

TROISIÈME DEGRÉ
SANS CARDAN ET SANS COMPLEXES !
RÉSOLUTION RÉELLE ET ALGÈBRIQUE



Le mathématicien français
François Viète (1540-1603)

Vincent Genilloud
Mai 2026

Le but de ce document est de résoudre algébriquement l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

sans utiliser la méthode de Cardan ni faire appel aux nombres complexes.

On suppose que a, b, c, d sont réels et que $a \neq 0$.

Comme nous l'avons montré dans le document « Équations du troisième degré », le changement de variable $z = x + \frac{b}{3a}$ permet de ramener toute équation cubique générale à une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$ et même, avec un choix plus judicieux de normalisation, à une équation du type

$$\boxed{x^3 - 3px + q = 0} \quad (2)$$

Remarques

1. Le remplacement de p par $-3p$ permet de simplifier légèrement les calculs.
2. Dans la suite de ce document, nous nous concentrerons exclusivement sur l'équation (2).

L'égalité (2) rappelle naturellement certaines identités trigonométriques et hyperboliques classiques, que nous regroupons sous forme de trois lemmes.

Lemme 1

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(3t) = 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t).$$

Lemme 2

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cosh(3t) = 4 \cosh^3(t) - 3 \cosh(t).$$

Lemme 3

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\sinh(3t) = 4 \sinh^3(t) + 3 \sinh(t).$$

PREUVE (du lemme 1)

On utilise l'identité $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ appliquée à $a = 2t$ et $b = t$, et on se rappelle que $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$ et que $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$. \square

PREUVE (des lemmes 2 et 3)

Par définition :

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Deux calculs directs suffisent pour conclure. \square

Maintenant revenons à l'égalité (2) en tentant une substitution naturelle, en commençant par appliquer le lemme 1.

Ce lemme peut s'écrire

$$\boxed{4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) - \cos(3t) = 0} \quad (3)$$

L'examen des égalités (2) et (3) suggère le changement de variable suivant :

$$x = m \cos(t) \quad (4)$$

où m et t sont deux nombres réels que l'on va déterminer si possible.

Si $m = 0$ alors $x = 0$ et dans ce cas l'équation (2) donne $q = 0$; alors la résolution de (2) est immédiate. Si $m < 0$, l'égalité (4) équivaut à $x = (-m) \cos(t + \pi)$. On supposera donc que $m > 0$.

De (2) et (4) l'on obtient

$$\boxed{m^3 \cos^3(t) - 3pm \cos(t) + q = 0} \quad (5)$$

En comparant les égalités (3) et (5), il est naturel d'imposer $\frac{m^3}{4} = \frac{-3pm}{-3}$.

D'où, après simplification,

$$\boxed{m^2 = 4p} \quad (6)$$

Si $p < 0$, l'équation (6) ne possède pas de solution réelle. Il faudra alors procéder autrement si l'on souhaite éviter d'introduire les nombres complexes, comme annoncé.

Supposons pour le moment que $p > 0$.

La solution positive de l'équation (6) est $2\sqrt{p}$. D'où, de l'équation (5) :

$$\boxed{4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) + \frac{q}{2p\sqrt{p}} = 0} \quad (7)$$

Alors, vu l'égalité (3) :

$$\cos(3t) = -\frac{q}{2p\sqrt{p}}. \quad (8)$$

Si $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| > 1$, l'équation (8) ne possède pas de solution réelle. Dans ce cas, comme précédemment, il faudra procéder autrement si l'on veut éviter d'introduire les nombres complexes.

Dans le cas contraire, l'équation (8) équivaut à

$$t = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2p\sqrt{p}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \quad (9)$$

pour $k \in \mathbb{Z}$. D'où, de (4), pour $p > 0$ et $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| \leq 1$:

$$\boxed{x = 2\sqrt{p} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2p\sqrt{p}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right)} \quad (10)$$

pour $k = 0, 1, 2$.

Remarques

1. Si $q = 0$, l'égalité (10) est encore valide.
2. L'égalité (10) fournit les trois solutions réelles de l'équation (2), qu'elles soient distinctes ou non. Plus précisément, un court raisonnement trigonométrique permet d'établir aisément les deux faits suivants :
 - Si $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| < 1$, les trois racines de (2) sont réelles et deux à deux distinctes.
 - Si $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| = 1$, l'équation (2) admet une racine double et une racine simple.
3. La méthode qui conduit à l'équation (10) est due au mathématicien français François Viète. Elle permet d'éviter le recours aux nombres complexes, en particulier lorsqu'on applique la méthode de Cardan pour résoudre des équations réelles du troisième degré.

Supposons toujours que $p > 0$, mais considérons cette fois le cas où $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| > 1$.

Examinons maintenant le lemme 2, qui fournit l'analogie hyperbolique nécessaire lorsque l'équation (2) ne possède qu'une seule racine réelle.

Ce lemme peut s'écrire

$$\boxed{4 \cosh^3(t) - 3 \cosh(t) - \cosh(3t) = 0} \quad (11)$$

L'examen des égalités (2) et (11) suggère le changement de variable suivant :

$$x = m \cosh(t) \quad (12)$$

où m et t sont deux nombres réels que l'on va déterminer si possible.

Lemme 4

Supposons que $p > 0$ et $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| > 1$.

- Si $q > 2p\sqrt{p}$, l'équation (2) possède une unique solution réelle qui est strictement négative.
- Si $q < -2p\sqrt{p}$, l'équation (2) possède une unique solution réelle qui est strictement positive.

Remarque

L'hypothèse $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| > 1$ du lemme 4 équivaut à $q^2 - 4p^3 > 0$.

PREUVE (du lemme 4)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = x^3 - 3px + q$. Sa dérivée est $f'(x) = 3(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})$.
Donc

- f est strictement croissante sur $] -\infty ; -\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p} ; +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $[-\sqrt{p} ; \sqrt{p}]$.

Notre hypothèse $\left| \frac{q}{2p\sqrt{p}} \right| > 1$ équivaut à $q > 2p\sqrt{p}$ ou $q < -2p\sqrt{p}$.

D'où :

- Si $q > 2p\sqrt{p}$ on a :
 $f(\sqrt{p}) = -2p\sqrt{p} + q > 0$. La croissance et la continuité de f montrent alors que l'équation (2) possède une unique solution réelle qui est strictement négative.
- Si $q < -2p\sqrt{p}$ on a :
 $f(-\sqrt{p}) = 2p\sqrt{p} + q < 0$. La croissance et la continuité de f montrent alors que l'équation (2) possède une unique solution réelle qui est strictement positive.

Le lemme 4 est démontré. \square

Supposons maintenant que $p > 0$ et $q > 2p\sqrt{p}$.

Vu le lemme 4, on sait que la solution réelle de (2) est strictement négative. Comme $\cosh(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il découle de l'égalité (12) que m est strictement négatif.

En procédant comme dans le cas $p > 0$ et $\left|\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right| \leq 1$, on obtient $m^2 = 4p$, donc $m = -2\sqrt{p}$ et aussi

$$\boxed{4 \cosh^3(t) - 3 \cosh(t) - \frac{q}{2p\sqrt{p}} = 0} \quad (13)$$

D'où, grâce à l'égalité (11) :

$$\cosh(3t) = \frac{q}{2p\sqrt{p}} > 1. \quad (14)$$

Et par suite

$$t = \pm \frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left(\frac{q}{2p\sqrt{p}} \right). \quad (15)$$

Comme la fonction \cosh est paire, la solution (négative) réelle de (2) peut s'écrire :

$$x = -2\sqrt{p} \cosh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left(\frac{q}{2p\sqrt{p}} \right) \right). \quad (16)$$

Écrivons plus simplement l'égalité (16).

Rappelons d'abord que pour tout $\xi > 1$ on a $\operatorname{arcosh}(\xi) = \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$.

Pour tout $\xi > 1$ on a :

$$\begin{aligned} \cosh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arcosh}(\xi) \right) &= \frac{e^{\frac{1}{3} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} + e^{-\frac{1}{3} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}}{2} \\ &= \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^{\frac{1}{3}} + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^{-\frac{1}{3}}}{2}. \end{aligned}$$

L'égalité (16) peut donc s'écrire

$$x = -\sqrt{p} \left(\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^3} - 1} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2p\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^3} - 1} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (17)$$

ou encore

$$\boxed{x = -\sqrt{p} \left(\left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{p}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{p}} \right)^{-\frac{1}{3}} \right)} \quad (18)$$

qui est la solution de (2) lorsque l'on suppose que $p > 0$ et $q > 2p\sqrt{p}$.

Supposons maintenant que $p > 0$ et $q < -2p\sqrt{p}$.

En raisonnant comme précédemment, on a $m = 2\sqrt{p}$ (voir le lemme 4) et

$$\cosh(3t) = -\frac{q}{2p\sqrt{p}} > 1. \quad (19)$$

En effectuant des calculs analogues, on obtient

$$x = \sqrt{p} \left(\left(-\frac{q}{2p\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^3} - 1} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2p\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^3} - 1} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (20)$$

ou encore

$$x = \sqrt{p} \left(\left(\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{p}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{p}} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (21)$$

qui est l'unique solution réelle (positive) de l'équation (2) lorsque l'on suppose que $p > 0$ et $q < -2p\sqrt{p}$.

Après tous ces calculs, il ne reste plus qu'à examiner le cas $p \leq 0$.

D'abord, si $p = 0$, il est immédiat que

$$x = -\sqrt[3]{q}$$

est l'unique solution réelle de (2).

Supposons donc, pour la suite, que $p < 0$.

On remarque d'abord que la fonction réelle $f(x) = x^3 - 3px + q$ est alors strictement croissante sur \mathbb{R} . On sait donc, avant même d'effectuer le moindre calcul, que l'équation (2) admet une unique solution réelle.

Sans surprise, nous allons faire appel au lemme 3, lequel peut également s'écrire

$$4 \sinh^3(t) + 3 \sinh(t) - \sinh(3t) = 0 \quad (22)$$

L'examen des égalités (2) et (22) suggère le changement de variable suivant :

$$x = m \sinh(t) \quad (23)$$

où m et t sont deux nombres réels que l'on va déterminer si possible. Le cas $m = 0$ a déjà été discuté plus haut. Si $m < 0$, l'égalité (23) équivaut à $x = (-m) \sinh(-t)$. On supposera donc à nouveau que $m > 0$.

De (2) et (23) l'on obtient

$$m^3 \sinh^3(t) - 3pm \sinh(t) + q = 0 \quad (24)$$

En comparant les égalités (22) et (24), il est naturel d'imposer $\frac{m^3}{4} = \frac{-3pm}{3}$.
D'où, après simplification,

$$\boxed{m^2 = -4p} \quad (25)$$

Et comme $p < 0$, la solution positive de (25) est $2\sqrt{-p}$. D'où, de l'équation (24) :

$$\boxed{4 \sinh^3(t) + 3 \sinh(t) - \frac{q}{2p\sqrt{-p}} = 0} \quad (26)$$

Alors, vu l'égalité (22) :

$$\sinh(3t) = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}. \quad (27)$$

Et par suite

$$t = \frac{1}{3} \operatorname{arsinh} \left(\frac{q}{2p\sqrt{-p}} \right). \quad (28)$$

Par conséquent

$$x = 2\sqrt{-p} \sinh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arsinh} \left(\frac{q}{2p\sqrt{-p}} \right) \right) \quad (29)$$

est la solution réelle de l'équation (2) lorsque $p < 0$.

Écrivons plus simplement l'égalité (29).

Rappelons d'abord que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{arsinh}(\xi) = \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \sinh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arsinh}(\xi) \right) &= \frac{e^{\frac{1}{3} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})} - e^{-\frac{1}{3} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})}}{2} \\ &= \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})^{\frac{1}{3}} - (\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})^{-\frac{1}{3}}}{2}. \end{aligned}$$

L'égalité (29) peut donc s'écrire

$$x = \sqrt{-p} \left(\left(\frac{q}{2p\sqrt{-p}} + \sqrt{-\frac{q^2}{4p^3} + 1} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{q}{2p\sqrt{-p}} + \sqrt{-\frac{q^2}{4p^3} + 1} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (30)$$

ou encore

$$\boxed{x = \sqrt{-p} \left(\left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{-p}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2p\sqrt{-p}} \right)^{-\frac{1}{3}} \right)} \quad (31)$$

qui est l'unique solution réelle de (2) lorsque $p < 0$.

Manifestement, tous les cas ont été examinés. Ainsi s'achève notre petite excursion à travers les mondes trigonométrique et hyperbolique...

Remarque

Les égalités (18), (21) et (31) peuvent en réalité se condenser en une seule formule. On peut certes l'obtenir au prix de calculs assez lourds, mais elle découle immédiatement de la méthode de Cardan. En appliquant cette méthode à l'équation $x^3 - 3px + q = 0$, et en supposant que $q^2 - 4p^3 > 0$, hypothèse effectivement vérifiée dans les situations menant aux égalités (18), (21) et (31), on obtient :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2}}. \quad (32)$$

Conclusion

L'utilisation du lemme 1 (méthode de Viète) s'est révélée, me semble-t-il, remarquablement efficace pour éviter l'introduction de nombres complexes, inévitables si l'on appliquait directement la méthode de Cardan dans ce cas. En revanche, le recours aux lemmes 2 et 3, indispensables dans notre approche lorsque l'équation (2) ne possède qu'une seule solution réelle, apparaît nettement plus lourd – voire plus complexe – que l'application directe de la méthode de Cardan, surtout à la lumière de la remarque précédente.