

Toute matrice carrée complexe est symétrisable

On va démontrer le théorème suivant :

Théorème

Soit n un entier strictement positif et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Il existe $S \in M_n(\mathbb{C})$ symétrique et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $PAP^{-1} = S$. Autrement dit, toute matrice carrée complexe est symétrisable.

Lemme 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme « exponentielle tronquée »

$$E_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

possède n zéros complexes deux à deux distincts.

Preuve

Vu le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme $E_n(X)$ possède n zéros complexes, distincts ou non. Comme $E_n(X) - E'_n(X) = \frac{X^n}{n!}$ et $E_n(0) \neq 0$, les zéros de $E_n(X)$ sont deux à deux distincts. $\square$

Lemme 2

Soit

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Le bloc de Jordan J_n (de paramètre 0 et de taille n) est semblable à une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve

Considérons le polynôme $E_n(X)$ du lemme 1 et notons $a_1, \dots, a_n$ ses n zéros (complexes) deux à deux distincts. Soit la matrice symétrique

$$S_n = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Montrons que cette matrice est semblable à J_n . Pour ce faire, il suffit de montrer, d'après le théorème de Jordan, que le spectre de S_n est réduit à $\{0\}$ et que $\dim(\ker(S_n)) = 1$.

Soit λ une valeur propre de S_n et $X = (x_1; \dots; x_n)^t$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$(\lambda - a_i)x_i = C \tag{1}$$

où l'on a posé $C = \sum_{j=1}^n x_j$.

On a $\lambda \neq a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\lambda = a_k$ pour un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors (1) entraînerait $C = 0$ et en utilisant le fait que les a_i sont deux à deux distincts, on aurait, pour tout $i \neq k$, $x_i = (\lambda - a_i)^{-1}C = 0$. Par conséquent, on aurait aussi $x_k = 0$ puisque $C = 0$, et par suite $X = 0$, ce qui n'est pas possible puisque X est un vecteur propre associé à λ .

Grâce à (1), on peut donc écrire pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$x_i = (\lambda - a_i)^{-1}C.$$

Et par suite, en sommant, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n x_i = C \sum_{i=1}^n (\lambda - a_i)^{-1}. \tag{2}$$

On a $C \neq 0$. Sinon (1) entraînerait $x_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puisque l'on sait que $\lambda \neq a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, vu la définition de C , l'égalité (2) donne :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - a_i} = 1. \tag{3}$$

Or

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - a_i} = \frac{E'_n(\lambda)}{E_n(\lambda)}.$$

D'où, grâce à l'égalité (3) :

$$E'_n(\lambda) - E_n(\lambda) = 0$$

ou encore

$$\frac{\lambda^n}{n!} = 0.$$

On a donc démontré que le spectre de S_n est $\{0\}$.

Alors (1) donne $x_i = -Ca_i^{-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui prouve que le noyau de S_n est engendré par $(a_1^{-1}; \dots; a_n^{-1})^t$ et que $\dim(\ker(S_n)) = 1$. Le lemme 2 est démontré. $\square$

Preuve du théorème

Par le théorème de Jordan, la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}$$

où $B_1, \dots, B_r$ sont des blocs de Jordan. Si B_i est un bloc de Jordan de taille m associé à la valeur propre μ de A , on a $B_i = \mu I_m + J_m$. Vu le lemme 2, la matrice J_m est semblable à une matrice symétrique : il existe une matrice symétrique $S_m \in M_m(\mathbb{C})$ et une matrice $P_i \in GL_m(\mathbb{C})$ telles que $S_m = P_i J_m P_i^{-1}$. Par conséquent, la matrice $P_i B_i P_i^{-1}$, qui est égale à $\mu I_m + S_m$, est symétrique. Il s'ensuit, en « symétrisant B par blocs », que B est symétrisable et donc A est aussi symétrisable. $\square$

Remarques

1. Le théorème est faux si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$. En effet, soit par exemple $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si A était $\mathbb{R}$ -semblable à une matrice symétrique, A serait diagonalisable puisque toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. Mais A n'est pas diagonalisable puisque cette matrice est nilpotente et non nulle.
2. On peut montrer que le théorème est encore vrai si l'on remplace $\mathbb{C}$ par tout corps $\mathbb{K}$ tel que $-1_{\mathbb{K}}$ est le carré d'un élément de $\mathbb{K}$.