

Une fonction réelle continue partout, nulle part dérivable

On va construire une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable.

Définition

Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ on pose $\Lambda(x) = |x|$. On prolonge cette fonction par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$.

Proposition

La fonction Λ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve

La preuve est élémentaire. □

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x).$$

Proposition

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve

D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) \leq \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9} < +\infty.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut donc poser $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x)$. Montrons maintenant que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x)$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Vu les calculs effectués plus haut, il existe un entier N tel que, pour tout nombre réel x , $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - \varphi_N(x) + \varphi_N(x) - \varphi_N(a) + \varphi_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - \varphi_N(x)| + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| + |\varphi_N(a) - f(a)| \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n x) + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \Lambda(10^n a) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Or la fonction φ_N est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel x vérifiant $|x - a| \leq \delta$, l'on ait $|\varphi_N(x) - \varphi_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Par suite, pour tout nombre réel x vérifiant $|x - a| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, ce qui prouve que la fonction f est continue en a .

Comme a est quelconque, on a démontré que la fonction réelle f est continue partout. $\square$

On va maintenant démontrer que f est dérivable nulle part. Pour ce faire, commençons par énoncer et prouver le lemme suivant :

Lemme

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que, pour tout nombre naturel n non nul, $x_n \leq x < y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x).$$

Preuve

Comme la fonction f est supposée dérivable en x , la fonction f est différentiable en x .¹

1. Voir le complément sur la notion de dérivabilité (page 5).

On peut donc écrire

$$f(z) = f(x) + f'(x) \cdot (z - x) + (z - x) \cdot \rho(z - x)$$

avec $\lim_{z \rightarrow x} \rho(z - x) = 0$.

Alors on a

$$f(x_n) = f(x) + (x_n - x)(f'(x) + \rho(x_n - x))$$

et

$$f(y_n) = f(x) + (y_n - x)(f'(x) + \rho(y_n - x)).$$

Par suite, comme $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{f'(x)(y_n - x_n) + (y_n - x)\rho(y_n - x) - (x_n - x)\rho(x_n - x)}{y_n - x_n} \\ &= f'(x) + \frac{y_n - x}{y_n - x_n} \rho(y_n - x) - \frac{x_n - x}{y_n - x_n} \rho(x_n - x). \end{aligned}$$

Or $\left| \frac{y_n - x}{y_n - x_n} \right| < 1$ et $\left| \frac{x_n - x}{y_n - x_n} \right| < 1$, car par hypothèse $x_n \leq x < y_n$.

D'où finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x),$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(y_n - x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n - x) = 0$.

Le lemme est démontré. □

Théorème

La fonction f est nulle part dérivable.

Preuve

Soit $x \in [0; 1[$.

On considère une écriture décimale de x en écrivant $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } a_k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \\ -1 & \text{si } a_k \in \{5; 6; 7; 8; 9\} \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$x_n = 0, a_1 \dots a_n \quad \text{et} \quad y_n = x_n + 10^{-n}.$$

Distinguons deux cas :

- Si $a_{k+1} \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, alors

$$0 \leq 0, a_{k+1} \dots a_n \leq 0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k} \leq 0, 5.$$

On a donc

$$\frac{1}{10^k} \left(\Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k}) - \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n) \right) = \frac{10^{-n+k}}{10^k} = \frac{\delta_{k+1}}{10^n}.$$

- Si $a_{k+1} \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$, alors

$$0, 5 \leq 0, a_{k+1} \dots a_n \leq 0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k} \leq 1.$$

On a donc

$$\frac{1}{10^k} \left(\Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n + 10^{-n+k}) - \Lambda(0, a_{k+1} \dots a_n) \right) = \frac{-10^{-n+k}}{10^k} = \frac{\delta_{k+1}}{10^n}.$$

Ceci prouve que, pour tout $n \geq 1$,

$$f(y_n) - f(x_n) = \frac{1}{10^n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} = (y_n - x_n) \sum_{k=1}^n \delta_k.$$

On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=1}^n \delta_k.$$

Or, si l'on pose $u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$, on a $|u_{n+1} - u_n| = |\delta_{n+1}| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui démontre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente. Le lemme permet donc d'affirmer que la fonction f n'est pas dérivable en x .

Enfin, comme f est de période 1, on a aussi prouvé que f est dérivable nulle part. $\square$

Complément sur la notion de dérivabilité

Définition

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in]a; b[$. On dit que f est différentiable en x s'il existe un nombre réel l et une fonction ρ vérifiant, pour tout h suffisamment proche de zéro,

$$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$.

Théorème

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in]a; b[$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable en x ;
2. f est différentiable en x .

De plus, si la fonction f est différentiable en x , le nombre l de la définition ci-dessus est égal à $f'(x)$.

Preuve

Pour commencer, supposons f dérivable en x .

Pour tout $h \neq 0$ suffisamment proche de zéro, on a

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \cdot h.$$

Comme f est supposée dérivable en x , on a, posant

$$l = f'(x) \quad \text{et} \quad \rho(h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x),$$

$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$. La fonction f est différentiable en x .

Pour terminer, supposons f différentiable en x .

Par définition, il existe un nombre réel l et une fonction ρ vérifiant

$$f(x + h) = f(x) + l \cdot h + h \cdot \rho(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$.

D'où, pour tout $h \neq 0$ suffisamment proche de zéro,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l + \rho(h).$$

Comme par hypothèse $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l$, ce qui démontre que f est dérivable en x et que $l = f'(x)$. $\square$

Remarque

Si l'on pose $z = x + h$ dans la définition d'une fonction différentiable, on obtient : une fonction f est différentiable en x s'il existe un nombre réel l et une fonction ρ vérifiant, pour tout z suffisamment proche de x ,

$$f(z) = f(x) + l \cdot (z - x) + (z - x) \cdot \rho(z - x),$$

avec $\lim_{z \rightarrow x} \rho(z - x) = 0$.