choisit $m = -1$. Établir les variations de f_{-1} et tracer son graphe. Montrer que le point d'inflexion I de f_{-1} est le centre de symétrie de ce graphe.
3. Étudier le sens de variation de f_m . Discuter selon les valeurs de m .
4. Calculer les coordonnées du point d'inflexion I_m de f_m en fonction de m . Établir l'équation du lieu géométrique des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
5. Soit γ la courbe d'équation $y = x^2 - 1$. Donner le nombre de points d'intersection de γ et du graphe de f_m selon les valeurs de m . Déterminer les valeurs de m pour lesquelles γ et le graphe de f_m sont tangents.

Problème 1.4

Étudier la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

On demande :

1. l'ensemble de définition, les zéros et le signe ;
2. les asymptotes (la position relative n'est pas demandée) ;
3. la variation et les extremums de f ;
4. de tracer le graphe de f après avoir montré que la fonction f est impaire.

Problème 1.5

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{2x - 5}$$

où a et b sont deux nombres réels.

1. Pour quelles valeurs de a et b , le graphe de f admet-il au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x$?
2. Dans cette partie du problème, on choisit $a = 2$ et $b = -4$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .
 - (b) Déterminer le type et l'équation des éventuelles asymptotes.
 - (c) Établir le tableau de variation de f .
 - (d) Esquisser le graphe de f ainsi que les éventuelles asymptotes.

Problème 1.6

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3x - 12}{(x - 2)^2} + 3$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. Trouver les coordonnées des éventuels points d'intersection des asymptotes avec le graphe de f .
3. Établir le tableau de variation de f .
4. Esquisser le graphe de f (et les asymptotes).
5. Prouver que la droite d'équation $y = -\frac{9}{4}x$ est tangente au graphe de f .

Problème 1.7

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{(1 - 2x)^2}{4x^2 + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. L'étude de la position relative est demandée. Étudier la croissance de f .
3. Tracer le graphe de f .

Problème 1.8

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(4 - x)(x - 9)}{3x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .

2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. La position relative est demandée.
3. Établir le tableau de variation de f .
4. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 4$.
5. Esquisser le graphe de f (avec les asymptotes et la tangente de la question précédente).

Problème 1.9

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = 4 + \frac{5x^2}{x^2 - 4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .
2. Déterminer le type et l'équation des asymptotes. La position relative est demandée.
3. Établir le tableau de variation de f .
4. Esquisser le graphe de f (avec les asymptotes).
5. La fonction f est-elle paire, impaire ? Donner une preuve de votre affirmation.

Problème 1.10

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{(2x - 5)^2}{x^2 - 2x - 8}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction f .
3. Prouver que la fonction f n'est ni paire ni impaire.
4. Trouver les équations des asymptotes. L'étude de position est demandée.
5. Étudier la croissance de f . On précisera les éventuels extremums.
6. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 0$.
7. Tracer le graphe de f et la tangente trouvée précédemment.

Problème 1.11

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction f .
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
4. Étudier la croissance de f . On précisera la valeur des éventuels extremums.
5. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = -2$.

6. Tracer le graphe de f et les droites obtenues précédemment dans un même repère orthonormé.

Problème 1.12

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 6}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Déterminer les zéros et le signe de la fonction f .
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes.
4. Étudier la croissance de f . On précisera la valeur des éventuels extremums.
5. Tracer le graphe de f .
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = -2$. Représenter cette tangente sur la figure réalisée au point précédent.

Problème 1.13

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{5}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Déterminer les asymptotes de f .
3. Étudier la croissance de f et calculer ses extremums.
4. Esquisser le graphe de f .
5. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

Problème 1.14

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = x + 4 + \frac{12x - 16}{(x-2)^2}$$

1. Étudier la fonction f .
On demande :
 - (a) l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f ;
 - (b) les asymptotes de f ;
 - (c) les coordonnées des points d'intersection du graphe de f avec ses asymptotes ;
 - (d) l'étude de la croissance de f et les extremums ;
 - (e) le tracé du graphe de la fonction f .
2. Montrer que $\frac{12x-16}{(x-2)^2} = \frac{12}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$.

3. Calculer l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, l'asymptote oblique de f et le graphe de la fonction f .

Problème 1.15

On considère la famille de fonctions f_m définies par

$$f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Dans cette partie du problème, on choisit $m = 4$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
 - (b) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
 - (c) Étudier la croissance de f et les extremums.
 - (d) Montrer que le graphe de f admet un axe de symétrie.
 - (e) Tracer le graphe de f .
2. Quelles sont les valeurs de m telles que
 - (a) f n'admet ni maximum, ni minimum ;
 - (b) f a un maximum et un minimum ;
 - (c) f possède un seul extremum ?
3. Qu'y a-t-il de particulier pour $m = 1$ et $m = 3$? (Sans étudier f .)

Problème 1.16

Étudier, en fonction des deux paramètres réels a et b , la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} + ax + bx^3 \end{aligned}$$

2 Fonctions irrationnelles

Problème 2.1

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x)$. Donner une interprétation géométrique de ces deux limites.
4. Étudier la croissance de f .
5. Montrer que la distance de tout point du graphe de f à l'origine du repère est une constante que l'on déterminera.
6. Tracer le graphe de f .

Problème 2.2

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
4. Étudier la croissance de f .
5. Tracer le graphe de f .

Problème 2.3

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de f .
4. Tracer le graphe de f .

Problème 2.4

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Montrer que f est impaire.

3. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
4. Étudier la croissance de f .
5. Étudier la concavité de la fonction f . Préciser les coordonnées des points d'inflexion.
6. Tracer le graphe de f .

Problème 2.5

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{4x - 1} - \sqrt{2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Montrer que f est une fonction strictement croissante qui ne possède pas d'asymptote.
3. Tracer le graphe de f .

Problème 2.6

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 6} - 2x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
3. Étudier la croissance de f .
4. Tracer le graphe de f et ses éventuelles asymptotes.

Problème 2.7

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 5x + 6|}}{x + 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble de définition de la fonction dérivée.
4. Étudier la croissance de f .
5. Tracer le graphe de f .

3 Fonctions trigonométriques

Problème 3.1

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sqrt{3} \sin(x) - \cos(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
2. Montrer que f est périodique. Sans justifier, donner la période de f .
3. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
4. Étudier la concavité de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
5. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$.

Problème 3.2

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = 4 \sin^2(x) + 8 \cos(x) - 7$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
2. Montrer que f est périodique. Sans justifier, donner la période de f .
3. Montrer que f est paire.
4. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Étudier la concavité de f dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
6. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

Problème 3.3

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
2. Montrer que cette fonction possède une infinité d'asymptotes verticales. Préciser leur équation.
3. Étudier la croissance et la concavité de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
4. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Problème 3.4

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \tan^2(x) + \tan(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
2. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes.

3. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Problème 3.5

On considère la fonction f définie par

$$\begin{array}{ccc} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \sin^2(x) + 2\cos(x) \end{array}$$

1. Étudier la croissance de cette fonction.
2. Établir l'égalité : $f''(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$.
3. Étudier la concavité de f et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de cette fonction.
4. Tracer le graphe de la fonction f .

Problème 3.6

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x - \sin(x)$$

1. Montrer que f possède un unique zéro.
2. Montrer que la fonction f possède une infinité de points d'inflexion qui sont tous situés sur une même droite. Donner une équation de cette droite.
3. Tracer le graphe de f .

Problème 3.7

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1$$

1. Étudier la croissance de cette fonction dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
2. En déduire les zéros et le signe de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer le graphe de la fonction f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
4. Étudier la concavité de f dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Problème 3.8

Étudier en fonction du paramètre réel a la fonction réelle définie par

$$f(x) = \cos^2(x) - 2a\cos(x) - 1$$

Problème 3.9

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \cos^4(x) + \sin^4(x)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire et périodique. Sans justifier, donner la période de f .
3. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Étudier la concavité de f dans l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Problème 3.10

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = 2m\sqrt{3}\sin(x) + (m+1)\cos(x) - 1 \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Dans cette partie du problème, on choisit $m = 1$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de f .
 - (b) Étudier la croissance et la concavité de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
 - (c) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
2. (a) Pour quelle valeur de m la fonction f_m admet-elle une tangente de pente 6 au point d'abscisse zéro ? Donner une équation de la tangente.
(b) Pour quelles valeurs de m la fonction f_m ne possède-t-elle aucun zéro ? Justifier.

4 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Problème 4.1

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = (x - 3)^2 e^x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de f .
4. Tracer le graphe de f .

Problème 4.2

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Montrer que la fonction f ne possède pas d'asymptote.
3. Étudier la croissance de f .
4. Étudier la concavité de f . Préciser les coordonnées des points d'inflexion.
5. Tracer le graphe de f .

Problème 4.3

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(e^{2x} + 5e^x + 4)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position est demandée.
3. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
4. Tracer le graphe de f .

Problème 4.4

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{-x} - 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f .
3. Étudier la croissance de f et calculer ses extremums.
4. Tracer le graphe de f .

Problème 4.5

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = (e^{-x} - 1)(e^x - 4)$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Étudier la croissance de f .
4. Calculer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $\ln(4)$.
5. Esquisser dans un même repère orthonormé le graphe de f ainsi que la tangente trouvée précédemment.

Problème 4.6

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^x - 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Trouver les équations des éventuelles asymptotes. L'étude de position n'est pas demandée.
3. Étudier la croissance de f .
4. Tracer le graphe de f .

Problème 4.7

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{7x^2 - x - 8}{x} \cdot e^{-x}$$

1. Donner l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f .
2. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de f .
3. Prouver que $f'(x) = \frac{-7x^3 + 8x^2 + 8x + 8}{x^2} \cdot e^{-x}$.
4. Établir que 2 est l'unique zéro de la dérivée de f .
5. Étudier la croissance de f et calculer ses extremums.
6. Esquisser le graphe de f .

Problème 4.8

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

1. Vérifier que f est paire. Démontrer que la droite d'équation $y = x - \ln(2)$ est une asymptote de f vers $+\infty$. Étudier la croissance de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.
2. Appelons g la dérivée de f . Montrer que

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Prouver que g est impaire, étudier sa croissance et tracer son graphe dans un nouveau repère orthonormé.

3. Montrer que g est une bijection de son ensemble de définition sur son ensemble des valeurs (que l'on précisera). Donner une expression fonctionnelle de g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère utilisé en 2.
4. Calculer l'aire $A(m)$ de la surface délimitée par le graphe de g^{-1} , l'axe des x , la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $y = m$ ($m > 0$). Calculer la limite de cette aire quand m tend vers l'infini.

Problème 4.9

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (x + m) \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$.
Étudier le comportement de f_m au voisinage de zéro en discutant s'il y a lieu selon les valeurs de m .
2. Calculer $f'_m(x)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_m(x)$.
3. Pour quelles valeurs de m la fonction f_m admet-elle
 - (a) aucun extremum ?
 - (b) deux extremums dont les abscisses sont de signe contraire ?
4. Soit $m = 2$. Étudier en détail la croissance de f_2 et tracer son graphe dans un repère orthonormé. On vérifiera en particulier que le graphe de f admet la droite d'équation $y = x + 3$ comme asymptote oblique double. On ne demande pas le point d'inflexion.

Problème 4.10

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

1. Prouver que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Étudier la croissance de f et tracer le graphe de f dans un repère orthonormé. Étudier soigneusement le comportement de f aux bornes de l'ensemble de définition. Les points d'inflexion ne sont pas demandés.

Problème 4.11

On considère la famille de fonctions

$$f_m(x) = \frac{mx + 3}{x + 1} e^x \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

Soit C_m la courbe représentative de f_m par rapport à un repère orthonormé.

1. On choisit $m = 2$. Étudier la croissance de f_2 et tracer son graphe dans un repère orthonormé. On ne demande pas le point d'inflexion.
2. Montrer qu'il existe un point A commun à toutes les courbes C_m dont on donnera les coordonnées.
3. Calculer $f'_m(x)$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m possède deux extremums.
4. Montrer que la droite déterminée par les points d'intersection de C_m avec les axes Ox et Oy est tangente à C_m .

Problème 4.12

On considère la fonction

$$f_\alpha(x) = \ln(x^2 - 2\sin(\alpha)x + 1)$$

où α est un paramètre réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_α et étudier sa croissance. Discuter selon les valeurs de α . Pour certaines valeurs de α , la fonction f_α possède un minimum auquel correspond le point M_α . On demande l'équation du lieu géométrique des points M_α lorsque α varie dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f_α possède deux zéros dont l'un est indépendant de α .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$.
4. Prouver que le graphe de f_α possède la droite d'équation $x = \sin(\alpha)$ comme axe de symétrie.
5. Étudier $f_{\frac{\pi}{2}}$ et $f_{\frac{\pi}{6}}$. Représenter ces deux fonctions dans un même repère orthonormé. Par quelle transformation peut-on obtenir les représentations graphiques de $f_{\frac{7\pi}{6}}$ et $f_{\frac{13\pi}{6}}$ à partir de celle de $f_{\frac{\pi}{6}}$? (Ne pas tracer ces représentations graphiques.)

Problème 4.13

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot \exp\left(\frac{1}{x-2}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Étudier la croissance de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.
3. Déterminer l'aire du domaine compris entre le graphe de f , l'axe des x et les droites d'équations $x = 1 - e$ et $x = 0$.

Problème 4.14

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de cette fonction.
2. Montrer que f est une fonction périodique. Donner sa période. (Aucune justification n'est demandée.)
3. Montrer que f est impaire.
4. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. Préciser la nature et la valeur des éventuels extremums.
5. Étudier la concavité de f dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
6. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.
7. Déterminer l'aire du domaine compris entre le graphe de f , l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

Problème 4.15

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 3x} & \text{si } x < 0 \\ \sin(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité de f aux points 0 et 1. Les points d'inflexion ne sont pas demandés.
2. Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$G(x) = -\frac{1}{x} \left(\ln^2(x) + 2 \ln(x) + 2 \right)$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$.

Utiliser ce résultat pour calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la région délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$.

Problème 4.16

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de cette fonction.
2. Étudier la croissance de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ et représenter son graphe dans cet intervalle.
3. Établir l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
4. Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f , l'axe Ox , l'axe Oy et la droite d'équation $x = \pi$.

La fonction f de ce problème apparaît dans « *La moutarde me monte au nez* », film de Claude Zidi dont le professeur de mathématiques est Pierre Richard (1974). (Au fait, vous connaissez l'intégrale de Lemann?...)