Questions d'oraux de mathématiques de concours d'entrée à de grandes écoles françaises

Partie I

Analyse
Topologie

1328 exercices

Laurent Schwartz (1915-2002)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 5 juin 2026

Table des matières

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)
X (École Polytechnique (Paris))
Centrale
Centrale-Supélec
Mines
Mines-Ponts
Mines-Télécom
ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)
EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)
ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)
ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)
ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)
CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté !

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$[\![a\,,b]\!]$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leqslant k \leqslant b$ (a, b entiers)
$\operatorname{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \dots, a_n$
$\operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\operatorname{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$\lvert E\rvert$	cardinal de l'ensemble E
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\operatorname{sgn}(x)$	signe de x
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\deg(P)$	degré du polynôme P
$\mathbb{K}[X, Y]$	ensemble des polynômes en X et Y, à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$a \equiv b \mod n$	a et b congrus modulo n
$\overline{x}$	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo p (p premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\mathrm{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A
$\mathrm{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $[\![1\,,n]\!]$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\mathrm{Ker}(u)$	noyau de u
$\mathrm{Im}(u)$	image de u
$\mathrm{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$\|A\|$	déterminant de la matrice A
$\mathrm{com}(A)$	comatrice de A
$C(A)$	commutant de A
$\mathrm{Tr}(u)$	trace de u
$\mathrm{Sp}(u)$	spectre de u
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de u sur $\mathbb{K}$
$\mathrm{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$\mathrm{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S sur A
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$-vectoriel E
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E,F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m\times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$

$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^*$
$f^\star$	adjoint de f
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\lVert\lvert A \rvert\rVert$	norme subordonnée (à la norme $\lVert\cdot\rVert$) de A
$\langle x, y\rangle$	produit scalaire de x et y
$x \wedge y$	produit vectoriel de x et y ($x, y \in \mathbb{R}^3$)
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \to \{-1; 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E
ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\lVert\cdot\rVert_p$
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norme infinie
$\lVert\cdot\rVert_p$	p-norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R
$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p-adique de n ($p \in \mathcal{P}$)
$\lvert\cdot\rvert_p$	valeur absolue p-adique
$\lvert x - y\rvert_p$	distance p-adique entre x et y
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance p-adique
F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f\|_A$	restriction de la fonction f à A ($A \subset E$)
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E, à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F
$L^1(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles Lebesgue-intégrables sur E
$L^2(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles de carré Lebesgue-intégrable sur E
$L^\infty(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles bornées et Lebesgue-mesurables sur E
$\cosh$	cosinus hyperbolique
$\sinh$	sinus hyperbolique

tanh	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\mathring{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\operatorname{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\operatorname{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$\operatorname{dist}(A; B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E
$\mathbb{P}(E \mid F)$	probabilité conditionnelle de E sachant F
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$

1 Suites et séries

I.1.1 **Centrale**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Trouver un développement asymptotique à trois termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire des nombres réels α,β,γ tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

I.1.2 **X-ENS MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers vérifiant $a_1 \geqslant 1$.
Étudier la nature de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(a_1, \ldots, a_n)}.$$

I.1.3 **Mines-Ponts MP 2022**

Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

I.1.4 **Mines**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $0 < u_0 < 1$.
Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : on pourra considérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{u_n}$.

I.1.5 **Mines-Ponts**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

I.1.6 **ENS**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.1.7 **X-ENS**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n)$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

I.1.8 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$, $u_{m+n}\leqslant u_m+u_n$.
Montrer que si la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée, elle converge.

I.1.9 **X ESPCI 2013**

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}2^{-n^2}$ converge.
2. Soit $S=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}2^{-n^2}$. Montrer que le nombre S est irrationnel.

I.1.10 **X ESPCI 2022**

Pour tout nombre réel x, on note $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$.
Trouver un équivalent de $\{n!\,\mathrm{e}\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

I.1.11 **Mines-Télécom**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

I.1.12 **Mines-Ponts PC 2019**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $w_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w_n$ converge et calculer sa limite.

I.1.13 **CCINP PC 2002**

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$ est-elle convergente ? Le cas échéant, calculer sa limite.

I.1.14 **Mines**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\sqrt{k(n-k)}\right)$.

I.1.15 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de termes positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ converge.
Trouver la nature de la série $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$.

I.1.16 **X PSI**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{2n^2+4n+2}{3^n}$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge et calculer sa limite.

I.1.17 **Mines-Ponts MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I.1.18 **X-ENS MP**

Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n} \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

I.1.19 **CCINP/Mines-Télécom MP**

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.1.20 **X-ENS**

Soit $u_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
Donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.21 **Mines-Ponts MP**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la série $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{\sqrt{n^2+1}}$.
Donner un équivalent simple de $F(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.

I.1.22 **Mines-Ponts PC 2018**

1. Montrer que si $a, b > 0$, alors

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

2. Calculer :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

I.1.23 **Mines-Télécom MP 2024**

Donner la nature des séries de terme général u_n avec :

1. $u_n = n^a\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. $u_n = \sqrt[n^2]{n} - 1$.

I.1.24 **Mines-Ponts PC 2015**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ grâce à la règle suivante :

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}, \dots$$

$$u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que u_n est négligeable devant n.
5. Donner un équivalent simple de u_n.

I.1.25 **Mines-Télécom PSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

I.1.26 **X-ENS MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right).$$

1. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, trouver un équivalent de $a_n - \ell$.

I.1.27 **Centrale 2010**

Soit $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent.

I.1.28 **ENS Ulm Lyon PC 2022**

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Montrer que la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.

I.1.29 **Mines-Ponts PSI**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln\left(x^2 - 2\cosh(\alpha)x + 1\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.
2. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de zéro.

I.1.30 **X PC 2008**

Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = n + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}.$$

I.1.31 **Mines-Ponts PSI 2019**

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$$

selon les valeurs de a et b.

I.1.32 **CCINP**

Montrer que la série de terme général

$$a_n = \frac{n^3 + 2n^2 + n + 1}{n!}$$

est convergente et calculer sa somme.

I.1.33 **Centrale**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0\,;1[$ tel que $P_n'(\alpha_n) = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1;\dots;n\}$, exprimer $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$ sous forme de somme.
3. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Trouver un équivalent de α_n.

I.1.34 **Centrale PC 2015**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de n. Étudier la convergence, puis la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

I.1.35 **Centrale PC 2023**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Soit encore $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence de J et calculer cette intégrale.

   On pourra utiliser l'égalité : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} \ell + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α et β sont deux nombres réels.

I.1.36 **Mines-Ponts PC 2013**

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \ ?$$

I.1.37 **X MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left\{(1+\sqrt{2})^{2n}\right\}$.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

I.1.38 **Centrale PC 2004**

Soit $a > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(a^{2^k}+1\right)}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ selon les valeurs de a et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

I.1.39 **CCINP PSI 2013**

On considère la série de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$

3. Calculer la somme de la série.

I.1.40 **Mines-Ponts PSI 2019**

On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Trouver D_f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. La fonction f est-elle intégrable sur $[1\,;+\infty[$?
4. Trouver un équivalent de f en zéro.
5. La fonction f est-elle intégrable sur $]0\,;1]$?

I.1.41 **CCP MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0\,;1]$ tel que :
$$\int_{u_n}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n.$$
On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n - \ln(u_n)$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite à partir d'une intégrale.
4. Trouver un équivalent simple de u_n.

I.1.42 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit f une fonction continue, croissante et positive de $]0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(\mathrm{e}^{-n})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Montrer que les séries de terme général u_n et v_n ont même nature.

I.1.43 **Mines-Ponts**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme.

I.1.44 **Mines**

Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

I.1.45 **Mines-Ponts**

Pour a et b réels, trouver la nature de la série de terme général
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + a\tan\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

I.1.46 **CCINP**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, l'équation
$$\mathrm{e}^x + x = n,$$
d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$, admet une unique solution notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est équivalente à $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général x_n^α.

I.1.47 **X PC 2013**

Soit $x > 0$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$?

I.1.48 **CCINP PC**

Quelle est la nature de la série de terme général défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)\ ?$$

I.1.49 **Centrale PC 2019**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que $u_n > \dfrac{1}{n}$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?
2. On suppose que $u_n > \dfrac{1}{n}$ pour un nombre infini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?

I.1.50 **Centrale**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

I.1.51 **X-ENS**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1.$$

Trouver un équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.52 **Mines-Ponts/Centrale PC 2010**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\,.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
2. Soit $\alpha > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\ ?$$

I.1.53 **CCINP**

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

I.1.54 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

I.1.55 **X**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de naturels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_n \leqslant n - 1$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!}$ converge.
2. On suppose que $a_n = n - 1$ à partir d'un certain rang.
   Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!}$ est rationnel.
3. Soit $t \in [-1\,;1]$.
   Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(2\pi n!\alpha) = t$.

I.1.56 **X-ENS**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^n}\sum\limits_{k=1}^{n} k^n$.

I.1.57 **X-ENS**

Trouver un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

I.1.58 **X-ENS**

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f : [a\,;b] \to [a\,;b]$ une fonction continue, $u_0 \in [a\,;b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

I.1.59 **X**

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$.

I.1.60 **ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver un équivalent de u_n.

I.1.61 **X-ENS**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1\,,n]\!]$. On pose $B_0 = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

En déduire la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

I.1.62 **Mines/CCP**

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

I.1.63 **Centrale**

Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sin(n!\pi\alpha)}.$$

1. Démontrer que $R_\alpha \leqslant 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

   $$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

   $$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^n}.$$

   En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge.

   Dans la suite, on pose $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ et on admet que α est irrationnel.
3. Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$
4. Démontrer que $R_\alpha = 0$.
5. Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.

I.1.64 **ENS**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0\,;1[$. Montrer que la suite
$$(x_n(1-x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$$
admet une valeur d'adhérence inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.
2. On suppose que $(x_n(1-x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence inférieure à $\frac{1}{4}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

I.1.65 **CCP MP**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln(n)$.

1. Donner un équivalent de $u_{n+1}-u_n$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Proposer un équivalent simple de $u_n-\ell$.
3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n(u_n-\ell)$.

I.1.66 **Centrale**

Considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1).$$
Montrer que ces deux suites convergent.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)I_n$.
3. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β
tels que $\ln(I_n)=\alpha\ln(n)+\beta+o(1)$.
4. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}I_n$.

I.1.67 **Mines-Ponts**

Soit $f\in C^1([1\,;+\infty[,\mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$.

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f(n)$.
2. Donner un équivalent de $R_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}f(k)$ en $+\infty$.

I.1.68 **Mines-Télécom MP**

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

   Montrer que :

   (a) $\ell < 1 \implies \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ;

   (b) $\ell > 1 \implies \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

I.1.69 **X MP**

Soit $\lambda \in]0\,;1]$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in]0\,;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \end{cases}$$

I.1.70 **Centrale MP**

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \mapsto tq(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |tq(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$.

   On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y_{n+1} = 1 - \displaystyle\int_0^{+\infty} (t-x)q(t)y_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

2. Justifier la définition de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[a\,;+\infty[$.
3. Montrer la convergence uniforme de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a\,;+\infty[$.

I.1.71 **Mines-Télécom MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_n = (-1)^n \dfrac{\cos(u_{n-1})}{n} \quad \text{si} \;\; n \geqslant 1 \end{cases}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

I.1.72 **ENS ESPCI 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.
3. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$.

   Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus\{0\}$.

I.1.73 **CCP MP**

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
2. On note $N = \lim\limits_{n\to+\infty} M^n$. Que représente N ?
3. Déterminer N.
4. Soit u_0, v_0 et w_0 trois nombres réels et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

   Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

   La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Le cas échéant, quelle est sa limite ?

I.1.74 **CCP MP**

Soit $\delta \in]0\,;\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(\delta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\delta)$.

1. Donner une expression simplifiée de $S_n(\delta)$. Exhiber $M(\delta) \in \mathbb{R}$, indépendant de n, tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n(\delta)| \leqslant M(\delta).$$
2. Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose $u_n(\delta) = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\delta)$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n(\delta)$ converge simplement sur $[2\,;+\infty[$.
   On pourra écrire $\cos(n\delta) = S_n(\delta) - S_{n-1}(\delta)$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n(\delta)$ sur tout segment inclus dans $]0\,;\pi]$.

I.1.75 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'équation
$$x^n - nx + 1 = 0$$
admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$. On la note x_n.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Donner un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

I.1.76 **X ESPCI**

Étudier le comportement en l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

I.1.77 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 .$$
On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f et esquisser le graphe de cette fonction.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite en fonction de u_0.

I.1.78 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'équation
$$\sin(x) = \frac{x}{n}$$
admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\pi[$. On la note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Calculer sa limite.
3. Donner un développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ avec la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

I.1.79 **X-ENS**

Soit p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge.

I.1.80 **CCP MP 2007**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \exp(-x\sqrt{n})$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$.

   Lorsque $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge, on note S sa somme.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x)$ est équivalent à e^{-x} en l'infini.

I.1.81 **X-ENS**

Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n!\pi \mathrm{e})$?

I.1.82 **Mines-Ponts MP 2023**

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose :

$$\|A\| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Étudier la convergence de $\sum A^k$ si $\|A\| < 1$. Cette condition est-elle nécessaire pour la convergence de la série ?
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$U_p = \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p.$$
   Étudier la convergence de la suite $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.83 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n^n$.

I.1.84 **X-ENS**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Étudier la convergence et calculer explicitement la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}.$$

I.1.85 **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} u_p u_{n-p} \end{cases}$$

On souhaite obtenir une expression de u_n en fonction de n. On suppose qu'il existe un nombre réel R strictement positif tel que la série entière $\sum u_n x^n$ converge sur $]-R\,;R[$. Pour tout $x \in]-R\,;R[$, on pose $S(x) = \sum u_n x^n$.

1. Pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus\{0\}$, calculer $S^2(x)$.
   En déduire que pour tout $x \in]-R\,;R[\setminus\{0\}$:
   $$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0.$$
2. Montrer que $S(0) = 1$, et qu'au voisinage de 0, $S(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
3. Montrer qu'au voisinage de 0, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$.
4. Conclure.

I.1.86 **X MP**

Pour $|t| < 1$, on pose $f(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-t^k}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer, pour $|t| < 1$, que $f(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p(n) t^n$, où $p(n)$ est le nombre de suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels telles que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k y_k = n$.

I.1.87 **X-ENS**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que,
   $$\forall t \in \left]0\,;\tfrac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\cot^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$
2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.
3. En observant que
   $$\cot^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \cot^2(t)$$
   pour tout $t \in \left]0\,;\tfrac{\pi}{2}\right[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

I.1.88 **Mines-Ponts**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $p > 1$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.
2. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ, appelé la *constante d'Euler*. Déduire que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis de t_n. Déduire que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Avec un raisonnement similaire, montrer que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.1.89 **Centrale PC 2023**

1. Soit n et p deux naturels. Calculer :
$$I_{n,p} = \int_0^1 (\ln(x))^p x^n \,\mathrm{d}x.$$
2. On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{x^x} \,\mathrm{d}x$. Montrer que I converge et que
$$I = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}.$$
3. En majorant les restes de la série précédente, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

I.1.90 **Mines-Ponts MP 2024**

Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}.$$

I.1.91 **X PC 2021**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $x_0 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_0 + x_1 > 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{n+1} + x_n.$$
Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.92 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sous réserve de sens, étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. Quelle est la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?
4. Bonus : trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.93 **CCP**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. On suppose encore que $u_n \sim v_n$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}.$$

I.1.94 **CCP**

1. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de

$$u_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

I.1.95 **CCINP**

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;+\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a\,;+\infty[$?
4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0\,;+\infty[$?

I.1.96 **X-ENS**

Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

I.1.97 **X-ENS**

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère la fonction réelle f_n définie par :

$$f_n(x) = x^{3n} - \sqrt{n} \cdot x + 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1\,;2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de $\varepsilon_n = x_n - 1$ et en déduire un équivalent de x_n.
3. Donner un équivalent asymptotique à trois termes de x_n.

I.1.98 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.99 **Centrale PC 2015**

On pose, pour tout x réel,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$u_n = f(n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Étudier la nature de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}.$$

I.1.100 **Mines-Ponts**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
Donner un équivalent de x_n.

I.1.101 **ENSAE 2013**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

I.1.102 **X MP**

Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $(x;y) \in [0\,;1]^2$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_0 \in [0\,;1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe a.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

I.1.103 **X PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par :

$$P_n(X) = X^{2n} + X^2 - 1.$$

1. Montrer que P_n possède deux racines réelles de signes opposés.
2. On note r_n la racine positive de P_n. Démontrer que la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et convergente. Déterminer sa limite.

I.1.104 **Mines**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \arctan(x_n)$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.1.105 **CCP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver l'existence de J_n.
2. Étudier les limites des suites $(J_n)_{n\geqslant 1}$ et $(nJ_n)_{n\geqslant 1}$.

I.1.106 **Mines 2015**

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$.

I.1.107 **CCP 2015**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln(n)$.

1. Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer α pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et calculer alors sa limite.

I.1.108 **CCP 2105**

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n} \cdot x = 1$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On note a_n cette solution. Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et la convergence de la série $\sum a_n$.

I.1.109 **Centrale 2015**

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0\,;1[$ tel que $P_n'(u_n)=0$.
2. Montrer que pour tout $n>0$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k-u_n} = 0$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.110 **CCP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et en calculer un équivalent.

I.1.111 **Mines 2015**

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{arcosh}\left(\frac{n+1}{n}\right)$?

I.1.112 **CCP 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $P_n(X) = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que P_n admet deux racines positives, a_n et b_n.
2. Étudier les suites $(a_n)_{n\geqslant 3}$ et $(b_n)_{n\geqslant 3}$ et leur rapidité de convergence.

I.1.113 **CCP 2015**

On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Pour quels n, u_n est-il défini ?
2. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$.
5. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$.
6. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.114 **Centrale 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $2^{(2^n)}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

I.1.115 **Centrale 2015**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On note $J = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum u_n^x \text{ converge}\}$.

1. Montrer que J est vide ou alors un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. (Illustrer par des exemples concrets.)
2. On suppose que $J \neq \emptyset$, et on note :

$$\begin{array}{rccc} f & : J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^x \end{array}$$

Étudier la continuité de f et ses limites au bornes.

I.1.116 **CCP MP**

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) On suppose $\alpha \leqslant 0$.
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) On suppose $\alpha > 0$.
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

I.1.117 **X PC 2019**

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}.$$

On pourra commencer par regarder le comportement de $u_n + u_{n+1}$.

I.1.118 **CCP MP**

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1],\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0\,;1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

I.1.119 **CCP 2015**

Donner un développement en série entière de la fonction $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

I.1.120 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

I.1.121 **Mines-Ponts**

1. Montrer que l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer les réels a et b tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n - n\pi - a + \frac{b}{n}$ converge.

I.1.122 **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

I.1.123 **CCP MP**

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

I.1.124 **Mines 2016**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2015}\right) x^n$ et calculer sa somme.

I.1.125 **CCP MP**

Soit E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. On pose :
$$\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$
   (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

I.1.126 **CCP MP**

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

I.1.127 **CCP MP**

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r\,;r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R\,;R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

I.1.128 **CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe z.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$
   (c) $\sum \cos(n) z^n$

I.1.129 **CCP MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

I.1.130 **CCP MP**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ avec $a_{2n} = 4^n$ et $a_{2n+1} = 5^{n+1}$.

I.1.131 **CCP MP**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

I.1.132 **X-ENS 2015**

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée des réels $x_0 > 0$ et $a > 0$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}.$$

Étudier la limite de cette suite, et donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.133 **CCP 2016**

On considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n$, de somme $S(x)$.

Déterminer son rayon de convergence, et calculer sa somme sur son disque de convergence.

I.1.134 **CCP MP**

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que : $\forall (u;v) \in A^2$, $\|uv\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
2. (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

   (b) Démontrer que $e - u$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
3. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

I.1.135 **Mines 2016**

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{4n^2 - n + 1}$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série $S(x)$.
2. Calculer $S(x)$ lorsque $x > 0$.

I.1.136 **CCP MP**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.

I.1.137 **CCP MP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0.$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.1.138 **CCP 2016**

On rappelle que la série harmonique alternée converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c tels que $\frac{1}{4X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{2X-1} + \frac{c}{2X+1}$.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ convergent, calculer leur somme.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$ converge, calculer sa somme.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^3 - x}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer.

I.1.139 **CCP 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.140 **Mines 2016**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \sqrt{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

Indication : on pourra utiliser une équation différentielle.

I.1.141 **X-ENS 2016**

1. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.142 **ENSAM 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^n}\,\mathrm{d}t$ et la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$.
3. Montrer que $R = 1$.

I.1.143 **ENAC 2016**

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction ζ.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ.
3. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x$ est définie et est égale à la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

I.1.144 **Mines PSI 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

I.1.145 **Mines 2016**

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Déterminer les rayons de convergence des séries entières
$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n}{n!} x^n.$$
2. Trouver une relation entre S, S' et U'.
3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que $\lim_{x\to+\infty} U(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   Déterminer $\lim_{x\to+\infty} U(x)\mathrm{e}^{-x}$.
5. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
   Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)\mathrm{e}^{-x}$ en fonction de $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

I.1.146 **Mines 2016**

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs, convergente.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+2}}$ converge aussi.

I.1.147 **Mines 2016**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers une limite ℓ. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

I.1.148 **Mines 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\text{la somme harmonique } H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ et la fonction } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la somme $f(x)$.
2. Déterminer le comportement de $f(x)$ aux bornes du domaine de convergence.

I.1.149 **CCP 2016**

On considère, pour $n \geqslant 2$ entier, l'équation $(E_n) : x^n = x + n$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution u_n de (E_n) dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$ on a $1 < u_n < 2$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et sa limite ℓ.
4. Calculer un équivalent de $u_n - \ell$.

I.1.150 **Mines 2016**

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k a_{n-k} \end{cases}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière f n'est pas nul.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
   En déduire la fonction f et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.151 **ENSIIE 2015**

À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b, c, la série de terme général

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

converge-t-elle ?

I.1.152 **CCP PSI 2019**

1. Quel est le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$?
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur D.
3. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

   Montrer que, pour tout $x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que la somme S associée à cette série est continue sur D.
5. Montrer que S est intégrable sur D.

I.1.153 **ENSEA/ENSIIE 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

1. Démontrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Démontrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
3. Déterminer, par majoration ou minoration, la nature de $\sum u_n$ avec :
   (a) $u_n = n^4 \mathrm{e}^{\sin(n)}$
   (b) $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n^4}\right)}{2^n}$

I.1.154 **Mines-Ponts 2015**

Soit $M(x_0; y_0)$ un point de la parabole $\mathfrak{P}$ d'équation $y^2 = 2px$. $(p > 0)$
On note M_n la deuxième intersection entre la normale à la parabole en M_{n-1} et la parabole.

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $\dfrac{1}{y_n}$.

I.1.155 **TPE/EIVP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Pour quels nombres réels α la série $\sum u_n^\alpha$ est-elle convergente ?

I.1.156 **Centrale 2017**

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{0}}}}}$.

1. Établir une relation simple entre u_n et u_{n-1}.
2. Donner un équivalent puis un développement à deux, puis à trois termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.157 **ENSEA/ENSIIE PSI 2017**

1. Montrer que $P_n = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$ admet une unique racine $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.1.158 **Mines 2012**

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x^2)-1}{x}$ est prolongeable en une fonction développable en série entière.
2. Montrer que f est strictement croissante, et réalise une bijection entre deux intervalles que l'on précisera.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction réciproque $g = f^{-1}$ en 0.

I.1.159 **Mines 2012**

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels positifs.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors la série $\sum \dfrac{1}{n^{b_n}}$ converge.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, la série $\sum \dfrac{1}{a_n^{b_n}}$ converge-t-elle ?

I.1.160 **CCP 2012**

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}^2}{u_n}.$$

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

I.1.161 **X PSI**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

I.1.162 **X PC**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ converge et déterminer sa limite.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

I.1.163 **X PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

I.1.164 **ENSEA/ENSIIE 2012**

On considère une série réelle convergente $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs ou nuls, de limite nulle.

1. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n u_n$ converge.
2. Trouver un contre-exemple si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas absolument.

I.1.165 **CCP 2012**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Étudier les variations et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}u_n$, et que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
4. Montrer que la suite $((n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire un équivalent de u_n et la nature de la série $\sum u_n$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$ et calculer cette somme.

I.1.166 **CCP 2012**

Étudier le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

I.1.167 **Centrale 2012**

On considère la série entière $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Calculer $(1-4x)f'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire $f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

I.1.168 **ENS Rennes 2017**

Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

   Indication : on pourra développer en série entière $\frac{1}{1+t^b}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

I.1.169 **CCP 2017**

Déterminer le rayon de convergence de la série $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$ et calculer sa somme.

I.1.170 **CCP**

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

I.1.171 **CCP PC**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Étudier la limite de $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3}$.

   En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.
3. En étudiant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

I.1.172 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une relation de récurrence sur I_n.
2. Trouver un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
3. (a) Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (b) Exprimer I_{2n+1} à l'aide d'une série.

I.1.173 **Mines-Ponts PSI**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

1. Étudier la limite de cette suite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.
4. Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

I.1.174 **Mines-Ponts PC 2023**

1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.
2. Montrer que la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$$
converge uniformément sur $[0\,;1]$ et calculer sa somme.
3. La série de fonctions précédentes converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

I.1.175 **Mines-Ponts MP**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $P_n(X) = \prod_{k=0}^{n} (X-k)$.

1. Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0\,;1[$, notée λ_n.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.
3. Trouver un équivalent de λ_n pour $n \to +\infty$.

I.1.176 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.1.177 **Mines-Télécom MP 2023**

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

I.1.178 **CCP PC**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

I.1.179 **CCP PSI**

Soit, pour tout réel $t \geqslant 1$,
$$f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$$
et, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$
Étudier le sens de variation de la fonction f, préciser le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la nature de la série $\sum u_n$.

I.1.180 **ENSAM PSI**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes positifs, avec $a_1 \geqslant 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0\,;1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.
2. Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geqslant 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ.

I.1.181 **X ESPCI**

Soit $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ vaut 1.
2. Pour tout $x \in]-1\,;1[$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-1\,;1[$.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.

I.1.182 **CCP PSI**

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n^a) x^n$.

I.1.183 **Centrale PSI**

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n).$$

1. Calculer d_2 et d_3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.
2. Pour tout $x \in]-R\,;R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
   Montrer que pour tout $x \in]-R\,;R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
3. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n.

I.1.184 **Mines-Ponts PC 2011**

On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right).$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.185 **CCP MP 2018**

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0\,;+\infty[,\ f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}.$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.1.186 **CCP MP 2018**

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a\,;b]$? sur $[a\,;+\infty[$?
   (c) La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0\,;+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

I.1.187 **X**

Soit $\theta \in [0\,;2\pi]$ et $t \in [0\,;1[$. On pose :

$$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(p\theta).$$

1. Calculer $S(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t)$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.

I.1.188 **X MP 2019**

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$.
   Montrer que
   $$\sum_{n\geqslant 0} f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   sont de même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(\ln(n))}{\ln(n)}$?

I.1.189 **Centrale**

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx+1)}$.

1. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis un équivalent de S en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de S en 0^+.

I.1.190 **TPE/EIVP PC 2018**

Posons, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général u_n.
Indication : utiliser l'identité $n^2 + 3n + 3 = 1 + (n+1)(n+2)$.

I.1.191 **ENSAE MPI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.192 **Mines-Télécom MP 2024**

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.193 **CCINP MP 2024**

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :
$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$
2. Montrer que
$$\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}\Big(\ln^2(n) - \ln^2(n-1)\Big)$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

I.1.194 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n).$$

I.1.195 **CCINP PSI 2024**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

I.1.196 **CCINP PSI 2014**

Résoudre l'équation
$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$
avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 5$.

I.1.197 **Mines-Ponts PC 2018**

On note $F = \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\Big\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Préciser la dimension de F.
2. Pour tout entier $p \geqslant 3$, on note v_p le nombre de parties de $\{0; 1; \ldots; p\}$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques d'une de ces parties soit supérieur ou égal à 3. Montrer que la suite $(v_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F.

I.1.198 **TPE/EIVP PC 2019**

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et discuter la convergence de celle-ci en fonction de la valeur de u_0.

I.1.199 **CCINP PSI 2024**

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de cette série.
2. Calculer $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer la somme $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{N-1}$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.

I.1.200 **ENSAE MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation :

$$(E_n) : \sum_{k=1}^{n} x^k = 1.$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une unique solution x_n de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.1.201 **CCINP TSI 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \int_0^\pi \frac{1}{1+(n\pi+t)^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad a_n = \int_0^\pi \frac{1}{1+(n\pi)^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $\sin(t) \leqslant t$.
2. Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que $a_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

I.1.202 **Mines-Télécom PSI 2021**

Développer en série entière la fonction f définie par :

$$f(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

I.1.203 **Centrale-Supélec PC 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = -4 + \sum_{k=1}^{n} X^k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0\,;+\infty[$. Cette racine est notée x_n.
2. Calculer x_1 et x_2. Montrer que $x_5 < 1$.
3. Quel est le signe de $P_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone puis qu'elle converge. Sa limite est notée ℓ.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
5. Montrer que x_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de ℓ.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n = x_n - \ell$.
   Vérifier l'égalité $\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $n\delta_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
7. Trouver une constante K telle que δ_n soit équivalent à $K \cdot \ell^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.204 **TPE/EIVP MP 2017**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \exp\left(-\frac{k}{n}\right)$.

I.1.205 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.
2. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ d|k}} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{d}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.1.206 **Mines-Ponts MP 2019**

Montrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

I.1.207 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1 + x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

I.1.208 **Centrale-Supélec PSI 2018**

Dans tout l'exercice, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$. On dira que $\prod a_k$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie non nulle. On pose pour tout n, $u_n = a_n - 1$.

1. Prouver que, si $\prod a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. On suppose dans toute la suite que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Montrer que la suite $(\ln(1+u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
3. On suppose maintenant que $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
4. En étudiant directement la convergence de

$$\prod \left(1 + \frac{1}{1+n}\right),$$

démontrer la divergence de la série harmonique.

I.1.209 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $k \geqslant 2$ un entier. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

I.1.210 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. Montrer par récurrence que la suite est majorée par 2.
3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

I.1.211 **Mines-Télécom MP 2025**

Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 + 2n + 1.$$

Indication : il pourra être utile d'introduire l'endomorphisme $S - 2\mathrm{Id}$, où S est l'application suivante :

$$S \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

I.1.212 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation
$$1 + \ln(x+n) = x$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\ln(n) < u_n < n$$
et en déduire un équivalent de u_n.

I.1.213 **CCINP TSI 2022**

On considère $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. (a) Vérifier que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
   (b) En déduire la valeur de I_1.
   (c) Interpréter géométriquement ce calcul.
2. Proposer une méthode numérique permettant un calcul approché de I_n.
3. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (b) En déduire que $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.

I.1.214 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$
Montrer que $|u_n|$ et v_n tendent forcément vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.215 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

On considère, pour $n \geqslant 1$,
$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

I.1.216 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x_0; y_0) = (0; 0)$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Calculer les premiers termes de chaque suite et conjecturer leur comportement.
3. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).
4. Montrer que $(x_{2n} - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1} - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$, où ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent vers 0. (On pourra pour cela majorer $x_{n+1} - \ell$.)
5. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$, l'écart entre y_n et sa limite et celui entre x_n et sa limite est inférieur à ε. Déterminer ce rang pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

I.1.217 **CCINP MP 2025**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot S_n = 1$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge (raisonner par l'absurde), puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ quand $n \to +\infty$.

I.1.218 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs tels que $\sum u_n$ converge. Démontrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

I.1.219 **ENSEA/ENSIIE MPI 2025**

Soit la série de terme général $(n^2 + n + 1)x^n$.
Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

I.1.220 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^k)x^k$.

I.1.221 **CCINP PC 2021**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right).$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

I.1.222 **CCINP PC 2019**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, soit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \ln(1 + a_n)$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} (1 + a_k)$.

I.1.223 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = k\,?$$
2. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}\,?$$

I.1.224 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période d. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n^\alpha}$.

I.1.225 **Mines-Ponts PC 2017**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{n}{n+\alpha}\right)^{n\ln(n)}$.

I.1.226 **Mines-Ponts MP 2025**

Montrer la convergence de la somme suivante et en calculer la valeur :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right).$$

I.1.227 **ENSAE MP 2024**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n+1}{2} z^{2n}$.

I.1.228 **CCINP MP 2017**

On définit la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier la définition de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2} J_{n-1}.$$
3. En utilisant le résultat de la question 2, trouver la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.229 **Mines-Télécom MP 2019**

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer l'existence de $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{n}$ quand $n \to +\infty$.
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$?
4. Étudier la convergence en R et en $-R$.

I.1.230 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$, où $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$.

1. Étudier la nature de cette suite.
2. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n - 1}{n}$.

I.1.231 **Mines-Ponts PSI 2013**

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{arcosh}(n) - \operatorname{arsinh}(n).$$

I.1.232 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminées par leur premier terme x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{4} \\ z_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

I.1.233 **Mines-Télécom MP 2018**

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

I.1.234 **CCINP PSI 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$.

1. Trouver une relation vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

I.1.235 **CCINP MP 2022**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$
Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \frac{C}{n^a}$.

I.1.236 **Mines-Ponts MP 2014**

On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n-3}{2n+1} u_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Étudier la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

I.1.237 **CCINP PC 2024**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum u_n$.

I.1.238 **CCINP MP 2022**

1. Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0\,;1]$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et qu'elle est de limite nulle.
3. Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties.
4. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n.

   (b) Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

I.1.239 **Mines-Télécom MP 2025**

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}$.

I.1.240 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et calculer sa somme.

I.1.241 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit u la suite réelle définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt[n]{n!}.$$

Trouver une suite v d'éléments de la forme $n^\alpha(\ln(n))^\beta$, avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $u - v$ soit convergente.

I.1.242 **CCINP PSI 2019**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie par $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)\mathrm{e}^t$. Montrer que :
$$\forall t \in [0\,;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{n} \quad \text{et} \quad \left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t - 1\right| \leqslant \frac{t}{n}\mathrm{e}^t.$$
2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où :
$$I_n : x \in [0\,;1] \longmapsto \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right) \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

I.1.243 **Centrale-Supélec PC 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n \exp(-t) t^n \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
2. Montrer que $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

I.1.244 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}.$$

1. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

I.1.245 **CCINP TSI 2024**

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}.$$

Donner une condition sur a et b afin que le premier terme du développement limité de f en 0 soit de degré maximal.

I.1.246 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Déterminer l'intervalle de définition de f.
2. Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

I.1.247 **Mines-Télécom MP 2022**

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists!\, x \in \mathbb{R}_+, \ \cos(x) = nx.$$
2. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

I.1.248 **CCINP PC 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = a_{n+1} - a_n.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} D_n$ converge.

I.1.249 **Mines-Télécom MP 2022**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right).$$

I.1.250 **CCINP MP 2023**

On considère :

- $\sum a_n x^n$ série entière de rayon R, de somme $f(x)$,
- $\sum b_n x^n$ série entière de rayon R', de somme $g(x)$,
- $\sum c_n x^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

1. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$?
   Que dire de la somme de la série ? (Aucune démonstration n'est exigée.)
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

I.1.251 **Mines-Ponts MP 2022**

Pour $n \geqslant 1$ entier et $x > 0$, on pose :

$$u_n(x) = x^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$, puis étudier la continuité de sa somme.

I.1.252 **Mines 2022**

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine entière.
Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left|\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right|$.

I.1.253 **Mines 2023**

Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$.

I.1.254 **Mines 2023**

Soit $b \geqslant 2$. On note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base b de n. On pose $u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_n = nu_{c(n)}$. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ diverge.

I.1.255 **Mines 2023**

Soit f une fonction continue sur $[0\,;\pi]$. Pour $n \geqslant 1$ entier, on pose

$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Indication : on pourra étudier $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

I.1.256 **Mines 2022**

On fixe $\alpha \geqslant 0$ et on pose, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer la limite et un équivalent de u_n lorsque $\alpha = 0$.
2. Faire de même lorsque $\alpha > 1$.
3. À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$, faire de même lorsque $\alpha = 1$.
4. En déduire la limite de u_n lorsque $\alpha \in \,]0\,;1[$.

I.1.257 **Mines 2024**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Donner un équivalent de :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

I.1.258 **Mines 2024**

On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi^4}{48} - a_n b_n\right).$$

I.1.259 **X 2022**

Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, et on note R le rayon de convergence de f.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant (C+\varepsilon)^n$;

ii) $R = +\infty$ et $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant r_0 \implies |f(z)| \leqslant \mathrm{e}^{(C+\varepsilon)|z|}$.

I.1.260 **CCP 2023**

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = 0$.
3. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. À l'aide de la continuité uniforme de f, montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.1.261 **CCP 2024**

Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + \lambda^n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ en fonction de λ.
2. Même question pour la convergence uniforme.
3. On définit à présent :
$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + 2^n x^2) \qquad \text{et} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$
   (a) Donner le domaine de définition de G.
   (b) Donner le domaine de continuité de G.
   (c) Donner le domaine de dérivabilité de G.

I.1.262 **Mines 2024**

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + (n+1)u_n}{n+2}.$$
Déterminer une expression explicite de u_n et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.263 **Mines 2024**

Étudier la série entière :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

I.1.264 **Centrale 2023**

Pour tout $n \geqslant 1$ entier, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit encore :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que $H_n = \ln(n) + O(1)$. En déduire les rayons de convergence de f et g.
2. Donner une expression de g et en déduire un équivalent de f en 1^-.
3. En calculant $(1-x)f(x)$, montrer que f admet une limite finie en -1 et la calculer.

I.1.265 **Mines 2022**

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de continuité de f.
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0^+.

I.1.266 **Mines 2024**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On définit la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 et α pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$.
   Trouver la constante optimale $C > 0$ telle que $\|e_{n+1}\| \leqslant C\|e_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.1.267 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$?

I.1.268 **Centrale 2023**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

1. Montrer qu'une série (réelle ou complexe) absolument convergente est convergente.
2. (a) On note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et on suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k) + S_n b_n.$$
   (b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.
3. (a) On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que si $\sum b_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer la réciproque.

I.1.269 **Centrale 2023**

On fixe $a > 0$ et on pose :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx)\exp(-n^a).$$

1. (a) Rappeler le théorème de dérivation des séries de fonctions.
   (b) Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe C^∞.
2. On suppose $a > 0$. Montrer que $\tau_x : t \mapsto f(x+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Qu'en est-il lorsque $a \leqslant 1$?

I.1.270 **Mines 2022**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Discuter de la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en fonction de α.

I.1.271 **Mines 2023**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto f(nx)$.
   (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
   (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur tout compact ?
2. Mêmes questions avec $f_n : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

I.1.272 **Mines 2023**

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $f(z) = \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son rayon de convergence.
2. Exprimer les coefficients a_n de cette série entière sous forme d'une somme.
3. Donner une relation de récurrence entre les a_n.
4. Effectuer un développement asymptotique de $\ln(a_n)$ à la précision $O(\ln(n))$.

I.1.273 **Mines-Ponts MPI 2025**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $[0\,;1]$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Dans cette partie, on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   (a) Démontrer que $b_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En utilisant $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, démontrer que $b_n \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\sigma_n}}{\sigma_n}$.
   (c) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.
2. Dans cette partie, on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Soit $\alpha \in]-1\,;0[$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\alpha]$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $$x - Cx^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
   (b) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.

I.1.274 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : t \longmapsto \frac{2t}{t^2 + n^2}.$$

1. Étudier les modes de convergence de $\sum u_n$.
2. On note g la fonction somme. Montrer sa continuité.
3. La fonction g est-elle de classe C^1 ?
4. Étudier la limite de g en $+\infty$.

I.1.275 **Mines-Télécom MP 2025**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.276 **CCINP MP 2021**

On pose, pour tout réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = r^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$$

avec r un nombre réel fixé tel que $|r| < 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $P_r(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

I.1.277 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Donner une condition nécessaire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série numérique $\sum u_n$ converge.
2. Cette condition est-elle suffisante ? Justifier.
3. Déterminer la nature de la série de terme général

$$v_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

   en fonction des réels a et b.

I.1.278 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\alpha \in]0\,;\pi[$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{x^2+2\cot(\alpha)x-1} \end{array}$$

Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.

I.1.279 **Mines-Ponts MP 2021**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor}{k(k+1)}$.

I.1.280 **Mines-Télécom 2021**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \cos^n(x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$. Exprimer f'.
4. En déduire une expression de f.

I.1.281 **CCINP MP 2021**

À l'aide de séries entières, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser 1.)

I.1.282 **Mines-Télécom MP 2018**

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on pose $u_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$.

Étudier les convergences simple, absolue, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0\,;+\infty[$.

I.1.283 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général

$$u_n = \sqrt{P(n)} - n^2 - n + 1$$

converge.

I.1.284 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Montrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. On pose :

$$u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

   (a) Étudier la convergence simple, puis la convergence normale de S.
   (b) Montrer que S est de classe C^1 et calculer S'.

I.1.285 **Mines-Télécom 2025**

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

1. Montrer que f existe.
2. Trouver $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

I.1.286 **CCINP PSI 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

I.1.287 **CCINP TSI 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

I.1.288 **CCINP MP 2024**

Soit $p \geqslant 2$ entier et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod p \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \mod p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de la série $f(x)$, et l'écrire sous une forme simplifiée.
3. La série converge-t-elle uniformément sur $]-R\,;R[$?
4. Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$, écrire les coefficients sous forme trigonométrique.

I.1.289 **Mines-Ponts MP 2022**

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers avec $p_n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{p_1\cdots p_n}$ converge et que sa somme appartient à $]0\,;1]$.
2. Soit $x\in]0\,;1]$. Montrer qu'il existe une unique suite croissante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $x=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{p_1\cdots p_n}$.
3. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

I.1.290 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A)=\{\rho;z;\overline{z}\}$ avec $\rho>1$ et $|z|<1$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\rho^n+z^n+\overline{z}^n$. Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, les séries $\sum\sin(\alpha u_n)$ et $\sum\sin(\alpha\rho^n)$ sont de même nature.

I.1.291 **TPE/EIVP MP 2015**

1. Montrer que la série double de terme général $u_{p,q}=\dfrac{1}{(p+q)^2}$, avec $p,q\in\mathbb{N}^*$, diverge.
2. Étudier la convergence de la série double de terme général $v_{p,q}=\dfrac{1}{p^2+q^2}$, avec $p,q\in\mathbb{N}^*$.

I.1.292 **Mines-Télécom PSI 2022**

On considère la série de terme général $u_n=(-1)^n\dfrac{\sin(n)}{n}$.

1. Soit $f\in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t=0.$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(2kt)=\frac{(-1)^n\cos((2n+1)t)-\cos(t)}{2\cos(t)}.$$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t$, puis en déduire que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.

I.1.293 **ENSEA/ENSIIE MP 2023**

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\mathrm{e}^{\cos(x)}$.

I.1.294 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Proposer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que S est irrationnel.

I.1.295 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit f définie par $f(t) = \cos\left(\dfrac{\arcsin(t)}{2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.
2. En déduire un développement en série entière de f.

I.1.296 **Mines-Ponts MP 2018**

Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$?

I.1.297 **CCINP PC 2022**

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose :

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité

$$v_{n+p-1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right)$$

   et en déduire l'encadrement

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \exp(2^n \ell)$ et $s_n = t_n - u_n$.
4. Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
6. En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

I.1.298 **CCINP MP 2024**

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction arcsin.
2. Jusitifier que la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ f(x) = (\arcsin(x))^2$$

admet un développement en série entière.

3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.
4. En déduire le développement en série entière de f.

I.1.299 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1,\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie, puis que la série $\sum a_n^{-2}$ converge.

I.1.300 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

2. Soit $a > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0\,;a] \to [0\,;a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0\,;\varepsilon]$.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (c) Trouver un équivalent en 0 de $(f(x))^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand $x \to 0$.

   (d) En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

   (e) Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

I.1.301 **Mines-Télécom MP 2018**

Déterminer si la série de terme général

$$\frac{1}{\ln(n)\ln(\cosh(n))}$$

converge.

I.1.302 **Mines-Ponts MP 2023**

On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x+2y+3z=n$.

On pose $G(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que G est définie pour $|t|<1$ et qu'on a :

$$\forall t \in]-1\,;1[,\ G(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$

2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

I.1.303 **Mines-Ponts PC 2023**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+10^{-2^k}\right)$.

I.1.304 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation :

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{n}.$$

1. Montrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que u_n et v_n vérifient (E_n), et pour n assez grand, $0<u_n<\mathrm{e}<v_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? On note ℓ sa limite.
3. Trouver un équivalent de $u_n-\ell$.

I.1.305 **CCINP PC 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n=-\ln(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n=a_{n+1}-a_n.$$

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} D_n$ converge.

I.1.306 **CCINP PC 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_0>0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0<a_{n+1}\leqslant 2-\frac{1}{a_n}.$$

Montrer que la suite est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

I.1.307 **Mines-Télécom MP 2021**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+4n-1}{(n+2)n!}x^n.$$

I.1.308 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Montrer qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Soit $f \in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

I.1.309 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \tan\left(\frac{n\pi}{5}\right) z^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.
2. Soit $a = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Exprimer $\tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ en fonction de a, pour $n \in \{2;3;4\}$.
3. Simplifier $S_{5N}(z)$ pour $|z| < R$.
4. Calculer S sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

I.1.310 **Mines-Ponts MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.
2. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

I.1.311 **X MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ et $u_{n+1} = \tanh(u_n)$.

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Trouver un équivalent de u_n.

I.1.312 **Mines-Ponts MP 2017**

Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ et $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n^2}{1+u_n^2}$.

I.1.313 **CCINP PSI 2019**

1. Soit $t \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. Montrer que :

$$\Big|\ln(1+t) - t\Big| \leqslant 2t^2.$$

2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n^2(1+x^2)}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

I.1.314 **CCINP PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh^n(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?
3. (a) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   (b) Utiliser cette relation pour calculer :

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^3(t)}\,\mathrm{d}t.$$

I.1.315 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2 - u_n) = 0$.
Que peut-on dire des affirmations suivantes ?

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^3 - u_n) = 0$

I.1.316 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 = a$, $x_1 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \min(3 - x_{n+1}; 2x_n - 2).$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins un terme négatif.
3. En déduire le caractère non borné de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.317 **Mines-Ponts MP 2019**

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+m)!}$.

I.1.318 **Mines-Ponts MP 2012**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{e}^{n\sin(n)} z^n$.

I.1.319 **Mines-Ponts MP 2014**

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}\right) ?$$

I.1.320 **Mines-Ponts MP 2014**

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) - \ln(n)}{k - n}.$$

I.1.321 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_{1,1}; \dots ; a_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} z^k.$$

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$.

I.1.322 **Mines-Ponts MP 2016**

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = U_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = U_{n+1} + (n+1)U_n.$$

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \frac{x^n}{n!}.$$

1. Expliciter f et en déduire U_n pour tout n.
2. Comparer U_n et $V_n = \mathrm{Card}(\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = \mathrm{Id}\})$, où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1; \dots ; n\}$.

I.1.323 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante telles que $u = v + w$.

I.1.324 **Mines-Ponts MP 2016**

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

I.1.325 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

I.1.326 **Mines-Ponts MP**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive, strictement croissante et non bornée. Montrer que si la suite $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, alors (*théorème de Stolz*) :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$
2. Déduire, à partir du théorème de Stolz, le lemme de Cesàro.
3. En utilisant le théorème de Stolz, établir que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$
4. (a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 0.$$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

   (b) Soit $\lambda \in]-1\,;1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - \lambda a_n = a \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{a}{1-\lambda}$.

I.1.327 **Mines-Ponts MP 2022**

Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions :

$$(u_1; v_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) v_n \\ v_{n+1} = v_n - \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

I.1.328 **X MP 2018**

Soit $x \in [-\pi\,;\pi]$. Montrer que

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

vaut x^2.

I.1.329 **Mines-Ponts MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On pose $\omega(n) = \min\left(\{p \in \mathbb{N}^* \mid H_p \geqslant n\}\right)$.
Donner une équivalent de $\omega(n)$.

I.1.330 **X ESPCI 2017**

1. Trouver la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, avec $x_0 \in]0\,;1[$.
2. Donner un équivalent de $x_n - 1$ quand $n \to +\infty$.

I.1.331 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Soit $\theta \in]0\,;\pi[$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta)x^k$.
   Montrer par l'absurde que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.

I.1.332 **X PC 2019**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs réelles, et convergeant uniformément sur I. On pose :

$$g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

I.1.333 **CCP MP**

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ un série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

I.1.334 **ENSEA/ENSIIE MPI 2024**

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$, puis calculer sa somme pour $x \geqslant 0$.

I.1.335 **CCP MP**

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a\,;+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0\,;+\infty[$.

I.1.336 **CCP MP**

1. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est bornée et que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers g. Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

I.1.337 **CCP MP**

1. Soit a et b deux nombres réels donnés avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a\,;b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

I.1.338 **CCINP MP 2025**

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)$, où x est un nombre réel.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f avec la condition $f(0) = 0$.
3. Déterminer le développement en série entière de f.

I.1.339 **CCP MP**

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A$$
$$\Downarrow$$
$$\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   (a) Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;+\infty[$? Justifier.

I.1.340 **CCINP MP 2025**

On pose $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geqslant 2$ entier :

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
$$(n+1)d_n = nd_{n-1} - d_{n-2}.$$
3. En déduire une information sur le rayon de convergence de $\sum d_n x^n$.
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. On admet que f vérifie l'équation :
$$(E) : (1-x)f'(x) - xf(x) = 1.$$
   Montrer que $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. En déduire une expression de d_n en fonction de n.

I.1.341 **Mines-Ponts MP 2025**

1. Décomposer X^4+1 en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que $X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^4+1}$.
3. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

I.1.342 **CCINP MP 2025**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1} n!$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

   Montrer que f est solution de l'équation $f' = f^2$ sur un intervalle à préciser.
3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
4. Exprimer u_n en fonction de n.

I.1.343 **CCINP MP 2025**

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.

   On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et on suppose que $\sum a_n$ converge.

   Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k).$$

3. En déduire que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

I.1.344 **Mines-Télécom MP 2025**

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n^2 \cos(x) \sin^n(x).$$

I.1.345 **CCINP MP 2025**

On pose $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ entier, $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k}$.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et on note $R > 0$ son rayon de convergence.

1. Montrer que pour tout $x \in]-R\,;R[$, $f^2(x) = f(x) - x$. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. Préciser R.
3. Développer $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1,\ c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

I.1.346 **CCINP PSI 2017**

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
4. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

I.1.347 **Centrale-Supélec MP 2017**

1. Rappeler le théorème d'interversion de lim et $\sum$ pour les séries de fonctions (ou théorème de la double limite).
2. On admet que :

$$\frac{\pi x}{\tan(\pi x)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, où $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.1.348 **X MPI 2023**

Soit $f : [0\,;+\infty[\to [0\,;+\infty[$ continue strictement croissante. Montrer que :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \text{ converge} \iff \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \text{ converge.}$$

I.1.349 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^n}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)$.

I.1.350 **CCINP PSI 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2x^2} \end{array}$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. Étudier la convergence uniforme de f sur $[\alpha\,;1]$, où $\alpha \in]0\,;1[$, puis sur $[0\,;1]$.

I.1.351 **X MP 2017**

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Que dire de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

I.1.352 **Mines-Ponts PSI 2022**

On pose :

$$\forall x > 0,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis déterminer un équivalent.
3. Déterminer la limite de S en 0.

I.1.353 **CCINP PSI 2022**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

I.1.354 **TPE/EIVP PC 2018**

Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

I.1.355 **CCINP PC 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) : x\sqrt{1 + \frac{x}{n}} = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution strictement positive, notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

I.1.356 **Mines-Télécom MP 2024**

1. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
2. Donner une valeur approchée de π à 10^{-10} près.

I.1.357 **Mines-Ponts MP 2022**

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

I.1.358 **CCINP MP 2022**

1. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe C^{n+1}.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite notée ℓ.
3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

I.1.359 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto x^n(1-\sqrt{x})$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

I.1.360 **ENS MP 2021**

Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes :
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}.$$
Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

I.1.361 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}.$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\theta_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ u_{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta_n)},$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}.$$
2. Déterminer θ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis trouver un équivalent de u_n.

I.1.362 **Mines-Télécom MP 2022**

Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

I.1.363 **CCINP PC 2024**

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}_+,\; f_k(x) = \frac{k^2}{k^2+1} x \exp(-kx).$$

1. Montrer que la série de $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

I.1.364 **CCINP MP 2017**

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers 0.

1. Déterminer la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $U_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On admet que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\; |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\right).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\; |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0.$$

3. La série $\sum_{n\geqslant 2} \ln(U_n)$ est-elle alternée ? Satisfait-elle les conditions permettant de dire que la série converge ?
4. Donner le développement en série entière de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln(U_n)$.

I.1.365 **Centrale-Supélec TSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Étudier la nature de la série $\sum v_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer la valeur de c, en utilisant $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

I.1.366 **X**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

I.1.367 **X MP MPI 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle majorée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

I.1.368 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$. On pose :

$$\forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}$.

I.1.369 **Mines-Télécom MP 2017**

On note $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots \dfrac{1}{n}$, et on s'intéresse à $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$.
Montrer l'existence de cette somme puis la calculer.
Indication : on pourra introduire une série entière.

I.1.370 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\exp(\sqrt{k})$.
Donner un développement asymptotique à 2 termes de S_n.

I.1.371 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle bornée. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \dfrac{1}{2}u_{n+1} = 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

I.1.372 **Centrale**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \underset{+\infty}{=} o(n)$.

I.1.373 **CCINP PC 2014**

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. On pose $\theta(t)=\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ qu'on prolonge par $\theta(0)=0$.

1. Montrer que θ est continue sur $]-\infty\,;1]$.
2. Soit $x\in[-1\,;1]$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\theta(t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}$.
   (b) On note $\displaystyle L(x)=\int_0^x\theta(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle L(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.
3. (a) Montrer que $L(x)+L(-x)=\dfrac{1}{2}L(x^2)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.
4. (a) Montrer que :
   $$L(x)+L(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(1-x).$$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$.

I.1.374 **Mines-Télécom MP 2017**

Posons $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}x^n$, pour θ réel fixé.

1. Démontrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer f', en déduire f.

I.1.375 **ENS MP 2017**

Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$X_0\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad X_{n+1}=X_n-\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}.$$

1. Si f est convexe, admet un unique zéro et f' ne s'annule jamais, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $f(x)=x^2-a^2$ où $a\in\mathbb{R}$, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon X_0.
3. Si $f(x)=x^2-2x+2$ et $X_0=0$, étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Toujours pour la fonction f de la question 3, montrer l'existence de deux intervalles tels que si X_0 appartient à l'un de ces deux intervalles, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

I.1.376 **ENS**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

On suppose que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge.

I.1.377 **ENSEA/ENSIIE MP 2017**

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur tout segment inclus dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?
3. Utiliser une autre méthode pour montrer la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

I.1.378 **CCINP MP 2018**

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2+n}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_S de S.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur D_S.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$:
$$\ln(1+x^2) - \ln(x^2) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x^2) - \ln(x^2) + \frac{1}{1+x^2}.$$
5. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0^+.

I.1.379 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\sin(\sqrt{n}\pi)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{t}\pi)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\sum v_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

I.1.380 **CCINP PC 2019**

Soit E_λ l'ensemble des suites de réels strictement positifs, vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Notons :

- si $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $v_0 = 1$,
- si $n \geqslant 2$, $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ et $w_0 = w_1 = 1$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E_\beta$.
2. (a) Montrer que :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).$$
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\geqslant 2} \in E_\lambda$ pour un certain λ à préciser.
3. (a) Donner la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Donner la nature de $\sum w_n$.
4. Soit $\lambda > -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$. On pose $\beta = \dfrac{1-\lambda}{2}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
   En déduire la nature de $\sum u_n$.
5. Soit $\lambda < -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$. Déterminer la nature de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
6. Que se passe-t-il pour $\lambda = -1$?

I.1.381 **Mines-Ponts MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\langle n\rangle$ l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\langle n\rangle} + 2^{-\langle n\rangle}}{2^n}.$$

I.1.382 **Mines-Ponts MP 2018**

On note $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

I.1.383 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier la nature de la série $\sum u_n$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(\mathrm{e}^{u_n} - u_n).$$

I.1.384 **CCINP PC 2018**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n > 0$. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge.

I.1.385 **CCINP PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer par une intégration par parties que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. (a) Montrer que :

   $$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

   (b) Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.
4. On définit la fonction f par :

   $$f : x \in \left]0; \tfrac{1}{2}\right[\longmapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}.$$

   Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left[0\,;\tfrac{1}{2}\right]$.
5. Donner un équivalent de u_n.

I.1.386 **Mines-Télécom PC 2018**

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n.$$

I.1.387 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan(x)\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

I.1.388 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt[4]{n}}.$$

I.1.389 **Mines**

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la nature de $\sum u_n(\alpha)$ en fonction de α.
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(2)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

I.1.390 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n = \dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2t^2}$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment.

I.1.391 **Mines-Ponts MP 2014**

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k)-\ln(n)}{k-n}.$$

I.1.392 **CCINP PC 2016**

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$$

   et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On pose $\alpha = b-a$, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que

   $$\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$$

   converge. Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.
3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $\dfrac{u_0(b-1)}{b-1-a}$.

I.1.393 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit f_0 une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}_+,\; f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g = \sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la calculer en fonction de f_0.

I.1.394 **CCINP MP 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}.$$

1. Montrer que :
$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\ell} + \sqrt{2\ell - 1}}.$$
2. En déduire que $u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$.
Justifier que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.
5. Trouver la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$.

I.1.395 **Centrale-Supélec MP 2023**

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir la continuité par morceaux de f sur I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$f_n \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
Dessiner le graphe de f_n pour un n choisi. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers une certaine fonction g, mais que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \neq \int_{\mathbb{R}_+} g.$$
3. Énoncer le théorème de la convergence dominée et le prouver avec l'hypothèse supplémentaire de convergence uniforme sur tout segment de I.

I.1.396 **Mines-Télécom MP 2017**

Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) x^n$$

et la limite de sa somme aux bornes de l'ensemble de définition.

I.1.397 **Mines-Ponts PC 2022**

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$, à valeurs réelles en prenant $f_0 : x \mapsto 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in [0\,;1],\; f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$, prouver l'encadrement :

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction f.

I.1.398 **CCINP MP 2023**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;1]$, puis démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

I.1.399 **Mines-Ponts PSI 2015**

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

I.1.400 **ENS MP 2019**

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supérieure à toute série entière réelle en $+\infty$?

I.1.401 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)^{n\ln(n)}}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

I.1.402 **Mines-PSI 2016**

On pose $f_n(x) = x|\ln(x)|^n$ pour $x \in]1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme.

I.1.403 **Mines-Ponts PC 2017**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive de limite nulle. On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)^a_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s\,;+\infty[$ ou $]s\,;+\infty[$.
2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s\,;+\infty[$.

I.1.404 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite réelle telle que $\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur à un. On pose $a_1 = 1$ et on suppose que $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $B(0,1)$.

1. Soit $z \in B(0,1)$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in B(0,1)$. On suppose que $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f(z)) \geqslant 0$.

I.1.405 **Mines-Ponts MP 2015**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que constate-t-on ?

I.1.406 **Centrale-Supélec MP 2016**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k}\right).$$

1. Rappeler le théorème de sommation des relations de comparaison.
2. Montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.1.407 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \cos(n^\alpha t^2)\,\mathrm{d}t$.

I.1.408 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(n^a u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ et en déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}.$$

Conclure sur la nature de la série de terme général u_n.

I.1.409 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[,\mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{array}{rcccc} f_n & : & [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{n}{x}\left(f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) \end{array}$$

1. Montrer la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On se place dans des cas particuliers.
   (a) *Cas* $f = \ln$: montrer la convergence uniforme.
   (b) *Cas* $f = \sin$: montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que f est de classe C^2 et que $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$.

I.1.410 **X-ENS**

Soit a et x deux nombres réels. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(an)}{n} x^n.$$

I.1.411 **CCINP PSI 2017**

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n \to +\infty$.

I.1.412 **Mines-Télécom MP 2017**

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

I.1.413 **X 2023**

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et pour $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}.$$

Trouver un équivalent de a_n et majorer la constante qui y apparaît.

I.1.414 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit a, b, c trois nombres complexes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = a^n + b^n + c^n$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Montrer que $\ell \in \{0; 1; 2; 3\}$.

I.1.415 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On considère les deux propositions suivantes :

- $(P_1) : a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $(P_2) : \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge

Trouver les implications entre (P_1) et (P_2).

I.1.416 **Mines-Ponts MP 2018**

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

Étudier cette suite de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment).

I.1.417 **Mines-Ponts PC 2022**

Développer la fonction arccos en série entière sur $]-1\,;1[$.
Ce développement est-il valable sur $[-1\,;1]$?

I.1.418 **CCINP PSI 2022**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions sur $[0\,;1]$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1\,;1],\ f_n(x) = \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction F que l'on exprimera.
2. Montrer que, pour tout $a \in]0\,;1[$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a\,;1]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1\,;1]$?
4. Comparer éventuellement la limite de $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ en $+\infty$ et $F(0)$.

I.1.419 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière dont f est la somme ?
2. Si existence, donner la valeur de $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

I.1.420 **Mines-Télécom PSI 2019**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{\sqrt{2n+n^2}} x^{2n}.$$

I.1.421 **Mines-Télécom PSI 2019**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. Calculer I_0, I_1, $I_n + I_{n+1}$.
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme.

I.1.422 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^n \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. On note f la somme de la série.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^1.
3. Donner un équivalent de f en 1^-.

I.1.423 **CCINP PSI 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à définir.
2. On considère la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées. Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[-1\,;1]$.

I.1.424 **CCINP PSI 2015**

Soit $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

1. Quel est le domaine de convergence de la série des $u_n(x)$?
2. On note $S(x)$ la somme. Montrer que la fonction S est de classe C^1.

I.1.425 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive de limite nulle, telle qu'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$a_{n+1} - a_n \sim -\lambda a_n^\alpha.$$

Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.
Indication : on pourra considérer $a_{n+1}^\beta - a_n^\beta$ pour β bien choisi.

I.1.426 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux *familles sommables* complexes, i.e. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ (et de même pour b).

1. On note
$$\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$$
et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$(a \star b)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}.$$
Montrer que $a \star b$ est bien définie, sommable et que :
$$\|a \star b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1.$$
Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ sommable. On pose, pour $z \in \mathbb{U}$,
$$F_a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$
Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.
3. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ telle que pour toute famille $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$, $a \star e = e \star a = a$.
4. Soit $a \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ sommable et inversible pour $\star$. Montrer que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$.
5. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille à support fini et à valeurs complexes telle que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$. Montrer que a est inversible pour $\star$.

I.1.427 **Mines-Ponts MP 2015**

Développer en série entière en 0 la fonction $t \mapsto \arctan(1+t)$.
Indication : considérer la dérivée, et passer dans $\mathbb{C}$.

I.1.428 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

   Soit N un entier naturel et x un réel tel que $|x| < 1$.

2. Simplifier $\prod_{n=0}^{N} \left(1 + x^{2^n}\right)$.
3. Expliciter f.

I.1.429 **CCINP PC 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On pose $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, dite *dérivée* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, divergente vers $+\infty$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

On pose $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$.

1. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. (a) Trouver un équivalent de $\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1$ puis déterminer la limite de $\Delta \exp(\alpha_n)$.

   (b) Montrer que $\exp(\alpha_n) \sim n$.
3. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{\alpha_n}$ diverge.

I.1.430 **ENSEA/ENSIIE**

On considère, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

I.1.431 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{[n;n+1]} |f'|.$$

2. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$?

I.1.432 **Centrale MP**

Quelle est la nature de la série
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}{n^{\frac{2}{3}}}\ ?$$

I.1.433 **X MP/PC 2024**

Soit $f \in C^1([1\,;+\infty[,\mathbb{R})$ telle que :
$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
Montrer que
$$\sum_{n\geqslant 1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
ont même nature.

I.1.434 **Mines-Télécom PC 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x^n)}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La convergence est-elle uniforme ?

I.1.435 **TPE/EIVP MP 2015**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe
$$\sin\left(\frac{\exp(2x)}{n+\exp(x)}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite sur un segment $[a\,;b]$.
4. Étudier la suite $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

I.1.436 **Mines-Ponts MP 2015**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \mathrm{e}^{nx_n} = 1$.
2. Étudier l'existence et la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est-elle convergente ?
4. Donner un équivalent de x_n.

I.1.437 **ENS**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

I.1.438 **Mines-Ponts MP 2015**

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{an+b} \right)^{n \ln(n)}$$

selon la valeur des réels strictement positifs a et b.

I.1.439 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-x^3t^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

I.1.440 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λ.

I.1.441 **TPE/EIVP MP 2018**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

1. Montrer que S est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$ et en 0.

I.1.442 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(n-k)!} = 1.$$

1. En considérant la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, calculer u_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.443 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. On suppose que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de A_n.
2. On suppose que $A_n \sim 2\sqrt{n}$. A-t-on $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$?
3. On suppose en outre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. Montrer que :
$$\frac{A_{\lfloor \beta n\rfloor} - A_n}{\lfloor \beta n\rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{A_{\lfloor \alpha n\rfloor} - A_n}{\lfloor \alpha n\rfloor - n}.$$
Conclure que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

I.1.444 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers a et b. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

I.1.445 **Centrale-Supélec MP 2014**

On considère une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Pour x réel convenable, on introduit :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière, puis donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est croissante sur $[0\,;1[$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
3. On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{n} = +\infty$. Soit A un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $x \in [0\,;1[$:
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \frac{x^{An_0}}{1-x^A}.$$
4. Avec la même hypothèse, prouver que :
$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = 0.$$
5. On suppose maintenant que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)f(x) = 0$. En étudiant $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{p_n}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{n} = +\infty$.

I.1.446 **x**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^2-k}.$$

Montrer que :

$$a_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.1.447 **Mines-Ponts MP 2016**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.$$

2. En déduire un équivalent v_n de u_n, puis un équivalent de $u_n - v_n$.

I.1.448 **x**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : &]n\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} \end{array}$$

Soit $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel, noté x_n, tel que $f_n(x_n) = a$.
2. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.449 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ converge et que la limite vaut :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \int_0^1 \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge et déterminer sa valeur.
3. Même question pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ lorsque $\theta \in]0\,;\pi[$.

I.1.450 **CCINP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x^2 \exp\left(-\frac{\sin(x)}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

I.1.451 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout réel x, on pose $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, la partie décimale de x.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \ln(k)}.$$

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?

I.1.452 **CCINP MP 2017**

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(\sin(x))^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}.$$
3. En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

I.1.453 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? Si oui, trouver sa limite.

I.1.454 **CCINP PC 2014**

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)=0.$$

I.1.455 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs positives telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Montrer que :

$$x>\frac{1}{2}\implies\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^x}\text{ converge.}$$

Donner un contre-exemple pour $x=\frac{1}{2}$.

I.1.456 **Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0\,;1],\ g_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x g_n(1-t)\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|g_{n+1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty.$$

2. On pose :

$$G:x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x).$$

Montrer que G est bien définie sur $[0\,;1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G.

3. En déduire l'expression de G.

I.1.457 **CCINP MP 2017**

Soit $f:[1\,;\mathrm{e}[\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1\,;\mathrm{e}[$.
On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$f_n(t)=\begin{cases} t^{\frac{1}{n}}f(t) & \text{si } t\in\left[1\,;\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right[\\ 0 & \text{si } t\in\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\mathrm{e}\right[\end{cases}$$

1. Montrer, en justifiant très précisément, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[1\,;\mathrm{e}[$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I.1.458 **CCINP PSI 2017**

On pose :

$$u_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \exp(-nx^2).$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) sur $[0\,;+\infty[$;
   (b) sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

I.1.459 **CCINP PC 2017**

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. Notons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi b_n x).$$

1. Montrer que la série définissant f converge normalement sur $[0\,;1]$.
2. Montrer que f est définie et continue sur $[-1\,;1]$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que
   $$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
   converge et déterminer sa limite.
5. Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\mathrm{i}b_n\frac{k}{N}\right)$$
   vaut N si N divise b_n et 0 sinon.
   Notons $I_n = \{n \in \mathbb{N}^* \mid N \text{ divise } b_n\}$.
   Montrer que $S_N = \displaystyle\sum_{n\in I_N} a_n$.
6. On choisit $b_n = n!$ et $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
   Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geqslant N\} \subset I_N$, puis que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} NS_N = +\infty$.

I.1.460 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout entier n, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right)?$$

I.1.461 **X**

Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

I.1.462 **CCINP MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(1+\mathrm{e}^{-nx}) \end{array}$$

1. Vers quelle fonction la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
3. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x.$$

I.1.463 **Mines-Ponts MP 2018**

Donner un développement asymptotique à l'ordre 3 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.1.464 **CCINP PC 2021**

On considère une application $f_0 \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.
2. (a) Montrer que f_1 est de classe C^1 et déterminer f_1'.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n.
   On admet provisoirement la propriété suivante :
$$\forall a > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a\,;a],\ |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$
3. (a) Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $F' - F = f_0$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
5. Prouver la propriété admise.

I.1.465 **Mines-Ponts MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$.

I.1.466 **CCINP MP 2018**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-\beta}$ et $b_n = \dfrac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = -R$ et $x = R$.

I.1.467 **X 2014**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{x_{n+1}}{2} = 1.$$

Montrer la la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

I.1.468 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Trouver a, b et c tels que $I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

I.1.469 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $]-1\,;+\infty[$. Démontrer l'équivalence entre les propriétés :

i) $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0$

ii) $\mathrm{e}^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$

I.1.470 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R, telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout p ?

I.1.471 **CCINP PC 2024**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. (a) Rappeler le théorème de Cesàro.
   (b) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :
   $$\lim_{n\to+\infty}(w_{n+1} - w_n) = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$
   Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n$.
3. On pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent simple de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.472 **Centrale-Supélec 2012**

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de limite nulle, alors les séries $\sum a_n$ et $\sum(a_n + a_{n+1})$ sont de même nature. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose pas que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$?

I.1.473 **X 2011**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}.$$

Calculer la limite de cette suite.

I.1.474 **ENS PC 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est convergente.

On suppose que la suite $\displaystyle\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note sa limite s.

On pose $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\displaystyle B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que la suite $\displaystyle\left(\frac{A_n}{B_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

I.1.475 **CCINP MP 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive qui converge vers 0. Pour $x \in [0\,;1]$, on note $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série.
   Indication : on pourra majorer les restes en calculant la somme de $k = n+1$ à $+\infty$ de x^k.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
5. Étudier la convergence normale de la série.
   Indication : on pourra calculer la norme infinie de u_n.

I.1.476 **Mines-Télécom MP 2023**

Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.

I.1.477 **Mines-Ponts PSI 2025**

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que :

$$\forall n \neq m,\ |z_n - z_m| \geqslant \sqrt{2}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On note $M(z_n) = (x_n; y_n)$ pour $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ et

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid M(z_n) \in [-A; A]^2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est fini.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.

I.1.478 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $\varepsilon = (\varepsilon_0; \ldots; \varepsilon_{n-1})$ de $\{0,1\}^n$, on pose :

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k.$$

1. Montrer que Φ est injective et déterminer son image.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

   $$u_n : x \longmapsto \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right).$$

   Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]-1\,;1[$ et préciser sa limite simple.

I.1.479 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R.
On pose $f_n(x) = a_n x^n$.

1. Montrer la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[-r\,;r]$ pour $0 < r < R$.
2. En déduire la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Rappeler le développement de la fonction arctan en 0.
   Montrer qu'il reste valable en 1.

I.1.480 **Mines-Ponts PC 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité :
$$\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right).$$
3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.
4. Démontrer la relation $v_n = n\ln(n) - n + o(n)$.
5. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

I.1.481 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n x_n$ converge.

1. On suppose, uniquement dans cette question, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$
2. Expliquer l'analogie entre transformation d'Abel et intégration par parties.
3. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$
   (Dans le cas général cette fois.)
4. La décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle nécessaire au résultat précédent ?

I.1.482 **CCINP PC 2019**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{nt}).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que, pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1 + x) \leqslant x$.
3. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = \ln(2)$.

I.1.483 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

Soit $h \in C\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et $f_n : h(x)\sin^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.484 **Centrale**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n^2+n}$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leqslant b$.

   Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{b^2n^2+2an}$.
3. Montrer que tout élément de $[0\,;1]$ est la limite d'une certaine sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.1.485 **X-ENS**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes toutes définies sur un même intervalle ouvert I, et à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f.

I.1.486 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^n}\,\mathrm{d}u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\phi)}{1+\phi}\,\mathrm{d}\phi$.

1. Calculer $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
2. Calculer J après avoir montré son existence.
3. Trouver $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

I.1.487 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
2. Quel est le lien entre f et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\sqrt{x}\sin(t)}\,\mathrm{d}t$?

I.1.488 **CCINP PC 2018**

On considère la série entière $\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$.
Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

I.1.489 **ENS MP Cachan/Rennes 2017**

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[0\,;\pi]$:

$$\sin(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{x}{\pi}.$$

On admet que pour q appartenant à $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \leqslant \frac{1}{(q+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Montrer qu'il existe C appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0\,;\pi],\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{x} \leqslant C.$$

On pose pour tout x appartenant à $[0\,;2\pi]$:

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{et si } k \in \mathbb{N}^*,\ n_k = 2^{k^3} \text{ et finalement :}$$

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sin(n_k x) q_{n_k}(x)}{k^2}.$$

3. Montrer que S_m converge vers une fonction f continue sur $[0\,;\pi]$.
4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos(px) S_m(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite quand m tend vers $+\infty$, notée $A(p)$.
5. Calculer $A(p)$.

I.1.490 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

I.1.491 **CCINP PC 2022**

Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction suivante :

$$u_n \ : \ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+n)-f(n) \end{array}$$

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque $\sum u_n(x)$ converge.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = f(N+1) - f(1).$$

   En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Dans cette question, on prend pour f la fonction

$$x \longmapsto \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

   Montrer que $F(1)$ existe.
3. Dans cette question, on prend pour f la fonction

$$x \longmapsto \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\right).$$

   Montrer que $F(1)$ n'existe pas.
   Indication : on pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

I.1.492 **CCINP PSI 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Montrer que la somme S est de classe C^1.
3. Calculer $S(1)$.

I.1.493 **X 2013**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique x_n réel qui est solution de l'équation $x\mathrm{e}^x = n$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent de x_n.

I.1.494 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On considère la série entière $\sum_{n \geqslant s} \binom{n}{s} x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Calculer sa somme $S(x)$.

I.1.495 **CCINP**

Soit $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer, pour $(p;q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{p,q}$.
2. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n}$ est-elle convergente ou divergente ?
3. Donner le domaine de définition réel de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n} x^n$.

I.1.496 **ENS PC 2023**

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sin(2n!\mathrm{e}\pi))^{\alpha}.$$

I.1.497 **Mines-Ponts**

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{z^k}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|P_n(z)| \leqslant P_n(-|z|)$. En introduisant un logarithme, en déduire que la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En étudiant la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_{n+1}(z) - P_n(z)$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit :
$$f : z \longmapsto \lim_{n\to+\infty} P_n(z).$$
3. Montrer que f est continue en 0.
4. Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 telle que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (1-z) f\left(\frac{z}{2}\right) \ \text{ et } \ f(0) = 1.$$
5. Montrer que f est développable en série entière.

I.1.498 **Mines-Ponts PC 2013**

Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-n^3) \int_0^n \exp(t^3)\,\mathrm{d}t.$$

I.1.499 **X MP 2019**

Pour tout $x \in]-1\,;1[$, on pose :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

1. Montrer que P est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(n)x^n,$$

   où $p(n)$ représente le nombre de façons d'écrire n comme une somme d'entiers naturels.
3. Montrer que pour x tendant vers 1 par valeurs négatives,

$$P(x) = \exp\left(\frac{\zeta(2)}{1-x}(1+o(1))\right),$$

   où $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

I.1.500 **Mines-Ponts MP 2025**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^4)^n}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad h_n(x) = a_n x^{2-4n}.$$

3. En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$.

I.1.501 **Mines-Télécom PSI 2025**

Trouver la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

I.1.502 **Mines-Ponts MP**

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0, la suite définie par

$$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$

est-elle croissante ?

I.1.503 **Mines-Ponts PC 2025**

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin^n(x)\cos^\alpha(x) \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I.
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

I.1.504 **Mines-Ponts MP 2025**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in \left]0\,;1\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

I.1.505 **Mines-Télécom MP 2022**

Trouver la nature de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

I.1.506 **CCINP PSI 2022**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.
2. Définir par récurrence deux suites de nombres naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p_n}{q_n}$$
et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.
3. Trouver une expression de u_n en fonction de n.

I.1.507 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}.$$

1. Montrer que, si $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $\alpha = 1$?

I.1.508 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.509 **Mines-Télécom MP 2017**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$

1. à l'aide d'un développement limité ;
2. en étudiant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$;
3. en montrant que le critère des séries alternées s'applique.

I.1.510 **X MP 2017**

On admet l'énoncé suivant :

Pour tout réel α, s'il existe une suite de rationnels $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\varepsilon_n}{q_n}$ avec $\varepsilon_n = o(1)$, alors α est irrationnel.

Soit la suite de terme général $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$ est irrationnel.

I.1.511 **CCINP PSI 2016**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer l'existence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$.

I.1.512 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.1.513 **Mines-Télécom 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que f est continue, puis qu'elle est C^∞.
3. Étudier la croissance de f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Trouver un équivalent simple de f en 0.

I.1.514 **Mines-Télécom MP 2019**

1. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On pourra regrouper les termes deux à deux dans la somme partielle.
2. Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

I.1.515 **ENS MP 2014**

On note $\mathcal{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$ et f ne s'annule en aucun autre point. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients complexes qui converge uniformément vers f. Montrer que pour tout réel r strictement compris entre 0 et 1, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N, le polynôme P_n admet une racine dans $B(0, r)$.

I.1.516 **ENS MP 2023**

On admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que :

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor.$$

I.1.517 **CCINP PC 2013**

Soit $I =]0\,;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I. On note S la somme associée.
2. (a) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Montrer que la série converge normalement sur $[a\,;b]$.
   (b) En déduire la continuité de S.
3. Montrer que S est dérivable sur I, et que l'on a :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}$$

4. (a) Montrer que :

$$\frac{p-1}{(n+1)(n+p)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p}.$$

   (b) En déduire que $S(p) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$.
5. Calculer $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.

I.1.518 **X-ENS Cachan PSI 2019**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, de limite nulle, et $\alpha > 1$.
On suppose que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}^*.$$

L'objectif est de montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha < 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang N.
2. Soit $\alpha < 2$.
   À l'aide de l'inégalité suivante (que l'on justifiera) :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t,$$

   montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha}$ converge. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.
3. Soit $\alpha \geqslant 2$.
   Montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ diverge et en déduire que la série de terme général u_n diverge également.

I.1.519 **Mines-Ponts MP 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme :

$$Q_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

1. Déterminer les racines de Q_n.
2. Démontrer alors que celui-ci s'écrit :

$$Q_n = X\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

3. En déduire que, pour tout x réel,

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

I.1.520 **Mines-Télécom MP 2024**

Pour $n \geqslant 3$ entier, on considère l'équation suivante :

$$(E_n) : \mathrm{e}^x = x^n.$$

1. Montrer que (E_n) admet deux solutions $\alpha_n < \beta_n$.
2. Trouver la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Donner un équivalent de β_n.
4. Donne un développement à deux termes de β_n.

I.1.521 **Centrale**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

I.1.522 **X ESPCI 2017**

On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante positive. Montrer que :

$$\sum A_n \text{ converge} \iff A_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sum n(A_n - A_{n+1}) \text{ converge.}$$

I.1.523 **X MP 2022**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)}{\sqrt{1-x}}.$$

On sait que f est développable en série entière et on peut écrire $f(x) = \sum c_n x^n$.
Montrer que $c_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi n}}$.

I.1.524 **Centrale-Supélec PC 2019**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k).$$

1. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{k^\beta} = \frac{S_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) - 1.$$

   (b) Montrer que la série de terme général $U_n = \dfrac{\cos(n)}{n^\beta}$ converge.

2. Soit $\alpha > 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général

$$V_n = \sqrt{n^\alpha + \cos(n)} - n^{\frac{\alpha}{2}}$$

converge.

I.1.525 **CCINP MP 2023**

Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ entier :

$$\int_1^n (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

3. Pour $x \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.
4. Déterminer un équivalent de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant 2}$ et en déduire la nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

I.1.526 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & n^\alpha x^n (1-x) \end{array}$$

Déterminer les modes de convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.527 **X ESPCI 2016**

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions définies pour $x > 0$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{\lfloor \ln(k) \rfloor}.$$

I.1.528 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = -1 \text{ et } u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + (n+2)u_n.$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$$

en supposant le rayon de convergence non nul.

1. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
2. Résoudre cette équation pour en déduire f.
3. Déduire l'expression de u_n.

I.1.529 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)} \, \mathrm{d}x.$$

Étudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n^\alpha}{n^\beta}$ pour $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

I.1.530 **Centrale**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $(u_0; u_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}.$$

Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

I.1.531 **ENS PC 2024**

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant :

$$a_{n+1} = 10^n a_n^2.$$

Pour quels $a_1 > 0$ a-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$?

I.1.532 **Centrale**

On considère, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation suivante :

$$x + \ln(x) = n.$$

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0\,;+\infty[$, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.
   On pourra poser a_n tel que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$.
5. Démontrer que :
$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

I.1.533 **ENS PC 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|$ converge.

I.1.534 **ENS PC 2024**

On cherche à calculer la valeur maximale de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

parmi les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de nombres positifs telles que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

1. Calculer S dans le cas où les $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite géométrique.
2. En déduire la valeur maximale de S parmi les suites géométriques.
3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :
$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
4. On note $G_n = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que :
$$G_n \leqslant \frac{1}{n2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} 4^k a_k.$$
5. En déduire que $S \leqslant \dfrac{2}{3}$.

I.1.535 **Centrale-Supélec MPI 2024**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence et les coefficients du développement en série entière de $(1+u)^\alpha$.

   On note $\binom{\alpha}{n}$ de tels coefficients (extension des coefficients binomiaux aux réels).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\beta > 0$. Notons :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\beta}{k}\right).$$

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.
3. (a) Soit α et α' deux réels. Montrer que :

$$\binom{\alpha+\alpha'}{n} = \sum_{\substack{(p;q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha'}{q}$$

   (b) Soit $0 < x < y$. Montrer que :

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}.$$

   (c) Montrer que $2^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$.

I.1.536 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Cette suite possède-t-elle une limite ℓ ?
3. Si oui, donner un équivalent de $a_n - \ell$ en $+\infty$?

I.1.537 **ENS PC 2025**

Soit un réel $\beta > \frac{1}{2}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \leqslant \frac{2\beta}{2\beta-1}.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+|\sigma-n^2|)^\beta} \leqslant C.$$

I.1.538 **ENS PC 2025**

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7.$$

Montrer que que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

I.1.539 **ENS PC 2025**

Soit $\gamma \in]0\,;1]$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite lde positifs réels. On suppose que :

$$\forall n \geqslant 1,\, x_{n+1} \leqslant x_n + x_n^{1-\gamma}.$$

Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que :

$$\forall n \geqslant 1,\, x_n \leqslant Dn^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Que se passe-t-il pour $\gamma = 0$?

I.1.540 **ENS PC 2025**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ et $c > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| \leqslant ca_n^2$. Montrer qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant \frac{d}{n}$.

I.1.541 **ENS PC 2025**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_{n,N} \in \mathbb{R}$ (pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$) tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\, \lim_{n\to+\infty} x_{n,N} = \alpha.$$

Montrer qu'il existe une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs entières telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n,N_n} = \alpha.$$

I.1.542 **ENS PC 2025**

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$$

satisfait

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

I.1.543 **ENS PC 2025**

Soit $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

converge-elle ?

I.1.544 **ENS PC 2025**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que $u_1 > 0$ et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$.
On suppose que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

diverge.

1. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(u_1 + \cdots + u_n)^2}$$
converge.
2. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$$
diverge.
3. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que pour toute suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui satisfait
$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 < +\infty,$$
la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$
converge.
Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$$
converge.

I.1.545 **ENS PC 2025**

1. Soit J un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $+\infty$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}\setminus J$, $f^{(j)}(0) = 0$ et pour tout $j \in J$, $f^{(j)}(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. Est-ce toujours vrai si J est infini ?

I.1.546 **ENS PC 2025**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| < 1,$$

et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i u_{n+i}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

I.1.547 **X MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et majorée. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = 0$.

ii) Il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ de densité nulle, c'est-à-dire vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}(A \cap [\![0\,,n]\!])}{n} = 0,$$

telle que $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}} a_n = 0$.

I.1.548 **X-ENS**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Démontrer que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

I.1.549 **Mines 2024**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ (n+2)u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer sa limite.

I.1.550 **Mines 2024**

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_j = \min \left\{ n \geqslant 1 \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant j \right\}.$$

Justifier que la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Converge-t-elle ? Démontrer :

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \mathrm{e}.$$

I.1.551 **PT 2017**

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{1+(na)^2}.$$

1. Étudier la convergence de la série.
   La somme est notée $h(a)$.
2. Étudier les variations de h, puis sa limite en $+\infty$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1+((k+1)a)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{1+(ta)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+(ka)^2}.$$

4. Donner un équivalent de h en 0.

I.1.552 **Mines-Ponts MP 2013**

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{\frac{1}{n}}.$$

I.1.553 **ENS MP 2014**

Soit X un espace de Hilbert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On suppose qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Il existe un vecteur $u \in X$ tel que pour tout $v \in X$ la suite $(\langle u_n, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\langle u, v\rangle$.

1. Montrer que l'on peut extraire une suite $u_{\varphi(n)}$ telle que la suite

$$\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} u_{\varphi(i)} \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

   converge vers u.
2. Trouver un exemple de suite qui vérifie les deux premières propriétés dans l'ensemble des suites de carré sommable.

I.1.554 **Centrale-Supélec TSI 2024**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
2. Écrire le développement limité de v_n à l'ordre $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.
3. Déterminer la nature de $\sum v_n$.
4. Qu'a-t-on voulu montrer avec cet exemple ?

I.1.555 **ENS MP 2014**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions 2π-périodiques à valeurs complexes qui vérifie les propriétés suivantes :

- Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leqslant M$.
- Pour tout $(m; n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\int_0^{2\pi} f_m(x) f_n(x) \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que l'on ne peut pas extraire de sous-suite qui converge simplement vers une fonction f.

I.1.556 **C.C.E. Mines PC 2019**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
2. Déterminer sa limite.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que u_n soit équivalent à $\dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.557 **C.C.E. Mines MP 2015**

Soit f la fonction réelle de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}.$$

1. Étudier f : domaine de définition, continuité, dérivabilité.
2. Reconnaître f.

I.1.558 **C.C.E. Mines PC 2015**

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de terme général f_n.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de terme général f_n.

I.1.559 **C.C.E. Mines PSI 2015**

Donner le développement en série entière de $\cos^3(x)$.

I.1.560 **C.C.E. Mines PC 2014**

Déterminer, selon la valeur du réel a, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n+a}\right)^{n}.$$

I.1.561 **Navale MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation

$$n\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) = x$$

admet une solution dans $]-2\,;-1[$, puis étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des solutions.

I.1.562 **Navale MP 2024**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ F_n(x) = \sin(x)\cos^n(x).$$

1. Étudier la convergence de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $G_n = nF_n$.
3. On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} G_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer I_n et déterminer sa limite.

I.1.563 **Navale MP 2023**

Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

I.1.564 **Navale PSI 2019**

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

I.1.565 **X**

Soit $\alpha \in]2\,;+\infty[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_0 = \alpha \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

I.1.566 **CCINP MP 2025**

Soit

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}.$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, ainsi que la fonction somme.

I.1.567 **X MP 2025**

On pose :

$$U_n = \mathrm{Card}\{(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 = n\}.$$

Trouver une équivalent en $+\infty$ de :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} U_k}{n}.$$

I.1.568 **PT 2018**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $0 < \ln(x+1) < x$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
   (a) Montrer que $\mathrm{e}^{x_n} \sim \mathrm{e}^{y_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.
   (b) Si $x_n \sim y_n$, peut-on affirmer que $\mathrm{e}^{x_n} \sim \mathrm{e}^{y_n}$?
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à valeurs positives.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. On note $v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$.

I.1.569 **PT 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a_n) = 1$. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
2. Calculer a_0, a_1 et a_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite si elle existe.

I.1.570 **Mines-Télécom 2023**

Étudier la convergence de la série suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin\left((n(n+1))^{-1}\right)}{\cos\left(n^{-1}\right)\cos\left((n+1)^{-1}\right)}.$$

I.1.571 **Mines-Télécom 2023**

En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$.

I.1.572 **Mines-Télécom 2017**

Déterminer les couples $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \left(2 + (an+b)\ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right)\right)$$

converge.

I.1.573 **ENS 2025**

1. Déterminer le sens de convergence des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{|\sin(n)|}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que
$$1 \leqslant q \leqslant N \quad \text{et} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}.$$
3. En déduire le sens de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n \sin(n)}$.

I.1.574 **PT 2022**

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

On considère également les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -7u_n + 12v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -6u_n + 10v_n.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. On suppose que $a = b = 1$. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $3b - 2a > 0$.

I.1.575 **PT 2019**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?
3. On admet que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels équivalentes telles que $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.
   (a) Déterminer la limite de $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et en déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Trouver un équivalent de $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et en déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$.

I.1.576 **PT 2018**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels à termes positifs.

1. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+nu_n}$ dans les trois cas suivants :
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$
   (c) $u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Quel est la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$?
3. Montrer que si $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

I.1.577 **PT 2023**

On suppose qu'il existe $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$a_n = \cos(2^n x) > \cos(2^n y) = b_n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Calculer $a_{n+1} - b_{n+1}$ et montrer que $a_n > |b_n|$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$.

2 Continuité et dérivabilité

I.2.1 **Mines-Ponts**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P' + \alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

I.2.2 **ENS Ulm**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P > 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$ avec $n = \deg(P)$. Montrer que $Q > 0$ sur $\mathbb{R}$.

I.2.3 **Mines-Ponts**

Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.

I.2.4 **X PC 2020**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose $f' \geqslant 0$ et $0 \leqslant f'' \leqslant f$.
Montrer que $f' \leqslant f$.

I.2.5 **Mines-Ponts MP**

Soit $a < b$ deux nombres réels et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a\,;b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f. Montrer que $(\min(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\min(f)$ et que $(\max(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\max(f)$.

I.2.6 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}\arctan(x)$.

1. La fonction f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Le cas échéant, donner une équation de cette droite.
2. Étudier les variations de f.

I.2.7 **Mines-Ponts**

Soit $a \in]0\,;1]$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est égale à sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(ax)$.

I.2.8 **Mines-Télécom MP**

1. Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$.
2. Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ croissante. Montrer que la fonction f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0\,;1]$ tel que $f(x) = x$.
   Indication : on pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) < x\}$.

I.2.9 **Mines-Télécom MP**

Soit f et g deux fonctions de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$, continues et vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0\,;1]$ tel que $g(a) = a$.
2. Supposons que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) > g(x)$.
   Montrer que la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

I.2.10 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit f et g deux fonctions appartenant à $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ g$ est strictement décroissante.

1. Montrer que $f \circ g$ admet un unique point fixe.
2. Montrer que $g \circ f$ admet un unique point fixe.

I.2.11 **X-ENS**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout segment $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, $f([a\,;b])$ est un segment, et $f^{-1}(\{x\})$ est un fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

I.2.12 **CCP**

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une application f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a\,;b]$. Montrer que f est continue en x_0.
2. On pose, pour tout $x \in [0\,;1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

I.2.13 **CCP**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a\,;b]$ et que f est dérivable sur $]a\,;x_0[$ et sur $]x_0\,;b[$. Démontrer que si la fonction f' admet une limite en x_0, alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$

   est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

I.2.14 **X PC 2009**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f est infini.

I.2.15 **CCP**

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée dans la question précédente.

I.2.16 **X PC 2019**

Soit f une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t un nombre réel. Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x+t) = f(x)$.

I.2.17 **X-ENS 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle $C^1, C^2, \ldots$?

I.2.18 **Petites Mines 2015**

Soit $f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0\,;1[$ tel que $f'(c) = 0$.

I.2.19 **X-ENS 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f, C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que les coefficients de la série de Taylor de f sont des nombres rationnels.

I.2.20 **CCP 2015**

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est prolongeable en une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

I.2.21 **Centrale 2015**

Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]0\,;1[$.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe sur $]0\,;1[$.

I.2.22 **CCP MP**

On désigne par $C([0\,;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0\,;1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est nulle sur l'intervalle $[0\,;1]$.

I.2.23 **CCP 2016**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f.
3. Préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $f(D)$.

I.2.24 **ENS Ulm**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g. Montrer que g est continue.

I.2.25 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = M(x)^T M(x)$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $A : \mathbb{R} \to A_n(\mathbb{R})$ une application continue et $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1, solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

I.2.26 **X-ENS**

1. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $T = \{(x;y) \in I^2 \mid x < y\}$. On considère deux couples $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ appartenant à T. Pour $t \in [0\,;1]$, on pose $u(t) = (1-t)x_1 + tx_2$ et $v(t) = (1-t)y_1 + ty_2$.
   Montrer que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $(u(t);v(t)) \in T$, et en déduire que f est strictement monotone.
2. Soit f dérivable sur I telle qu'il existe $(a;b) \in I^2$ vérifiant $f'(a)f'(b) < 0$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   Quel théorème peut-on ainsi montrer ?
3. Déterminer les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas, telles que $|f''| = f$.

I.2.27 **CCP 2017**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et celui de f'.
2. Calculer $f'(x)$. Conclure.

I.2.28 **Mines-Ponts PSI**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $e \in E$ et $T_e : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 e(t)f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.
Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.
Indication : considérer $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

I.2.29 **ENS MP MPI**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux.
Quels sont les points de continuité de f ?

I.2.30 **CCP**

On considère la série de fonctions $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Étudier le domaine de définition de la fonction S et sa continuité.
2. Montrer que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.31 **TPE/EIVP**

Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-a)^n(X-b)^n$. Donner une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de P et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ en fonction de n.

I.2.32 **Mines-Ponts PSI**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

I.2.33 **Centrale PC**

Soit $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0\,;1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0\,;1] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+(n(x-\alpha))^2}}$.

   Montrer que la suite $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.
2. L'application $\Phi : f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_2$?
3. Existe-t-il un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

I.2.34 **X**

Existe-t-il une injection continue de $[0\,;1]^2$ dans $[0\,;1]$?

I.2.35 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

I.2.36 **Mines-Télécom PC 2022**

En appliquant le théorème des accroissements finis, prouver l'encadrement :

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[, \qquad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

I.2.37 **ENS MP 2017**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = 0$. Pourquoi a-t-on f constante sur $\mathbb{R}$?

I.2.38 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $k : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.

1. Montrer que k est prolongeable par continuité en 0.
2. La fonction k est-elle dérivable en 0 ? de classe C^1 en 0 ?
3. A-t-on d'autres informations sur k ?

I.2.39 **Mines-Ponts MP 2019**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable une infinité de fois en 0, et donner les expressions de ses dérivées successives en 0.

I.2.40 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction dérivable de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0\,;1], |f'(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

Montrer que f ne s'annule pas sur $[0\,;1]$.

I.2.41 **Centrale-Supélec**

Existe-t-il une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que f soit non monotone sur tout segment de $[0\,;1]$?

I.2.42 **CCINP PC 2018**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant |x|$.
   La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on désigne par g son prolongement.
3. Posons $T_f(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$. La fonction T_f a-t-elle une limite quand x tend vers 0 ?
   Indication : utiliser les suites définies par $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$.
4. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
5. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. La fonction f est-elle continue en $\frac{1}{k}$?
   Indication : prendre $I = \left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right[$ et $J = \left]\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right[$.
6. Étudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

I.2.43 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

Montrer que la fonction h est prolongeable en une fonction de classe C^1 en 0.

I.2.44 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sinh(x)} - \dfrac{x}{\sin(x)} & \text{si } x \in]0\,;\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0\,;\pi[$. Calculer $f'(0)$.
2. La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $[0\,;\pi[$? Calculer $f''(0)$.

I.2.45 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant ax + b$.

I.2.46 **Mines 2023**

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est de classe C^∞.
2. On suppose que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$, et que $f''(0) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h^2 = f$.

I.2.47 **Mines 2023**

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et on considère $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-\alpha\,;\alpha]$:

$$f'(x)^2 \leqslant 2f(x)M(\alpha) \quad \text{avec} \quad M(\alpha) = \sup_{|t| \leqslant 2\alpha} |f''(t)|.$$

3. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\sqrt{f}$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

I.2.48 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0\,,n]\!],\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{(k)} = \frac{f^{k+1}(0)}{k+1}.$$

I.2.49 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble de ses points de discontinuité. Montrer que l'on a $\mathfrak{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_n$, avec $\mathfrak{D}_n$ fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.50 **X MP 2017**

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell.$$

1. Montrer que $z \mapsto z^2$ et $z \mapsto \mathrm{e}^z$ sont $\mathbb{C}$-dérivables.
2. Montrer que $z \mapsto \overline{z}$ ne l'est pas.
3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On pose $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\tilde{f}(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = \Big(\mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y)); \mathrm{Im}(f(x + \mathrm{i}y))\Big).$$

Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ si et seulement si :

$$\tilde{f} \text{ est dérivable en } z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0; y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0; y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0; y_0).$$

I.2.51 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

I.2.52 **ENS Lyon MP 2016**

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to +\infty} \Big(f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)\Big) = 0.$$

I.2.53 **Centrale-Supélec TSI 2023**

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de f.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_N tel que pour tout $x > 0$:

$$f^{(N)}(x) = P_N\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que f n'est pas développable en série entière autour de 0.

I.2.54 **ENS MP 2022**

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = -\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x).$$
3. Montrer que $f_{a,b}$ est α-*höldérienne*, c'est-à-dire :
$$\exists C > 0,\ \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et N, m deux entiers naturels non nuls. On pose $h = \dfrac{N}{b^n}$.
Calculer :
$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t)\, \mathrm{d}t.$$
5. Montrer que :
$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t)\, \mathrm{d}t \leqslant C a^m.$$
6. Montrer qu'il existe un réel x_m tel que l'on a :
$$|f_{a,b}(x_m) - f_{a,b}(x)| \leqslant \frac{Ca^m}{2}.$$
7. Que peut-on dire d'une fonction α-höldérienne avec $\alpha > 1$?
8. Montrer que $f_{a,b}$ est nulle part dérivable.

I.2.55 **Centrale-Supélec MP 2023**

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha \geqslant 2$ et $\beta \in]1\,; +\infty[$, on pose :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}.$$

1. Donner les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries de fonctions.
2. On suppose que $\alpha < \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\alpha \geqslant \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas dérivable en 0.
En déduire une condition pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit de classe C^k, mais non de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

I.2.56 **ENSEA/ENSIIE MP 2025**

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0 telle que $f'(0) = f(0) = 0$. On définit la fonction g telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.

I.2.57 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}.$$

1. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f sur l'intérieur de D_f.
5. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

I.2.58 **Mines-Ponts**

On dit qu'une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ admet une *corde horizontale de longueur* $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\exists x \in [0\,;1] \text{ tel que tel que } x + \ell \in [0\,;1] \text{ et } f(x+\ell) = f(x),$$

c'est-à-dire si la corde reliant les points $(x; f(x))$ et $(x+\ell; f(x+\ell))$ de la courbe représentative de f est horizontale.

1. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que f admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$ (*théorème de la corde universelle*).
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \neq \frac{1}{n}$, montrer qu'il existe une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et n'admettant pas de corde horizontale de longueur ℓ.
3. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet au moins n cordes horizontales de longueur multiple de $\frac{1}{n}$.
4. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et $g : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. On pose $L = g(1) - g(0)$. Montrer qu'il existe n paires $\{T_i; T_i'\} \subset [0\,;1]$ telles que :

$$f(T_i) = f(T_i') \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ |g(T_i) - g(T_i')| = k\left|\frac{L}{N}\right|.$$

5. Montrer qu'une courbe fermée du plan, continue, et tournant de façon monotone n fois autour d'un point, se recoupe au moins $n-1$ fois.

I.2.59 **TPE/EIVP MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

I.2.60 **Mines-Ponts PC 2015**

Un marcheur parcourt (continûment) 6 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe une demi-heure durant laquelle il parcourt exactement 3 kilomètres.

I.2.61 **Mines-Ponts**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue sur I* si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x; y) \in I^2,\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. Montrer qu'alors f est uniformément continue. (*théorème de Heine*)
2. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement uniformément continue ?
3. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ à valeurs réelles.
   (a) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

I.2.62 **Mines-Ponts PC 2024**

Déterminer une fonction f de classe C^∞ sur $]-\infty\,;1[$ telle que :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

I.2.63 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable différente de la fonction nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0\,;1],\ |f'(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

Montrer que la fonction f ne s'annule en aucun point de $[0\,;1]$.

I.2.64 **Mines-Télécom PC 2019**

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.
Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

I.2.65 **X MP 2022**

Soit f une fonction continue de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)=f(b)$.

1. Pour n entier supérieur à 2, montrer qu'il existe $(a';b')\in[a\,;b]^2$ tel que :
$$f(a')=f(b') \quad \text{et} \quad b'-a'=\frac{b-a}{n}.$$
2. En supposant de plus f dérivable sur $]a\,;b[$, en déduire le théorème de Rolle.
3. *Application :* soit $f : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer le nombre de points d'annulation de $f^{(n)}$.

I.2.66 **Centrale-Supéléc MP 2017**

Soit
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

I.2.67 **Centrale-Supélec PSI 2015**

On définit g sur $]0\,;1[$ telle que $g(x)=x^x$.

1. Trouver α réel tel que, en posant $g(0)=\alpha$, g soit continue sur $[0\,;1]$.
2. Donner la représentation graphique de g.
3. Expliciter l'allure de g en 0 et donner son minimum.
4. Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

I.2.68 **ENSAM PSI 2017**

On note $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$. Soit f définie sur D par :
$$\forall z\in D,\ f(z)=|\cos(z)|^2.$$

1. Montrer que f est bornée sur D.
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et de $\mathrm{Im}(z)$.

   On rappelle que $\cos(z)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D.

I.2.69 **CCINP PC 2016**

Soit $\phi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$. On admet le développement suivant :

$$\phi(x) = 1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

1. Calculer $\phi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.
2. On définit, par récurrence la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$$

   Calculer P_1, P_2 et P_3.
3. Montrer que $P_n \leqslant n!$.
4. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est différent de 0.
5. Prouver que $f'(x) = \exp(x) f(x)$.
6. En déduire le développement en série entière de ϕ.

I.2.70 **CCINP PSI 2017**

Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1 + nx^2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.71 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propositions suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

iii) La fonction f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$.

I.2.72 **X PC 2008**

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x + 3\sqrt{x}))}{\sinh(\tanh(2x + \sin(x)))}.$$

I.2.73 **Mines-Télécom PC 2019**

Montrer que $\arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \to 0^+$.

I.2.74 **CCINP PSI 2015**

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. On définit la fonction g qui à x associe $\dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
2. Montrer que f admet une tangente passant par l'origine.

I.2.75 **CCINP PC 2015**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;1]$ par

$$f(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

1. Calculer f'. En déduire que f réalise une bijection de $]0\,;1]$ vers $[0\,;+\infty[$.
2. On pose u la bijection réciproque de f. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:
$$(u(x))^3 + xu(x) - 1 = 0.$$
3. Montrer que u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:
$$u'(x) = \frac{-u(x)}{3(u(x))^2 + x}.$$
4. Montrer que $u(1) \geqslant \dfrac{1}{2}$ à l'aide de 2, puis que $|u'| \leqslant \dfrac{1}{3u}$.
5. Montrer que $u(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x}$.
6. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)}\,\mathrm{d}x$.

I.2.76 **Mines PC 2022**

Existe-t-il une fonction continue et surjective de E vers F si

1. $E = [0\,;1]$ et $F =]0\,;1[$?
2. $E =]0\,;1[$ et $F = [0\,;1]$?

I.2.77 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $f \in C^1([0\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = a > 0$ et

$$\forall x \in [0\,;b],\ f'(x) \geqslant f^3(x).$$

Montrer que $b \leqslant \dfrac{1}{2a^2}$.

I.2.78 **ENS MP 2017**

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) = \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Montrer que :
$$\forall \lambda > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}\right) = \lambda^\beta.$$
2. On suppose désormais que φ' est croissante. Montrer la réciproque.

I.2.79 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une limite en $+\infty$, une limite en $-\infty$ et qu'elles sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

I.2.80 **Mines-Ponts MP 2018**

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ telles que $f < g$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que $f < P < g$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose f et g de classe n et pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, $f^{(k)} < g^{(k)}$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:

$$f^{(k)} < P^{(k)} < g^{(k)}.$$

I.2.81 **Mines-Télécom PSI 2018**

Lorsque cela est possible, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? Est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition ?

I.2.82 **X MP 2021**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty\,;\alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si f est continue, alors f est s.c.i.
2. Donner un exemple de fonction f s.c.i. mais non continue.
3. Montrer que f est s.c.i. si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y \in V$, $f(y) > f(x) - \varepsilon$.

I.2.83 **X MP 2021**

Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ et $x \mapsto -f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ soient convexes.

1. Montrer que f est dérivable.
2. Montrer que f n'est pas nécessairement deux fois dérivable.
3. Montrer que f est de classe C^1.

I.2.84 **CCINP PC 2021**

Pour $x \in]-1\,;+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]-1\,;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

I.2.85 **X PC 2025**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P - P' = Q$. On suppose que Q est positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que P est positif sur $\mathbb{R}$.

I.2.86 **CCINP PSI 2018**

Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n(1+n^2x^2)}}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.87 **X MP 2017**

Soit f une fonction de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a;b) \in [0\,;1]^2,\ \exists (c;d) \in \mathbb{R}^2,\ f([a\,;b]) = [c\,;d].$$

   (a) La fonction f est-elle continue ?

   (b) On suppose de plus que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé. Montrer que f est continue.

2. On suppose que f est une dérivée. Montrer qu'elle vérifie la première propriété.

I.2.88 **ENS Ulm MP 2019**

Soit $f : \left[\frac{1}{4}\,;1\right] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $x^{f(x)} = f(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\,;1\right]$.
Montrer que f est uniformément continue.

I.2.89 **Mines-ponts MP 2025**

Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$. Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t.$$

I.2.90 **ENS MP 2015**

Soit F une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) = F(x) + 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \ell,$$

où F^n désigne l'itéré $n^{\text{ème}}$ de F, et $\ell \in \overline{R}$.
Question subsidiaire : montrer que ℓ est réel et indépendant de x.

I.2.91 **Mines-Ponts PC 2025**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.
Montrer que f est strictement monotone.

I.2.92 **CCINP MP 2018**

1. Soit $f_n : [a;b] \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f telle que pour tout n, la fonction f_n est continue en $x_0 \in [a\,;b]$. Montrer que f est continue en x_0.
2. Soit g_n définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = x^n$.
   La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

I.2.93 **X MP 2017**

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ une série à termes positifs convergente, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0\,;1]^{\mathbb{N}}$ une suite injective dense dans $[0\,;1]$. On pose :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N},\, \alpha_n < x} \alpha_n.$$

Déterminer les points de continuité et les points de discontinuité de f.

I.2.94 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n > 0,\ a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\tanh(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit la série entière f associée à cette suite, i.e. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. La fonction f est-elle continue à gauche en 1 ?

I.2.95 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que toute racine multiple de P' est aussi racine de P.
2. Déterminer le signe de $PP'' - (P')^2$ sur $\mathbb{R}$.

I.2.96 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et H un demi-plan de $\mathbb{C}$ contenant une racine de P'.

1. Montrer que $Z_{P'} \subset \mathrm{conv}(Z_P)$.
2. Montrer que H contient une racine de P.
3. En déduire que $P(H) = \mathbb{C}$.

I.2.97 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $P(X)$ scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P) \geqslant 2$.

1. Montrer que P' est aussi scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et de P'.

I.2.98 **CCINP PSI 2021**

Soit $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

I.2.99 **ENS Lyon 2010**

Soit $f \in C(]0\,;1], \mathbb{R})$. Montrer que si f est uniformément continue, alors f est bornée.

I.2.100 **Mines**

Soit $f \in D^1([a\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

I.2.101 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f \in D^1([a\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

I.2.102 **ENS Lyon 2023**

Soit $f \in D^1([a\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

I.2.103 **CCINP MP 2024**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$, et $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Soit

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur I, puis dérivable sur I si $n \geqslant 2$.
2. Montrer que g est de classe C^{n+1} sur $I \setminus \{0\}$ et que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}.$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

grâce à la formule de Taylor avec reste intégral.

I.2.104 **Centrale-Supélec PC 2015**

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, soit
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition D_S de S.
2. Étudier la continuité de S. (Remarquer que $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$).
3. Étudier les variations de S et trouver un équivalent aux extrémités de D_S.

I.2.105 **Centrale-Supélec MP 2016**

On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \; f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k x)$$
où $q \in]-1\,;1[$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une fonction f continue.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction g continue en 0 qui vérifie $g(0) = 1$ et pour tout tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (1 - qx)g(qx)$.
3. Montrer que f est développable en série entière et exprimer ce développement.

I.2.106 **ENS PC 2024**

Soit une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f(0) \geqslant 0$
- $f(1) \leqslant 0$
- Il existe $g \in C([0\,;1], \mathbb{R})$ telle que $f + g$ est croissante.

Montrer que f s'annule.

I.2.107 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que :
$$\forall (a;b) \in \mathbb{Q}^2, \; a < b \implies f(a) < f(b).$$

1. Montrer que f est croissante sur I.
2. Montrer que f est strictement croissante sur I.

I.2.108 **ENS PC 2025**

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, positive, telle que $f''(x)$ soit bornée. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; |f'(x)|^2 \leqslant C f(x).$$

I.2.109 **ENS PC 2025**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f'' \geqslant 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x_0) > 0$. On note :
$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\} \quad \text{et} \quad C = \{(x; f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
Montrer que pour tous $X \in A$ et $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\{X + \lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C \neq \emptyset$.

I.2.110 **ENS PC 2025**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f, f' et f'' sont bornées.

1. Montrer que
$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$
converge uniformément vers $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que
$$\frac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{\varepsilon}$$
converge localement vers une limite à déterminer.
3. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

I.2.111 **ENS 2010**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.
Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$.

I.2.112 **ENS ULSR 2023**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On considère $x_0, \ldots, x_n \in I$ tels que $x_0 < \cdots < x_n$ et $f \in C^n(I, \mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

I.2.113 **Centrale-Supélec TSI**

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit :
$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$
Que remarquez-vous ?
4. Proposer une idée pour déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$, puis $\sum\limits_{k=0}^{n} k^p$.

I.2.114 **X MP 2013**

Soit $f \in C^\infty([a\,;b],\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont positives. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point.

3 Calcul intégral

I.3.1 **X-ENS**

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

En déduire que le nombre d'Euler est irrationnel.

I.3.2 **ENS Lyon**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale suivante :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin(x) \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I_n est un polynôme à coefficients entiers en π, de degré inférieur ou égal à n.
2. En déduire que π est irrationnel.

I.3.3 **Mines PC**

Calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{d}x,$$

où $\lfloor a \rfloor$ désigne la *partie entière* de a.

I.3.4 **X**

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^n \mathrm{d}t.$$

I.3.5 **X PC 2019**

On suppose que le graphe d'un polynôme de degré 6 est tangent à une droite en trois points A, B, C avec B le milieu de AC. Montrer que les aires délimitées par les segments AB, BC et la courbe sont égales.

I.3.6 **ENSEA/ENSIIE MP 2023**

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t.$$

I.3.7 **ENS PC 2024**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout nombre réel x, on pose :

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Q est polynomiale si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k P^{(k)}(0) = 0$.

I.3.8 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Calculer, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment grand,

$$\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \det(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_n - A) \cdot (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_n - A)^{-1} \,\mathrm{d}\theta,$$

de deux manières différentes. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

I.3.9 **CCP MP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

I.3.10 **X PC 2021**

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

I.3.11 **Mines-Ponts**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

I.3.12 **Mines-Télécom**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.13 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-x^2}{2}.$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$.

I.3.14 **Mines-Ponts MP**

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$.

1. Montrer que $a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$.
2. En déduire la valeur de $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)\,\mathrm{d}t$.

I.3.15 **Mines-Télécom**

Calculer :

$$I(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)\cos(\theta)}\,\mathrm{d}t, \quad \theta \in [0\,;\pi[.$$

I.3.16 **Mines-Ponts MP 2023**

Étudier la convergence de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.17 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.18 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.19 **X MP**

L'objectif est de montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

À tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$, on associe $F = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k f^{(2k)}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $F(0)$ et $F(\pi)$.

   On suppose que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $(a;b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0\,;\pi],\ f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

2. Tracer le graphe de f_n sur $[0\,;\pi]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

I.3.20 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
3. Montrer que f est développable en série entière.
4. Calculer I.

I.3.21 **X-ENS**

Soit $F = \{f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\}$.
Déterminer :

$$\inf_{f \in F} \int_0^1 |f'(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

I.3.22 **X**

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.23 **Mines-Ponts PSI 2023**

On définit

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$$

et

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de F.
2. Calculer, si existence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

I.3.24 **X**

Soit $(u; v) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \{|u|; |v|\}$. Calculer :

$$I_r(u; v) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(u - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(v - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta.$$

I.3.25 **Mines**

Pour tout $x \in [2\,; +\infty[$, on pose :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \quad (\textit{logarithme intégral})$$

Trouver un développement asymptotique à n termes lorsque $x \to +\infty$.

I.3.26 **X-ENS**

1. Soit P, Q appartenant $\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$. On suppose de plus que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{\alpha\in\Omega} \varepsilon(\alpha)\mu(\alpha)$$
où Ω est l'ensemble des pôles de $\dfrac{P}{Q}$, $\varepsilon(\alpha)$ le signe de la partie imaginaire de α et $\mu(\alpha)$ le coefficient de $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F.
2. *Application :* calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

I.3.27 **X-ENS**

1. Démontrer l'existence ou la non-existence d'une fonction f continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+f(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
2. Étudier la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ et pour tout $(n; x)$ appartenant à $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ par :
$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+f_n(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.28 **Mines-Ponts PC 2024**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n J_n$ et calculer sa somme de plusieurs manières différentes.

I.3.29 **Mines-Télécom PSI 2019**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

I.3.30 **ENS PSI 2023**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que l'intégrale $I(a)$ converge et calculer sa valeur.

I.3.31 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.3.32 **CCP MP**

Soit α et β deux nombres réels. Posons

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln((1+x)^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale I_1 est-elle convergente ?
2. Même question pour l'intégrale I_2.

I.3.33 **Mines**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} t^n\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de I_n et exprimer I_n en fonction de n.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{\frac14}} \sin\left(t^{\frac14}\right) t^n\,\mathrm{d}t$.

I.3.34 **Mines-Ponts**

Soit $f : [0\,; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$$

converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Démontrer que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que pour tout $s > s_0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1\,; +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

I.3.35 **Centrale**

Soit $f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(1) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$.

I.3.36 **X MP**

Soit $E = \{f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que

$$I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x)\cot(\pi t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2(\pi t)}\,\mathrm{d}t$$

   existent. Comparer I_1 et I_2.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   (*Inégalité de Wirtinger*)
3. Caractériser le cas d'égalité de l'inégalité de Wirtinger.

I.3.37 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note

$$u_n(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2x}}}},$$

où l'on a n racines carrées. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{u_n(x)} \, \mathrm{d}x.$$

I.3.38 **X**

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t.$$

I.3.39 **Centrale**

Soit $(p; q) \in \mathbb{N}^2$. Donner un algorithme permettant de calculer l'intégrale suivante :

$$I_{p,q} = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(1+t^2)^q} \, \mathrm{d}t.$$

I.3.40 **CCP**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f \in C^1([a\,;b], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \, \mathrm{d}t = 0$.
2. Reprendre la question précédente en supposant que $f \in C([a\,;b], \mathbb{R})$.

I.3.41 **X MP**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On considère :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t.$$

1. En considérant l'application $\psi : t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \, \mathrm{d}\theta\right)$, montrer que $I(f)$ est un entier. (On appelle $I(f)$ l'*indice* de f.)

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $f_P(t) = P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

   On admet le théorème de d'Alembert-Gauss en deuxième question, mais pas en troisième question.
2. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
3. En utilisant $P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ pour r variable, donner une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.

I.3.42 **X-ENS**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré m. Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$I(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} P(u)\,\mathrm{d}u.$$
Montrer que :
$$I(t) = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(t).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q_0, \ldots, q_n$ des entiers naturels avec $q_0 \neq 0$.
Soit encore $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$.
On suppose que $Q(\mathrm{e}) = 0$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(X) = X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p \cdots (X-n)^p.$$
Soit encore
$$J = \sum_{k=0}^{n} q_k I(k).$$
Montrer que $J \in \mathbb{N}$. De plus, montrer que $(p-1)!$ divise J, et que pour tout p suffisamment grand, $J \neq 0$.
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|J| \leqslant C^p$.
Trouver une minoration de $|J|$. Conclure que e est un *nombre transcendant*, c'est-à-dire que e ne peut pas être racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

I.3.43 **Mines-Ponts MP 2024**

Montrer l'existence de
$$I = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
et calculer la valeur de I.

I.3.44 **Mines-Ponts PC 2023**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\cdots(t+n)}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer l'existence de I_n, puis calculer I_n.

I.3.45 **ENS**

1. Calculer $F(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

I.3.46 **Centrale PC 2005**

1. Justifier l'existence de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer deux réels α et β tels que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I(x) = \alpha \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \beta \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{3\sin(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right) = 0$$

   et en déduire la valeur de J.

5. Montrer que I peut se prolonger en une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et préciser la dérivée en 0.

I.3.47 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle
   (a) continue ?
   (b) de classe C^1 ?
3. Étudier la croissance de f. Calculer les limites au bord du domaine de définition.
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de f en 0.

I.3.48 **ENS Lyon MP 2024**

Trouver un équivalent de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_{x_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

I.3.49 **CCP**

Étudier l'intégrabilité de
$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}$$
sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

I.3.50 **CCP**

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$$
est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
2. On pose :
$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

I.3.51 **Mines-Ponts**

Pour tout $t \geqslant 0$, calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.52 **X PC 2019**

Déterminer la limite de
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$$
quand n tend vers $+\infty$.

I.3.53 **CCP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction
$$f : t \longmapsto \frac{1}{\cosh(t)+\cosh(a)}.$$
Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Indication : on pourra faire le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

I.3.54 **Mines 2015**

Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
En écrivant I comme somme d'une série alternée, déterminer le signe de I.

I.3.55 **Centrale 2015**

Soit $f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Donner une condition simple pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

I.3.56 **CCP 2015**

Soit $x \in [0\,;1]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{pk} = \frac{1+(-1)^n x^{p(n+1)}}{1+x^p}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x + (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

I.3.57 **CCP 2015**

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\ln(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t.$$

I.3.58 **Petites Mines**

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$.

1. La fonction f est-elle intégrable sur $]-1\,;1[$?
2. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \ln(1-t) - \ln(1+t)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

I.3.59 **CCP MP**

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n\ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nn!}.$$

   Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

I.3.60 **CCP MP**

On pose, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $f(x;t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x;t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   On pose alors, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

I.3.61 **CCP MP**

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

I.3.62 **CCP 2016**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\sinh(t))^n\,\mathrm{d}t$ où $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$.
   Montrer que J_n est bien définie, et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
3. Trouver une relation liant J_{n+2}, J_n et $\sqrt{2}$.
   En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

I.3.63 **CCP MP**

On considère la fonction H définie sur $]1\,;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de H.

I.3.64 **ENS 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition (réel) de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Trouver un équivalent de f en 0.
4. Montrer que le graphe de f admet pour axe de symétrie la droite Δ d'équation $x = \frac{1}{2}$.
5. Déterminer la borne inférieure de f.

I.3.65 **Petites Mines 2016**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

I.3.66 **Mines 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Peut-on réduire son domaine d'étude ?
2. Montrer que f est de classe C^1. Étudier ses variations.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Calculer un équivalent de f en $+\infty$.
4. Étudier la limite de f en 0^+.
   Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle définie ? Si oui, la calculer.

I.3.67 **CCP 2016**

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{4-3\sin^2(u)}}\,\mathrm{d}u$.
2. Calculer I.

I.3.68 **Mines 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier ses limites au bornes.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

I.3.69 **CCP 2016**

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie.
2. Montrer que :
$$\sin^5(t) = \frac{1}{16}\left(\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)\right).$$
3. Montrer que pour tout $a > 0$:
$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{16}\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{10}{16}\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

I.3.70 **ENSAM 2016**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{1} \frac{t^x-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Étudier la dérivabilité de f. En déduire $f'(x)$ puis $f(x)$.

I.3.71 **Mines 2016**

Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - a}\,\mathrm{d}t$.

I.3.72 **CCP 2016**

Soit $f \in C([0\,;+\infty[, \mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $|f(t)| \leqslant c\mathrm{e}^{at}$.
On considère l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x > a$.
2. On suppose dans toute cette question que $a \leqslant 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x)$ et en déduire un équivalent de F en $+\infty$.
   On suppose de plus que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = L$ et en déduire un équivalent de F en 0^+.

I.3.73 **X-ENS PSI 2017**

1. Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout n entier naturel.
2. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que
   $$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$
   et donner la valeur de J.
   On admettra que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

I.3.74 **Centrale PSI 2017**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}\,\mathrm{d}t$

1. Démontrer que l'intégrale $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier la parité de f.
3. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?
4. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la calculer.
5. Développer f en série entière en précisant le domaine de validité de ce développement.

I.3.75 **CCINP 2024**

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2\,;+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$?

I.3.76 **TPE/EIVP 2012**

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$.

I.3.77 **Mines-Ponts 2012**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} P(t)\,\mathrm{d}t = n^2+1.$$

I.3.78 **Mines-Ponts 2012**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x+\cdots+x^p)}{x}\,\mathrm{d}x$.

I.3.79 **X PC**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

I.3.80 **CCP 2017**

Déterminer la nature des intégrales :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

I.3.81 **CCP PSI 2021**

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

   $$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sin\left(\frac{t}{\sqrt[3]{n}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

   est convergente.
2. Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur du réel K.

I.3.82 **CCP PSI**

Calculer, si existence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x$.

I.3.83 **Centrale PSI**

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cdot\frac{\sinh(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

I.3.84 **CCP PSI**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{n}$.

I.3.85 **CCP**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le domaine de définition D_f de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f. Expliciter $f'(x)$.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

I.3.86 **ENSAM PSI**

Soit deux fonctions $f\in C([0\,;1],\mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.3.87 **TPE/EIVP PSI**

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

I.3.88 **X FUF 2024**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $|I_n - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.
3. Calculer J_n.
4. En déduire un équivalent simple de I_n.

I.3.89 **X FUF 2024**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{3}$.

I.3.90 **Mines-Télécom 2022**

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de F.
2. Montrer que F est classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est solution de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ $\quad (E)$.
4. Montrer que F est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

I.3.91 **CCINP MP 2025**

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Estimer I à 10^{-2} près. (On pourra développer I sous forme d'une série entière.)

I.3.92 **CCINP PSI 2024**

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) = xf(x-1)$.
2. Soit $V_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$ et $\phi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.
   (a) Montrer que ϕ est dérivable et calculer ϕ'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $\phi'(x) = \ln(x)$.
   (c) En déduire la limite de ϕ en $+\infty$.
   (d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{V_n}$.

I.3.93 **Mines-Ponts PC 2024**

Montrer la convergence des deux intégrales suivantes et les calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.94 **Mines-Télécom MP 2024**

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x$.

I.3.95 **Mines-Ponts MP 2024**

Étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.96 **CCINP PC 2024**

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1\,;+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit $a \geqslant 1$. À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, calculer $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que :

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right| \leqslant \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.
   Étudier la nature de la série $\sum |v_n|$.
   En déduire que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 1}$ converge.
4. (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, prouver que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.
5. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + \ell + o(1).$$

I.3.97 **CCINP MP 2022**

Pour tout $t > 0$, on définit $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0\,;1]$, puis sur $[1\,;+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

I.3.98 **CCINP MP 2022**

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan(u)| \leqslant |u|$.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Quel est le domaine de définition de F ?
   (b) Quel est le domaine de continuité de F ?
   (c) Quel est le domaine de dérivabilité de F ?
   (d) Déterminer F'.
   (e) En déduire F.

I.3.99 **CCINP PC 2023**

Trouver une primitive de

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2) \end{array}$$

I.3.100 **CCINP MP 2021**

On pose, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de f en 0^+.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f.

I.3.101 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant a$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+|f(x)|} \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

I.3.102 **X MP 2018**

Montrer que, pour tout $a > 2$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax)\,(\cos(x))^{a-2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

I.3.103 **TPE/EIVP MP 2016**

Étudier l'existence de

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,\mathrm{d}x.$$

I.3.104 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) \, \mathrm{d}t < +\infty$$

et que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) \, \mathrm{d}t}\,. \quad (\textit{Inégalité de Heisenberg})$$

I.3.105 **CCINP MP 2024**

On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ de fonctions en posant :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in]0\,;1],\ u_n(t) = \frac{t^{n-1} \ln(t)}{n}.$$

1. Calculer $\|u_n\|_\infty$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0\,;1[$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

I.3.106 **CCINP PC 2022**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

Montrer la convergence de I et calculer I.

I.3.107 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $r \in]-1\,;1[$. Montrer l'existence de $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r^n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t.$$

I.3.108 **Mines-Ponts MPI 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $(f')^2$ soit intégrable.

Montrer que $t \mapsto \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

I.3.109 **Mines-Ponts MP 2017**

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

I.3.110 **CCINP PSI 2023**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sinh(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Soit $t \in]0\,;+\infty[$. Vérifier que :
$$\frac{\sin(t)}{\sinh(t)} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nt}.$$
3. Montrer que :
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}.$$
4. En déduire que :
$$\frac{\pi}{4} < I < 1 + \frac{\pi}{4}.$$

I.3.111 **CCINP MP 2024**

1. Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{au^2+b}\,\mathrm{d}u$.
2. Soit t tel que $\cos(\frac{t}{2})$ ne s'annule pas. On pose $u = \tan(\frac{t}{2})$. Déterminer $\cos(t)$ en fonction de u.
3. On définit :
$$\begin{array}{rccc} f & : &]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x+\cos(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$$
Montrer que f est de classe C^1 sur $]1\,;+\infty[$, puis montrer que :
$$\forall x \in]1\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

I.3.112 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $\lambda > 0$. On pose $I_\lambda = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\lambda^2+\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

1. Calculer cette intégrale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\lambda^2+\cos^2(n\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

   Prouver que la suite $(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

I.3.113 **Mines-Télécom PC 2022**

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.
2. Montrer l'égalité :
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n+1}}.$$

I.3.114 **Mines-Télécom MP 2023**

Montrer que

$$\int_a^b \frac{1}{x^n+(1-x)^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{2^n}{n}.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{n}\right)$.

I.3.115 **Centrale-Supélec PC 2017**

Montrer que

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer cette intégrale.

I.3.116 **Mines-Télécom MP 2022**

Étudier l'existence et la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.117 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos(t)-\sin(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(\cos(t)-\sin(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Donner le domaine de définition de F.
   (b) Étudier la continuité de cette fonction.

I.3.118 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

I.3.119 **CCINP PC 2022**

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I et J existent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer I et J.

I.3.120 **ENS MP 2019**

Soit $f : \left[-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x.$$

I.3.121 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

1. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $I = J$.
2. Calculer I.
   Indication : on remarquera que $I = \frac{I+J}{2}$, et on utilisera le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$.

I.3.122 **Mines-Ponts PSI 2017**

Justifier la convergence et calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.123 **CCINP PSI 2022**

Soit $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que :
   $$\forall x \in [-1\,;\,1],\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$
3. Montrer la relation :
   $$\forall x \in]0\,;1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).$$

I.3.124 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit P un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(x))\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer la nature de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big|\cos(P(x))\Big|\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer le signe de I pour $P = X^2$.

I.3.125 **Mines-Télécom MP 2023**

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t,$$

puis calculer sa valeur.

I.3.126 **CCINP PSI 2024**

Soit $b > 0$. Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-bt} \,\mathrm{d}t.$$

1. La fonction I est-elle bien définie ? continue ?
2. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$:

$$I(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2} \,\mathrm{d}u, \qquad I'(x) = \int_0^{+\infty} -2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2} \,\mathrm{d}u.$$

4. Montrer, à l'aide d'un changement de variable judicieux, que :

$$\forall x > 0,\ I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}} I(x).$$

5. En déduire l'expression de I.

I.3.127 **CCINP MP 2024**

Soit $k > 0$ et

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^1 t^k \sin(xt) \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que f vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x).$$

3. Déterminer le développement en série entière de $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xy'(x) + (k+1)y(x) = \sin(x)$. Donner ensuite le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction y.

I.3.128 **Mines-Ponts MP 2024**

Donner les deux premiers termes du développement asymptotique de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \ln(n+x) \,\mathrm{d}x.$$

I.3.129 **CCINP PC 2022**

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe.

I.3.130 **CCINP MP 2023**

On pose :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(u) = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$.
2. Montrer que $G^2(x) = -\dfrac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

I.3.131 **Mines 2024**

Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin(2x)}\,\mathrm{d}x < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

I.3.132 **CCP 2024**

Soit $a \in]0\,;1[$.

1. Montrer que l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que $I(a) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

I.3.133 **Mines 2022**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x+t)}{1+(xt)^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f possède une limite en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

I.3.134 **Mines 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [c\,;+\infty[$, $f(x) = (x-c)^2$.

I.3.135 **Mines 2022**

Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Développer s en série de fractions rationnelles.
2. En déduire un équivalent de $s(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

I.3.136 **CCP 2023**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t|\sin(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

I.3.137 **Centrale 2023**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les intégrales suivantes convergent :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) Donner le domaine de définition (réel) $\mathcal{D}$ de la *fonction gamma* Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x) > 0$.

   (b) Montrer que Γ est l'unique fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
   - $f(1) = 1$;
   - $f(x+1) = xf(x)$;
   - $\ln \circ f$ est convexe.

I.3.138 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Calculer I_n.

I.3.139 **Mines-Ponts MP 2021**

Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

I.3.140 **Mines-Télécom MP 2023**

soit
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x) - \tanh(2x)}{x} \, \mathrm{d}x$$
et
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(x) - \tanh(tx)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $[2\,;3]$.

I.3.141 **CCINP MP 2022**

Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et donner Γ'.
3. Montrer que :
$$\forall x > 1,\ \forall \lambda \in]-1\,;1[,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1 - \lambda \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

I.3.142 **Mines-Télécom MP 2018**

Justifier l'existence de :
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \, \mathrm{d}t.$$
Calculer cette intégrale.

I.3.143 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

I.3.144 **ENS MP 2019**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \int_0^x f(t) \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

I.3.145 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt} \, \mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer le développement en série entière de f en 0.

I.3.146 **Mines-Ponts MP 2022**

On note $f(x; y) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t^x + t^y) \, \mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f admet-elle des extrema ?

I.3.147 **Mines-Télécom MP 2023**

On considère : $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Donner D_f.
2. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
3. Trouver une relation entre $f(t)$ et $f(t-2)$, en supposant que t et $t-2$ sont tous deux dans D_f.

I.3.148 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est de classe C^1.

I.3.149 **Mines-Télécom MP 2025**

On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}.$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

I.3.150 **Mines-Télécom PSI 2018**

Montrer que pour tout $a > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ka+1}.$$

I.3.151 **CCINP MP 2013**

Calculer :

$$I(a;b) = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a-\cos(x)}{b-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x,$$

où $a, b \in]1\,;+\infty[$.

I.3.152 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+x\cos^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.
3. Déterminer $f(x)$.

I.3.153 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$J_n : x \longmapsto \int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner la parité de J_n en fonction de n.
2. Montrer que J_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \pi}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}.$$
4. Déterminer $p_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que J_n vérifie l'équation différentielle suivante :
$$x^2 y'' + xy' + p_n(x)y = 0.$$

I.3.154 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
En déduite que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t.$$
2. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$.
4. Déterminer une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
5. En déduire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ et en déduire la valeur de I.

I.3.155 **CCINP MP 2021**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
3. Calculer f à l'aide de fonctions usuelles.
On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

I.3.156 **Mines-Ponts MP 2016**

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n x^{-\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

I.3.157 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

I.3.158 **CCINP PSI 2021**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ à l'aide d'une série. Obtient-on la même série ?

I.3.159 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on considère l'intégrale :

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que J_n peut s'écrire :

$$J_n(x) = A_n(x)\mathrm{e}^x + B_n(x)\mathrm{e}^{-x},$$

   où A_n et B_n sont des polynômes de degré au plus n.
2. Montrer que $\mathrm{e}^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$.

I.3.160 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Pour t réel, linéariser $\sin^5(t)$.
2. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.161 **Mines-Télécom 2019**

On considère l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Justifier son existence et la calculer.
Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

I.3.162 **Mines-Ponts MP 2018**

On considère l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier l'existence de cette intégrale.
2. Si existence il y a, calculer cette intégrale.

I.3.163 **X MP 2018**

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{n} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{n!}{2}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{n+1} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x > \frac{n!}{2}$.

I.3.164 **Mines-Télécom MP 2023**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

I.3.165 **Mines-Télécom PC 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer I_n comme somme d'une série.
2. Trouver un équivalent de I_n.

I.3.166 **CCINP PSI 2017**

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \end{array}$$

1. Montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot k!}$.

I.3.167 **CCINP PSI 2021**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}.$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n)).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

I.3.168 **ENS PC 2025**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(2xt)x^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$

Donner un équivalent de $A_n(t)$ quand $t \to +\infty$.

I.3.169 **CCINP PC 2022**

1. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.
   (a) Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner la dérivée de f.
   (b) En posant $u = x\tan(\theta)$, montrer que :

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{u}{u^2+x}\,\mathrm{d}u.$$

4. Montrer que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

   et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

I.3.170 **CCINP PC 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f y est de classe C^1 et préciser un équivalent en 0.

I.3.171 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sinh(x\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner un développement en série entière de f.
3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

I.3.172 **Mines-Ponts**

1. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est intégrable, et $h : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée intégrable. On pose, pour $x \in [a\,;b]$, $H(x) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)h'(t)\,\mathrm{d}t - [f(t)h(t)]_a^b = \int_a^b f''(t)H(t)\,\mathrm{d}t - [f'(t)H(t)]_a^b.$$
2. On suppose que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $|f''(x)| \leqslant M$. Montrer l'*approximation par la méthode des trapèzes* :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{12}.$$
3. Que devient l'égalité de la question 1 s'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\lim\limits_{x\to c^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} h(x)$ existent, mais sont différentes ?
4. On suppose de nouveau que, pour tout $x \in]a\,;b[$, $|f''(x)| \leqslant M$. Montrer l'*approximation par la méthode du point milieu* :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{24}.$$

I.3.173 **Mines-Ponts**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose qu'il existe $a < 0$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = a$.
Montrer que les fonctions f et f' sont intégrables.

I.3.174 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. Calculer :
$$I(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos(x)\cos(\theta)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.175 **Mines**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ que l'on suppose intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors celle-ci est nécessairement nulle.
2. Montrer que si la fonction f est uniformément continue sur $[a\,;+\infty[$, alors f admet nécessairement une limite nulle en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente est-il vrai si l'on suppose que f est simplement continue ?

I.3.176 **CCINP MP 2025**

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t$. Calculer u_0.
3. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis exprimer u_n à l'aide de factorielles.
4. Sur $[0\,;+\infty[$, on pose $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ et 0 sinon. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}u_n$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

I.3.177 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que le graphe de f admet un point de symétrie.
2. Justifier l'existence et calculer :
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I.3.178 **Mines-Télécom MP 2018**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Calculer la somme de la série de terme général :
$$a_n = \frac{2^{2^n}(n-1)!n!}{(2n+1)!}.$$

I.3.179 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une relation entre f et f'.
3. Sachant que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, déterminer f et donner sa limite en $+\infty$.

I.3.180 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable sur son intervalle de définition.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

I.3.181 **X ESPCI 2017**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de
$$I(x) = \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\,\mathrm{d}t.$$
2. Étudier la dérivabilité de I.

I.3.182 **Mines-Télécom MP 2024**

Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\,\mathrm{d}x$$
quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.3.183 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $f \in C([0\,;\pi], \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi} \cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Que dire de f ?

I.3.184 **ENS MP 2024**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(0) \neq 0$. Montrer que :
$$\forall r > 0,\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \ln|P(0)| + \sum_{\alpha \in I_r} \mathrm{mult}_P(\alpha) \cdot \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$$
où $I_r = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0 \text{ et } |\alpha| < r\}$ et $\mathrm{mult}_P(\alpha)$ est la multiplicité de α en tant que racine de P.

I.3.185 **Mines-Ponts MP 2019**

Montrer que $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto F(x)\exp(x^2)$, où F est une fraction rationnelle.

I.3.186 **CCINP MP 2018**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I(u) = \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\int_{a+u}^{b+u} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On prend ici f :

$$x \longmapsto \begin{cases} \ell & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2\ell}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   Calculer $\lim\limits_{u \to -\infty} I(u)$.
3. On revient au cas général. Calculer $\lim\limits_{u \to -\infty} I(u)$ si l'on suppose que $\ell = 0$.
4. Déduire $\lim\limits_{u \to -\infty} I(u)$ dans le cas où ℓ est quelconque.
5. Soit a' et b' deux nombres réels tels que $0 < a' < b'$. Trouver α et β tels que :

$$\frac{X}{(1+a'X)(1+b'X)} = \frac{\alpha}{1+a'X} + \frac{\beta}{1+b'X},$$

   puis simplifier l'expression

$$\frac{\mathrm{e}^x}{(1+a'\mathrm{e}^x)(1+b'\mathrm{e}^x)}.$$

6. Déduire des questions précédentes :

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+a'\mathrm{e}^x)(1+b'\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.187 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin^m(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

I.3.188 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et ℓ un nombre réel strictement positif. On suppose que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = \ell.$$

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition de l'énoncé.
3. Calculer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

I.3.189 **Centrale PC 2024**

Soit
$$E = \left\{ u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \,\Big|\, \int_0^{+\infty} u^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient dans E. Montrer que f' est aussi dans E.
3. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty} (f''(x))^2\,\mathrm{d}x}$$
et préciser le cas d'égalité en supposant $f(0) = 0$.

I.3.190 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Décomposer $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$ en éléments simples.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)}\,\mathrm{d}t$.

I.3.191 **CCINP PSI 2023**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Montrer que $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

I.3.192 **Mines-Ponts MPI 2023**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-xt+xt^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer un développement en série entière de f avec les coefficients explicités.

I.3.193 **CCINP PSI 2025**

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $]-1\,;1[\subset D_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0\,;1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

I.3.194 **CCINP MP 2023**

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $[0\,;+\infty[$, de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer $F(0)$.
3. (a) Soit $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

   Montrer que F vérifie l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{\gamma}{\sqrt{x}}$.

   (b) Montrer que $F(x) = \pi \mathrm{e}^x - \gamma \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

   (c) En déduire la valeur de γ.

I.3.195 **Mines-Télécom PSI 2019**

Pour tout x réel, on pose :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que C et S sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Sont-elles continues ?
2. Montrer que S est dérivable. Exprimer $S'(x)$ au moyen de $C(x)$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$
4. En déduire $S(x)$ et $C(x)$, exprimées au moyen d'une intégrale.

I.3.196 **Centrale-Supélec MP**

Soit

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Quelles sont les propriétés de f et g ?
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

I.3.197 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Énoncer soigneusement le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. Démontrer que la fonction
$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
   est continue sur $\mathbb{R}$.

I.3.198 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour x dans $\mathbb{R}$:

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_p et J_p sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que I_p est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p(x)$.
4. Exprimer $J_p(x)$ en fonction de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} J_p(a^p)$ converge-t-elle ?

I.3.199 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)\mathrm{e}^{-x^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

où g une fonction bornée, impaire et continue.

1. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction du réel α.
2. (a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est la parité de F ?
3. (a) Énoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
   (b) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. On pose $g = \sin$.
   (a) Calculer F.
   (b) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

I.3.200 **ENSEA/ENSIIE MP 2013**

Montrer l'existence et calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x.$$

I.3.201 **Mines-Ponts MP 2014**

Pour tout $x \in]0\,;\pi[$, soit

$$F(x) = \int_0^x \ln(\sin(x-t))\,\mathrm{d}t.$$

La fonction F est-elle intégrable sur $[0\,;\pi]$? Si oui, calculer l'intégrale.

I.3.202 **Mines-Ponts MP 2016**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

I.3.203 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$ et $K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ en fonction de I.
3. Déterminer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t$ en fonction de I, J, K. En déduire les valeurs de I, J, K, L.

I.3.204 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout entier naturel n et tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = \dfrac{1+t^n}{\sqrt{1-t^2}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ de deux manières :

1. Par convergence uniforme.
2. Avec le théorème de convergence dominée.

I.3.205 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \exp(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

I.3.206 **Mines-Ponts MP 2017**

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une somme.

I.3.207 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$, à valeurs strictement positives. Pour tout a réel positif, on pose :

$$I(a) = \int_0^1 f(t)^a\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction I est dérivable et préciser la valeur de $I'(0)$.
2. Trouver la limite de $I(a)^{\frac{1}{a}}$ quand a tend vers 0.

I.3.208 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit f une fonction continue sur $[1\,;+\infty[$, à valeurs réelles, de carré intégrable. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

I.3.209 **Centrale PC 2017**

Montrer que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ quand $x \to +\infty$.

I.3.210 **Mines-Ponts PC 2018**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, \mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner la limite de f en $+\infty$.

I.3.211 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, si $f \in E$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que, si $f \in E$ et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors il existe c tel que :
$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{(x-c)^2}{4}.$$
3. Décrire E totalement.

I.3.212 **X-ENS**

Soit $f \in C^2[a\,;b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t - \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{12} \|f''\|_\infty.$$

I.3.213 **Mines-Télécom MP 2017**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx) - \cos(ny)}{\cos(x) - \cos(y)} \, \mathrm{d}x \quad \text{avec } y \in]0\,;\pi[.$$

Donner la valeur de I_n.
Indication : on pourra chercher une relation de récurrence entre $I_n + I_{n+2}$ et I_{n+1}.

I.3.214 **Centrale-Supélec MP 2021**

On donne $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de c.
2. Montrer que $c < 0$.
3. (a) Montrer que $c = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) \ln(t) \, \mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

I.3.215 **Mines-ponts MP 2021**

On pose :

$$F : (x;y) \longmapsto \int_0^x \ln(x + y\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F.
2. Calculer quand cela est possible la valeur de $F(x;x)$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intérieur de D_F.
4. Déterminer une expression de F sans intégrales.

I.3.216 **CCINP MP 2023**

Soit, pour n un entier naturel non nul :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite à déterminer.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire une deuxième façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

I.3.217 **CCINP MP 2023**

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante :

   $$\int_a^b \frac{1}{t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t.$$

   Indication : poser $u = \sqrt{t}$.
2. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$.
3. Montrer les inégalités suivantes :

   $$2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leqslant R_n \leqslant 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

I.3.218 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite ℓ en $-\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$$

existe et déterminer sa valeur.

I.3.219 **CCINP MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On définit la fonction :

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) = \frac{2\sinh(x)}{\mathrm{e}^{nx} - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ telle que :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

est définie pour $n \geqslant 2$.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ I_n = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \sinh(x)\mathrm{e}^{-knx}\,\mathrm{d}x.$$

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

I.3.220 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t\cos(x) + t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

I.3.221 **Mines-Ponts MP 2013**

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

I.3.222 **Mines-Ponts MP 2017**

On définit f par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t\cosh(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est C^∞.
2. Montrer que $f(x) \sim -\ln(1-x)$ quand $x \to 1^-$.

I.3.223 **ENS**

Soit

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n, Q_n \in \mathbb{Z}_{2n}[X],\ I_n(x) = \frac{n!}{x^{2n+1}}(P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)).$$

2. En déduire que $\dfrac{\pi}{2}$ est irrationnel.

I.3.224 **Centrale-Supélec PSI 2013**

On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie. Étudier sa monotonie.
2. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Trouver $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0.
   (On pourra faire le changement de variable $u = \tan(t)$.)

I.3.225 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f(x) = f(x+2\pi)\}$. On pose sur E :

$$\|f\| = \sup\{|f(u)| \mid u \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G(f) : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est un endomorphisme.
2. (a) Montrer que G est C^1.
   (b) Donner une équation différentielle vérifiée par G.
3. La fonction G est-elle
   (a) injective ?
   (b) surjective ?
4. Résoudre $G(f) = \lambda f$, d'inconnues $(f;\lambda) \in E \times \mathbb{C}$.

I.3.226 **X MP 2017**

On note $P_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}((X^2-1)^n)$.

Montrer que pour $n \neq m$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

I.3.227 **CCINP PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.228 **X-ENS**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$.

I.3.229 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit f la fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+ix)}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle et déterminer f.

I.3.230 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $a > 0$. On note :

$$\begin{array}{cccc} f_a & : &]-a\,;a[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{array}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_{-a}^{a} f_a(x)\,dx$.

I.3.231 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t}\,dt$.
2. Soit

$$\begin{array}{cccc} F & : &]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t}\,dt \end{array}$$

   Montrer que F est injective.

I.3.232 **CCINP PSI 2021**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. La fonction f est-elle continue sur D_f ?
3. Montrer que si $x \in D_f$, alors $1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

I.3.233 **Mines-Ponts MP 2022**

1. Montrer la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt.$$

2. À l'aide d'une intégrale à paramètres, calculer I.

I.3.234 **Mines-Télécom MP 2018**

On note $I = \displaystyle\int_0^1 t^3 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt$.

Étudier l'existence et la valeur de I.

I.3.235 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit b une fonction continue par morceaux de période 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{[0;\alpha]}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = \alpha \int_0^1 b(y)\,\mathrm{d}y.$$

I.3.236 **CCINP MP 2023**

1. Soit $M > 0$ et $u : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $|u(x)| \leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ convergent.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ converge.

I.3.237 **CCINP 2023**

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier l'existence et la valeur de I.
2. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Trouver des réels α et β tels que :
$$\frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2} + \frac{\beta}{a^2+t^2}.$$
3. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)(a^2+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
4. Rappeler le théorème de la convergence dominée.
L'utiliser pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

I.3.238 **Centrale-Supélec MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(x)^{2n+2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$
Calculer I_0.
3. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}}$.

I.3.239 **CCINP MP 2018**

Pour $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$, on définit :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{|\ln(x)|^\beta}{(1-x)^\alpha} \end{array}$$

1. (a) Trouver un équivalent en 0 et en 1 de f.
   (b) Déterminer les valeurs de α et β telles que f se prolonge par continuité à l'intervalle $[0\,;1]$.
   (c) Déterminer les valeurs de α et β telles que f soit intégrable sur $]0\,;1[$.
2. Soit $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que I existe puis calculer I.

I.3.240 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ de classe C^1. Montrer que :

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x - f(0)^2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f'\|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\|f'\|$ désigne la norme infinie de f' sur $[0\,;1]$.

I.3.241 **Mines-Ponts MP 2016**

Étudier l'existence et la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x,$$

où $\alpha>0$ est donné.

I.3.242 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $f\in C^1([a\,;b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t\in[a\,;b],\ f'(t)\in[0\,;1] \text{ et } f(a)=0.$$

Montrer que $f^2(x)\leqslant 2\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x\in[a\,;b]$.

I.3.243 **Centrale-Supélec PC 2016**

On considère l'intégrale $f(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.

I.3.244 **Centrale-Supélec MP 2016**

Donner un résultat du cours relatif aux sommes de Riemann. Donner une démonstration de ce résultat dans le cas où f est de classe C^1.

I.3.245 **ENSEA/ENSIIE PSI 2015**

Soit n un entier naturel. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $p \in [\![0\,,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que f possède au moins $n+1$ racines entre a et b.

I.3.246 **Mines-Ponts MP 2015**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x))\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

I.3.247 **CCINP MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{1+x^2}$ sur $]0\,;1]$.
2. On pose $u_n(x) = x^{2n}(\ln(x))^2$ pour n entier et $x \in]0\,;1]$.

   Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0\,;1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer une expression de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

I.3.248 **CCINP MP 2015**

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x.

I.3.249 **X MP 2017**

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ une fonction intégrable. On suppose que $\ln \circ f$ est concave.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f croît sur $]-\infty\,;x_0[$ et décroît sur $]x_0\,;+\infty[$.
2. Montrer que :

$$\exists c, k > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant k\mathrm{e}^{-c|x|}.$$

3. On considère $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ intégrable telle qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que g croît sur $]-\infty\,;x_1[$ et décroît sur $]x_1\,;+\infty[$.

   On définit :

$$f * g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

   produit de convolution de f et g.

   Montrer qu'il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que h croît sur $]-\infty\,;x_2[$ et décroît sur $]x_2\,;+\infty[$.

I.3.250 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $b > a > 0$ et $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(u)}{u^3}\,\mathrm{d}u$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

I.3.251 **ENSEA/ENSIIE PSI 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et que :
$$0 \leqslant I_n \leqslant (\ln(2))^n.$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)I_n.$$
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n!}$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n!}x^n$.

I.3.252 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y}\,\mathrm{d}y.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$.
3. La fonction f est-elle dérivable ?

I.3.253 **Mines-Télécom PSI 2018**

1. Justifier que la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan(t))^2}$$
est intégrable sur $]0\,;1[$.
2. En déduire un équivalent simple de
$$\Phi(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{1}{(\arctan(t))^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0^+.$$

I.3.254 **Mines-Télécom PSI 2017**

Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$
2. Montrer que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

I.3.255 **Centrale-Supélec PSI 2015**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) + F(x).$$

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer quand est-ce que F admet une limite finie en $+\infty$?
2. On suppose que F admet une limite finie en $+\infty$. La fonction f admet-elle forcément une limite finie en $+\infty$?
3. On suppose que g admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet alors forcément une limite finie en $+\infty$. Déterminer cette limite.

I.3.256 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \geqslant 0$ tel que $f(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

I.3.257 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

I.3.258 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit $a > 0$, f continue sur $[1\,;+\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On s'intéresse à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ on a :
$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire la convergence de l'intégrale recherchée et expliciter sa limite en fonction de $\displaystyle\int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

I.3.259 **Centrale-Supélec PC 2015**

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k+1.$$

I.3.260 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$.

I.3.261 **Mines-Ponts MP 2019**

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.262 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère la fonction

$$(x;y) \longmapsto \int_0^{\pi} \ln(x + y\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est différentiable.
3. Comment expliciter l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x+y\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\,?$$

I.3.263 **Mines-Ponts MP 2014**

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(\cos(t))}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.264 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^t}\,\mathrm{d}x.$

1. Donner le domaine de définition de φ et montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
2. Donner un équivalent de φ en $+\infty$.

I.3.265 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit P la fonction de $]-1\,;1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(r;t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la fonction qui à r associe $P(r;t)$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$. Calculer ce développement.
2. Soit r appartenant $]0\,;1[$ fixé.
   (a) Justifier que la fonction qui à t associe $P(r;t)$ est continue, positive, paire et 2π-périodique.
   (b) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r;t)\,\mathrm{d}t = 1$.
3. Soit $a \in [0\,;\pi]$. Montrer que :
$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-a}^{a} P(r;t)\,\mathrm{d}t = 1.$$
4. Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodique. Montrer que :
$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P(r;t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

I.3.266 **Centrale-Supélec MP 2014**

1. Montrer que
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t$$
converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est monotone.
3. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

I.3.267 **X MP 2017**

1. Soit $f \in C([0\,;1],\mathbb{R})$. On suppose que :
$$\forall k \in [\![0\,,n-1]\!],\ \int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0.$$
Montrer que f s'annule au moins n fois sur $[0\,;1]$.
2. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On suppose que :
$$\forall k \in [\![0\,,n-1]\!],\ \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que f s'annule au moins $2n$ fois.

I.3.268 **X-ENS Cachan PSI 2017**

Soit $a = (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que f est définie, de classe C^1, positive.
2. Montrer que $f(a) \to +\infty$ quand $\|a\| \to +\infty$.
3. Montrer que f admet un minimum.

   On note $a^* = (a_1^*; \dots; a_n^*)$ un point où ce minimum est atteint.
4. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1\,, n]\!],\ i! + (i+1)!a_1^* + \dots + (i+n)!a_n^* = 0.$$

5. Soit $P(X) = 1 + a_1^*(X+1) + a_2^*(X+1)(X+2) + \dots + a_n^*(X+1)\cdots(X+n)$.
   Montrer que $P(X) = a_n^*(X-1)\cdots(X-n)$.

   Calculer $P(-1)$, puis en déduire que $a_n^* = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.
6. Montrer que :

$$f(a_1^*; \dots; a_n^*) = 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1^* x + \dots + a_n^* x^n) \, \mathrm{d}x.$$

   En déduire que $f(a^*) = \dfrac{1}{n+1}$.

I.3.269 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

I.3.270 **CCINP MP 2018**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \end{array}$$

1. On suppose $1 < \alpha < 3$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose $\alpha \leqslant 1$. En utilisant les nombres

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \, \mathrm{d}t,$$

   montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.3.271 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, bornée et intégrable.

1. Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Discuter la convergence de $\sum u_n$ en fonction de $\|f\|_\infty$.

I.3.272 **CCINP PC 2021**

Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?
2. (a) Calculer $J_n(1)$.
   (b) Soit x tel que $-1 < x \leqslant 1$. Montrer que $J_n(x) \geqslant J_n(1)$. En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$ quand $-1 < x \leqslant 1$.
   (c) i. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction

   $$f : t \longmapsto \ln(\sin(t))\sin^b(t)\cos^n(t)$$

   est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
   ii. Montrer que J_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Soit $g_x(t) = \dfrac{\sin^x(t)}{1-\cos(t)}$ où $x > 1$.

   Montrer que g_x est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(t)\,\mathrm{d}t$.
   (e) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$.

I.3.273 **Mines-Ponts 2012**

Montrer que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1)}\,\mathrm{d}t$$

est définie sur $\mathbb{R}_+$. Y est-elle continue ? intégrable ?

I.3.274 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que :

$$xf'(x) - f(x) + 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

I.3.275 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que dans ces conditions :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

I.3.276 **Mines-Ponts PSI 2018**

Soit
$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \cdot \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de F, F' et F'' en $+\infty$.
3. Calculer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

I.3.277 **Centrale-Supélec PSI 2018**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, $a_k = \dfrac{k\pi}{n}$.
   (a) Montrer que :
   $$(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2x\cos(a_k) + x^2) = (x-1)(x^{2n}-1).$$
   (b) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.
3. Calculer $f(1)$.

I.3.278 **CCINP MP 2022**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

I.3.279 **Centrale-Supélec 2012**

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + |x - n|}.$$

2. Étudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de carré intégrable.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   On prendra soin de justifier l'existence des intégrales mises en jeu.

I.3.280 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$ des nombres réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\forall i \in \{1; \ldots; n\},\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies P = 0.$$

2. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1; \ldots; n\},\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

I.3.281 **Centrale-Supélec PC 2023**

Pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, on pose :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-x-3}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1\,; +\infty[$ et donner ses variations.
4. Déterminer la limite de f en -1.
5. Exprimer la fonction f.

I.3.282 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x; t)\,\mathrm{d}t$$

avec $u, v \in C([a\,; b], \mathbb{R})$ et $f \in C([a\,; b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
La fonction F est-elle continue sur $[a\,; b]$?

I.3.283 **CCINP PC 2024**

On pose $g(t) = \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer après prolongement par continuité en 0 que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, où $p \in \mathbb{N}$.
   Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_p converge-t-elle ?
3. (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = \tfrac{3}{4}\sin(t) - \tfrac{1}{4}\sin(3t).$$
   (b) Montrer que :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   On suppose désormais que $p = 3$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit U et V des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $U(a) = V(a)$. Montrer que :
   $$\lim_{x\to a} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
5. Déduire des questions précédentes la valeur de I_p.

I.3.284 **CCINP PC 2025**

Calculer :
$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.285 **X MP**

Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$. Après avoir justifié son existence, calculer l'intégrale suivante :
$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((2m+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.286 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit
$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Calculer f.

I.3.287 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Soit B la boule fermée de centre O et de rayon 1 pour cette norme. Soit enfin $f \in E$. Montrer que :
$$\sup_{g\in B} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

I.3.288 **ENSEA/ENSIIE PSI 2018**

Soit la fonction :
$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier le caractère C^1 de f et déterminer f'.
3. En déduire une expression simple de f.

I.3.289 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right)\mathrm{d}t.$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par deux changements de variables.

I.3.290 **Mines-Ponts MP 2022**

Selon la valeur du paramètre réel p, discuter la convergence de l'intégrale :
$$\int_1^{+\infty} \frac{t^p - 1}{t^2 \ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer sa valeur en cas de convergence.

I.3.291 **Mines-Télécom PSI 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;1[$.
   On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

I.3.292 **Mines-Ponts MP 2017**

On définit $R : h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto R(h)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $R(h)(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $S : g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto S(g)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $S(g)(x) = g'(0) + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation entre W_{n+2} et W_n.
3. Soit P un polynôme. Montrer que $(S \circ R)(P) = P$.
4. Montrer que pour tout $g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $(S \circ R)(g) = g$.

I.3.293 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\omega = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{\omega t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_n pour tout entier naturel n.
2. En déduire une expression de la fonction $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
3. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels tels que $a < b$ et $f \in C([a\,;b], \mathbb{R})$ une fonction telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
En admettant le résultat suivant :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in [a\,;b],\ |f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$
montrer que $f = 0$.

I.3.294 **ENS MP 2014**

Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positives, continues et 2π-périodiques. On suppose de plus que, pour tout naturel n :

- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- $\forall \delta > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Soit alors f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique. On pose, pour tout entier naturel n :
$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (f_n(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

I.3.295 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g la fonction définie pour tout $x > 0$ par :
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. On suppose que f a une limite en $+\infty$. Déterminer celle de g.

I.3.296 **Mines-Ponts PSI 2024**

Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. Est-ce cohérent avec les théorèmes du cours ?

I.3.297 **Mines-Télécom MP 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   On admet que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.3.298 **CCINP PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh^n(x)}$.

1. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$.
2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^n(x)}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer la nature des séries de terme général $(-1)^n I_n$ et I_n.
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$?

I.3.299 **Mines-Ponts MP 2019**

On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de I.
2. Déterminer un équivalent de I en $+\infty$.

I.3.300 **Centrale**

Pour tout $x \in]0\,;1[$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.301 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Pour $x \in]0\,;1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+x^2}}.$

   On pourra effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+x^2}}\,\mathrm{d}u \sim -\ln(x)$ quand $x \to 0^+$.
4. Montrer que $f(x) \sim -\ln(x)$ quand $x \to 0^+$.

I.3.302 **X ESPCI 2015**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$. Soit $a > 0$.
Montrer que $x \mapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et que leur intégrale sont égales.

I.3.303 **CCINP PC 2014**

Soit

$$F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. En déduire $F\left(\frac{3}{2}\right)$.

I.3.304 **X ESPCI 2013**

Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ en 0, en 1 et en $+\infty$.

I.3.305 **ENSEA/ENSIIE PSI 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in [0\,;1] \mapsto n^2 x \mathrm{e}^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

I.3.306 **Mines-Télécom MP 2022**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

I.3.307 **CCINP PSI 2025**

On pose :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
   Déterminer f'.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x) + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

I.3.308 **TPE/EIVP MP 2012**

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. La fonction g est-elle bornée ?
2. La fonction g est-elle décomposable en séries entières ?
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.
   On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. Soit $W_n = n\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

I.3.309 **ENS MP 2019**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$.

I.3.310 **ENSEA/ENSIIE PSI 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{(x\ln(x))^n}{n!}.$$

1. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement et exprimer sa somme.
2. Montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;1]$ et calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer l'intégrabilité de $x \mapsto x^x$ sur $]0\,;1]$.

I.3.311 **CCINP PSI 2023**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

   $$I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. (a) Montrer que I converge.
   (b) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} K_n = I$.
   (c) On introduit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.
   (d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.
   (e) En déduire la valeur de I.

I.3.312 **X MP 2019**

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cos(\theta)+n\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que les J_n sont à valeurs réelles.
2. Montrer que les J_n sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de leur développement.

I.3.313 **ENS PC 2024**

Soit $f : [0\,;1] \to]0\,;+\infty[$ une fonction intégrable telle que $f(x)f(1-x) = 1$ pour tout $x \in [0\,;1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

I.3.314 **X ESPCI 2017**

Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad c\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

I.3.315 **Mines-Ponts PC 2025**

On donne :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

1. Justifier l'existence de :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}.$$

4. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

I.3.316 **X ENS PC 2025**

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\cos(xy)\,\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer que $|f^{(k)}(x)| \leqslant k!$
3. Quels sont les couples $(x;k)$ tels que $|f^{(k)}(x)|= k!$?
4. Déterminer une formule explicite pour $f^{(k)}(x)$.
   On pourra utiliser l'égalité $\cos(xy) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy})$.
5. En déduire que :

$$|f^{(k)(x)}| \leqslant \frac{k!}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

I.3.317 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une fonction continue $f : [0\,;b] \to \mathbb{R}$ et une fonction continue b-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose :

$$\omega(f;t) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ |x-y| \leqslant t\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon_n(f;g),$$

   où $\epsilon_n(f;g)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+3\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x$.

I.3.318 **ENS PC 2025**

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [0\,;1]$. On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) = \int_0^1 |y-x| f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g''(y) = 2f(y)$. À quelle condition a-t-on g bornée ?

I.3.319 **ENS PC 2025**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que :

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\right)^4 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right).$$

I.3.320 **ENS PC 2025**

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a}\cos(ty)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie que $R \to +\infty$ pour $y > 0$. On note $f_\infty(y)$ cette limite. Déterminer un équivalent de $f_\infty(y)$ quand $y \to 0$.

I.3.321 **ENS PC 2025**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a < b$ tels que $f'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in [a\,;b]$.

1. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{(b-a)^2}{2}.$$

2. Existe-t-il une fonction pour laquelle on a l'égalité ?
3. Montrer qu'il existe une suite de telles fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   quand n tend vers $+\infty$.

I.3.322 **ENS PC 2025**

Soit $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$. On définit la fonction suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varphi(x)\varphi(ax)}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que
$$\frac{f(a)}{\ln(a)}$$
est bornée pour $a \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right]$.
3. Que dire de $f(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

I.3.323 **ENS PC 2025**

Soit $a < b$ deux nombres réels.

1. Montrer que pour toute fonction $\varphi : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi''(x) > 0$ et $|\varphi'(x)| \geqslant 1$, pour tout $\lambda > 0$:
$$\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{\lambda}.$$
2. Montrer que pour tout fonction $\varphi : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi''(x) \geqslant 1$ et pour tout $\lambda > 0$:
$$\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

I.3.324 **ENS PC 2025**

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}.$$

I.3.325 **ENS PC 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt)x^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.326 **ENS PC 2025**

On définit l'espace suivant :

$$\mathcal{W}_2 = \{f \in C^\infty([1\,;+\infty[) \mid \forall j \in \mathbb{N},\ \|x^{2+j}f^{(j)}\|_\infty < +\infty\}.$$

Pour $f \in \mathcal{W}_2$, on pose :

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g \in \mathcal{W}_2$.

I.3.327 **ENS PC 2025**

Pour $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ continue, on définit :

$$F(g)(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|} g(x+t) \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $F(g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est continue, bornée et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(g))(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

2. Montrer que $F(g)$ est dérivable deux fois et calculer sa dérivée seconde.

I.3.328 **PT 2022**

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)} \, \mathrm{d}t.$$

I.3.329 **X MP**

Soit $f \in C([0\,;1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\begin{cases} \forall x \in]0\,;1],\ F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\int_0^1 F^2(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 4 \int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

I.3.330 **ENS PSI 2024**

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que h se prolonge continûment en 0.
2. Montrer que h est de carré intégrable et que :

$$\int_0^{+\infty} h^2(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

3. Étudier le cas d'égalité.
4. Montrer que cette inégalité est optimale.

I.3.331 **Mines 2025**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, de limite nulle, à valeurs strictement positives. On considère :

$$N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Card}(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geqslant x\}) \end{array}$$

Étudier l'intégrabilité de N sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale si elle existe.

I.3.332 **PT 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+10}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
2. Trouver une relation liant I_n et I_{n+1}.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.3.333 **C.C.E. Mines PC 2015**

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2\ln(t)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
en posant $x = \sqrt{-\ln(t)}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Justifier le changement de variable $x = (\cos(t))^n$ dans l'intégrale
$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite de fonctions de terme général
$$f_n : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n\left(t^{-\frac{2}{n}} - 1\right)}}$$
converge simplement vers la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-2\ln(t)}},$$
et en déduire, grâce au théorème de la convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I.3.334 **X 2023**

Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2x}\,\mathrm{d}t.$$

I.3.335 **C.C.E. Mines PSI**

On considère :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$.

I.3.336 **C.C.E. Mines PSI**

On considère :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\cosh(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1.
3. Montrer l'existence et déterminer la limite de f en $+\infty$.

I.3.337 **C.C.E. Mines PC 2015**

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\exp(-x)}{1-\exp(-x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

I.3.338 **C.C.E. Mines PSI 2014**

Soit

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire :

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

I.3.339 **X MP 2025**

Soit

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^x\,\mathrm{d}t.$$

Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $I(x)$.

I.3.340 **PT 2019**

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $\arccos(t) + \arcsin(t) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est π-périodique.
3. Montrer que f est constante et déterminer sa valeur.

I.3.341 **PT 2018**

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Déterminer $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait
$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$
3. Calculer la valeur de l'intégrale I.

I.3.342 **Mines-Télécom 2018**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \arctan(t + t^n)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :
$$\arctan(b) - \arctan(a) \leqslant b - a.$$
2. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.3.343 **Mines-Télécom 2022**

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1+x}\,\mathrm{e}^{-ax}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge-t-elle ?

I.3.344 **X-ENS Cachan PSI**

Montrer l'égalité pour tout réel x :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

4 Équations différentielles

I.4.1 **CCP MP**

Soit l'équation différentielle $(E) : 4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à (E).
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = \mathrm{e}^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

I.4.2 **X PC 2019**

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \cos^2(t)$.

I.4.3 **Mines-Ponts MP**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue et bornée.
Soit l'équation différentielle :

$$xy' - y + f(x) = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Déterminer l'unique solution g telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.
   Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On suppose désormais que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
3. Montrer que g^2 et gf sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.4.4 **Centrale PSI**

Soit l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0. \quad (1)$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution de (1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.
2. Déterminer les solutions de (1) qui sont développables en série entière.
3. En posant $x = \sinh(t)$, résoudre (1).

I.4.5 **X**

Résoudre l'équation différentielle

$$t^2y'(t) + y(t) = t^{-n} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

I.4.6 **ENS Lyon 2022**

Soit $q \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$.

Montrer que l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ admet une solution non bornée.

I.4.7 **CCP MP**

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle
$$(x-a)(x-b)y'(x) - nxy(x) = ky(x).$$
2. On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n(X),\ f(P(X)) = (X-a)(X-b)P'(X) - nkP(X).$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer $\det(f)$.

I.4.8 **CCINP 2018**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telles que $f''' = f$.
Indication : justifier qu'il existe un nombre réel λ tel que $f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.9 **ENS PC 2015**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = l \in \mathbb{R}$;
- $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant \alpha$.

Montrer que l'équation différentielle
$$\varphi y'' = \varphi'' y$$
admet une solution qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

I.4.10 **Mines-Télécom MP**

Montrer que les solutions du système d'équations différentielles
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$
possèdent une limite en $-\infty$.

I.4.11 **CCP MP**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E).
3. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
4. En déduire le développement en série entière de f.

I.4.12 **CCP MP**

Soit $F : t \mapsto \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

On admet que $W_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. La fonction F est-elle développable en série entière ? Justifier.
   Le cas échéant, calculer ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.
3. Montrer que F engendre l'espace vectoriel réel des solutions développables en série entière, solutions de l'équation différentielle $(t^3-t)x'' + (3t^2-1)x' + tx = 0$.

I.4.13 **Centrale MP**

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ et l'équation différentielle $(E) : y''(x) = q(x)y(x)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note y_α l'unique solution de (E) vérifiant $y_\alpha(0) = 1$ et $y_\alpha'(0) = \alpha$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x)y_0'(x) > 0$.
   Montrer que y_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que :
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y_\alpha(x) = y_0(x)\left(1 + \int_0^x \frac{\alpha}{y_0(t)^2}\,\mathrm{d}t\right).$$
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1 < 0$ tel que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) y_α s'annule sur $\mathbb{R}_+$;
   ii) $\alpha < \alpha_1$.
   Calculer α_1.

I.4.14 **CCP 2015**

Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

I.4.15 **Centrale 2015**

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

I.4.16 **Mines 2015**

Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.

I.4.17 **Mines 2015**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$$

On donne une solution particulière : $x \mapsto \exp(-2x)$.

I.4.18 **CCINP MPI 2025**

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

I.4.19 **CCP MP**

Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0\,;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1\,;1[$?

I.4.20 **CCP MP**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

I.4.21 **Centrale PSI 2017**

1. Montrer que l'équation différentielle (E) : $y'' = (1+x^4)y$ admet une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f^2(x)}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f^2(t)}\,\mathrm{d}t$ est solution de (E).
4. En déduire les solutions de (E) en fonction de f.

I.4.22 **CCP 2017**

Résoudre matriciellement le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y + 4\mathrm{e}^t \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

I.4.23 **Centrale 2012**

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2+1)y' + y + x = 0$.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. Résoudre l'équation (E). Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

I.4.24 **Mines 2012**

Montrer que l'équation différentielle $(E) : xy' = x + y^2$ admet une unique solution développable en série entière, et que son rayon de convergence appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.

I.4.25 **Centrale 2012**

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$ qui admet une limite en $+\infty$. Préciser cette limite.

I.4.26 **TPE/EIVP 2018**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^x \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.4.27 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ noté (S). Démontrer que toutes les solutions de (S) sont polynomiales si et seulement si A est nilpotente.

I.4.28 **Mines**

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. On considère l'équation différentielle notée (E) donnée par $y' = a(x)y + b(x)$. On note aussi, pour $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ et $I = A(1)$.

1. Trouver une condition sur I pour que A soit 1-périodique.
2. Soit y une solution de (E). Démontrer que $x \mapsto y(x+1)$ est aussi une solution de (E).
3. Soit $I \neq 0$. Démontrer que (E) admet une unique solution 1-périodique.
4. Si $I = 0$, que peut-on dire ?
5. Donner un exemple pour chacune des situations.

I.4.29 **Mines**

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Existe-t-il des solutions bornées ?

I.4.30 **Centrale**

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f :]0\,;+\infty[$ de classe C^1 et solutions de l'équation différentielle (non linéaire) E suivante :

$$xf' - |1-f| = 1.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$.
2. Soit f une solution de (E). Démontrer que f est strictement croissante.
3. On suppose que f est minorée par 1. Déterminer la forme de f, puis obtenir une contradiction.
4. On suppose que f est majorée par 1. Déterminer la forme de f, puis obtenir une contradiction.
5. En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in]0\,;+\infty[$ tel que $f(x_0) = 1$. Déterminer toutes les solutions de (E).

I.4.31 **INP**

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} 2xy' - 3y = 0 & (H) \\ 2xy' - 3y = \sqrt{x} & (E) \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur $]0\,;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0\,;+\infty[$?

I.4.32 **X MP 2019**

Soit x une fonction continûment différentiable au voisinage de 0, telle que

$$x'(t) = 3x(t) + 85\cos(x(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = 77.$$

Montrer que x se prolonge en une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ entier.

I.4.33 **Mines-Télécom MP 2016**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

I.4.34 **Mines-Télécom MP 2024**

Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E) : 2xy'' + y' - y = 0,\ y(0) = 1.$$

I.4.35 **Mines-Télécom MP 2019**

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + \sinh(x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution paire sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0.

I.4.36 **CCINP PC 2023**

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ : \cos(t)y + \sin(t)y' = -\cos(t)\sin(t).$$

Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

I.4.37 **ENSEA/ENSIIE PSI 2024**

Résoudre l'équation différentielle

$$x'' + 6x' + 9x = 2t\mathrm{e}^{-3t},$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.

I.4.38 **CCINP PSI 2022**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \text{ sur l'intervalle }]-1\,;1[.$$

1. Chercher les solutions polynomiales.
2. Effectuer le changement $y(x) = xz(x)$, où z est une fonction inconnue. En déduire une équation différentielle vérifiée par z.
3. Donner $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$:
$$\frac{4x^2-2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$
4. Donner l'expression de z.
5. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1\,;1[$.

I.4.39 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

Résoudre l'équation différentielle

$$t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\cosh(t)}.$$

I.4.40 **CCINP PC 2022**

Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

I.4.41 **Mines-ponts MP 2018**

Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \cot(t)$.

I.4.42 **CCINP PSI 2024**

1. Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

I.4.43 **Mines-Télécom MP 2021**

Déterminer les fonctions $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(t^2+1)x'' - 2x = 0.$$

I.4.44 **Mines 2022**

Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène normalisée à coefficients constants.

I.4.45 **ENS 2023**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions a et b continues sur I.

1. Soit x une solution non nulle de $y'' + ay' + by = 0$ sur I. Montrer que les zéros de x sont isolés.
2. On suppose a de classe C^1. Montrer l'existence d'une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I telle que $f(t) = x(t)\mathrm{e}^{x(t)}$ soit une solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + qy = 0$, où q est continue sur I.
3. On note E_q l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$ sur I. Soit q_1 et q_2 deux fonctions continues sur I, vérifiant $q_1 \leqslant q_2$. On considère $y_1 \in E_{q_1} \setminus \{0\}$ et $y_2 \in E_{q_2} \setminus \{0\}$, ainsi que α et β deux zéros consécutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha\,;\beta]$.

I.4.46 **CCINP MP 2024**

Soit

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

et

$$(H) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière qui vérifie (E) et la déterminer.
2. Montrer que $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est solution de (E).
3. On admet que $h : x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{x^2}$ est solution de (H).
   Déterminer toutes les solutions de (H).

I.4.47 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 3y = \frac{\exp\left(-x^{-2}\right)}{x^5}.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}^*$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

I.4.48 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière.
2. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. Faire le raccordement des solutions puis en déduire la solution sur $\mathbb{R}$.

I.4.49 **Mines-Télécom MPI 2025**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' = (x^4 - 1)y.$$

1. Montrer que s'il existe une fonction f solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$, alors cette fonction est unique.
2. On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose :

   $$g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que g est solution de l'équation différentielle.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

I.4.50 **CCINP TSI 2025**

En posant $z = \ln\left(\dfrac{y}{y+1}\right)$, résoudre l'équation différentielle $y' = y(1+y)$.

I.4.51 **Mines-Télécom PSI 2019**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

I.4.52 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Résoudre sur $D =]-\infty\,;1[$ l'équation différentielle :

$$(E) : xy' + y = \frac{1}{1-x}.$$

2. L'équation (E) a-t-elle une solution de classe C^∞ sur D ?

I.4.53 **X MP 2017**

Résoudre $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

I.4.54 **Centrale-Supélec PC 2017**

On considère l'équation différentielle :

$$\sqrt{1+t^2}\,y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0.$$

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales

$$(f(0); f'(0)) = (0; 1) \quad \text{et} \quad (g(0); g'(0)) = (1; 0).$$

   L'une d'entre elles vous semble-t-elle évidente ?
2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une série entière.
3. Pour tout $t \in]-1\,;1[$, prouver l'égalité $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.

I.4.55 **CCINP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Montrer que $\phi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est solution de (E).
2. À l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

I.4.56 **CCINP TSI 2023**

Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

On pourra poser $z = y'' - y$.

I.4.57 **Mines-Ponts PSI 2012**

Trouver les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle :

$$y'' + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} y = 0.$$

I.4.58 **Centrale-Supélec PSI 2016**

Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(3)}(t) - f(t) = \mathrm{e}^{pt}.$$

I.4.59 **CCINP PC 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2(x - x^2)y''(x) + (x-2)y'(x) - y(x) = 0.$$

1. Montrer que $y_0 : x \mapsto x - 2$ est solution.
   Soit I l'intervalle $]1\,;2[$ ou $]2\,;+\infty[$.
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x-2}$ est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.
3. (a) On pose $\varphi : x \mapsto -2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$. Montrer que φ est dérivable sur I et calculer $\varphi'(x)$ sur I.
   (b) Résoudre (E) sur I sachant que :
   $$\frac{4-3x^2}{2x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x-2}.$$
   (c) Résoudre (E) sur $]1\,;+\infty[$.
   (d) Résoudre (E) sur $]0\,;+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

I.4.60 **Mines-Ponts MP**

1. Soit f une fonction de classe C^1, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$. On suppose que $f'(t) + af(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer que f tend également vers 0 quant $t \to +\infty$.
2. Soit f une fonction de classe C^2, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $f''(t) + f'(t) + f(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer que la fonction f tend également vers 0 quand $t \to +\infty$.

I.4.61 **X MP 2022**

Soit λ un réel.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{1+2t}{1-t}y.$$

2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\exp(-2t)}{(1-t)^3}$.

   Justifier que la fonction f est développable en série entière et donner un équivalent des coefficients de ce développement.

I.4.62 **CCINP PSI 2023**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$.
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x vérifiant (E). Montrer que l'application qui à t associe

$$\frac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$$

   est bornée et atteint sa borne supérieure. Sa borne inférieure est-elle atteinte ?

I.4.63 **CCINP PSI 2022**

Soit la fonction $f(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que cette fonction est C^1 sur un intervalle que l'on précisera et donner sa dérivée.
2. Trouver des polynômes non nuls a, b, c tels que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

3. Montrer que l'unique solution de cette équation, qui s'annule en 0, est une fonction impaire développable en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.
5. Donner ce développement en série entière.

I.4.64 **Mines-Ponts MP 2021**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^3y' - 2y = 0$.

I.4.65 **CCINP PC 2019**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2(x+\mathrm{i})}y = 0$.
3. On définit, pour x réel :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que l'on définit ainsi une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. Étudier le caractère C^1 et exprimer f'.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}f(x).$$
5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note :
$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer l'existence de I_α.
Exprimer I_α en fonction de f.
En déduire le signe de I_α.

I.4.66 **TPE/EIVP PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :
$$(E) : y'' - (2+4x^2)y = 0.$$
Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que :
$$a_0 = 1 \text{ et } \forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Déterminer a_1.
2. Déterminer une relation entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}.
3. Déterminer a_2 et a_3. Faire une conjecture sur a_n et la démontrer.
4. Résoudre (E) en posant $y(x) = f(x)z(x)$.

I.4.67 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :
$$x(y'' - y') + ay = 0.$$

I.4.68 **CCINP MP 2021**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4.$$

1. Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.
2. Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;4[$ et $]4\,;+\infty[$.
3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty\,;4[$, $]0\,;+\infty[$ et $\mathbb{R}$.

I.4.69 **Mines-Télécom PSI 2017**

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - 4y' + y = 0$.

I.4.70 **Mines-Télécom MP 2025**

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

I.4.71 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $a > 0$ et $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée. L'équation $y' - ay = h(t)$ admet-elle une solution bornée dans $\mathbb{R}_+$? Donner ses solutions.

I.4.72 **CCINP PC 2023**

Soit S l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - (x^4 + 1)y(x) = 0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^2(x)$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \geqslant 0$.
4. Montrer que $f^2(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Posons $h(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que h est définie et que $h \in S$.
6. Montrer que $\{f; h\}$ est une base de S.

I.4.73 **ENSAM PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$x(x+1)y' + y = \arctan(x).$$

1. Résoudre l'équation sur les intervalles ne contenant ni -1 ni 0.
2. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

I.4.74 **CCINP PC 2018**

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation :

$$(E) : xy'' + xy' - y = 0.$$

1. Déterminer un réel α tel que $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $s : x \mapsto xf(x)$. Montrer que s est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E'), que l'on précisera.
5. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la fonction G.

I.4.75 **Mines-Ponts MP 2017**

Donner le système à résoudre pour effectuer la variation des constantes dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

I.4.76 **X MP 2018**

Soit $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$x'' = \frac{1-x}{x^3}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x(0)$ et $x'(0)$ pour que x soit bornée.

I.4.77 **CCINP MP 2015**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) = 1.$$

1. Rappeler la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   Résoudre (E) pour $x > 0$.
2. Montrer que (E) admet une solution f développable en série entière sur $]-2\,;2[$.
   Donner ce développement.
3. En déduire à l'aide des questions précédentes une expression de $f(x)$ pour $x \geqslant 0$.

I.4.78 **Mines-Ponts PC 2014**

Résoudre :

$$x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2.$$

I.4.79 **Mines-Ponts PSI 2022**

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' + xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

I.4.80 **Mines-Ponts MP 2015**

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y :

$$x(x^2+1)y'' - 2(x^2+1)y' + 2xy = 0.$$

I.4.81 **Mines-Télécom PC 2022**

On note (E) l'équation différentielle suivante :

$$xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   Sans calcul, déterminer le nombre de solutions de ce problème sur un intervalle bien choisi.
3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
4. Dans le cas $(x_0; y_0) = (0; 1)$, trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy de la question 2.

I.4.82 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
   En déduire une contradiction puis conclure.

I.4.83 **CCINP PSI 2016**

On donne l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0.$$

1. (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
   (b) Pourquoi peut-on dire que (E) admet d'autres solutions ?
2. Résoudre entièrement l'équation différentielle en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{z(x)}{1-x}$. Effectuer les raccordements éventuels.

I.4.84 **CCINP MP 2015**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 2ty' + y = 3t\cos\left(t^{\frac{3}{2}}\right).$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.
2. Résoudre (E) dans le cas général et un déduire une simplification de v.

I.4.85 **Mines-Ponts PSI 2024**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y' + y = x^2.$$

1. Montrer que (E) n'a pas de solution développable en série entière (autour de zéro).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que (E) admet une unique solution y telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$.

I.4.86 **Mines-Ponts PC 2016**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'' - (x+3)y' + 3y = 0.$$

Indication : on commencera par chercher une solution développable en série entière telle que $y(0) = 1$, dont on déterminera explicitement le rayon de convergence.

I.4.87 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' - 3xy' + 4x = x^2$$

et on note (H) l'équation homogène associée.

1. Trouver les solutions polynomiales de (H).
2. Trouver toutes les solutions de (H) sur $]0\,;+\infty[$.
3. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

I.4.88 **Mines-Télécom MP 2019**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

I.4.89 **CCINP PC 2017**

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
3. Montrer que les solutions de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(h(x) + k),$$
où k est une constante réelle.
4. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité suivante :
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}h(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 + xu}\,\mathrm{d}u.$$
On pourra considérer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1 + xu}$.
5. Montrer que la fonction
$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 + xu}\,\mathrm{d}u$$
est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
6. Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$ et que c'est la seule.
7. Montrer que g est de classe C^∞ sur $[0\,;+\infty[$.
8. Trouver la limite de g en $+\infty$.

I.4.90 **CCINP MP 2015**

Résoudre le système différentiel suivant par résolution matricielle (diagonalisation) :
$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - \exp(-t) \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

I.4.91 **Mines-Ponts PC 2016**

Résoudre le système différence homogène $X' = AX$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$
Quelle méthode utiliser dans le cas où il y a un second membre ?

I.4.92 **CCINP PC 2018**

Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r\,;r[$. Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}.$$

Pour tout $x \in]0\,;r[$, on pose :

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x u^{\alpha-1}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $y' + \dfrac{\alpha}{y} = 0$.
2. Pour tout $x \in]0\,;r[$, montrer l'existence de $M_x \geqslant 0$ tel que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $|f(t)| \leqslant M_x$. En déduire que pour tout $x \in]0\,;r[$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $]0\,;x]$.
3. Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0\,;r[$, puis résoudre (E) sur cet intervalle.
4. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall x \in]0\,;1[, \quad T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+\alpha}x^n.$$
5. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0\,;r[$ qui possède une limite finie en 0.

I.4.93 **Mines-Télécom PSI 2016**

On considère l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

Déterminer une solution développable en série entière et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

I.4.94 **Mines-Ponts 2013**

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution maximale. On note f cette solution.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est définie sur un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de f.

I.4.95 **Mines-Télécom MP 2024**

On pose $a_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!}(n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Justifier que f est définie et de classe C^∞ sur $]-1\,;1[$.
2. En déterminant une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, montrer que f vérifie l'équation différentielle :

$$f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x).$$

En déduire l'expression de f.

I.4.96 **TPE/EIVP PC 2015**

On considère l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ avec $y(0)$ et $y'(0) = 0$. Résoudre l'équation différentielle en utilisant des séries entières.

I.4.97 **ENS PC 2025**

Soit $y : \mathbb{R}_+ \to [0\,;1]$ qui satisfait l'équation

$$y' = -\sin(y), \quad y(0) = 1.$$

Montrer que la limite suivante existe et que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t)\mathrm{e}^t < +\infty.$$

I.4.98 **X MP 2008**

Soit $q \in C(I, \mathbb{R})$ telle que $q \leqslant 0$ sur I. On s'intéresse aux solutions sur I de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' + q(x)y = 0.$$

1. Soit $a < b$ dans I, et y une solution de (E) telle que $y(a) = y(b) = 0$.
Montrer que y est nulle sur I.
2. Soit $I = \mathbb{R}$, et on suppose $q \leqslant 0$, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la seule solution bornée de (E) est la fonction nulle.

I.4.99 **ENS PC 2025**

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $[-\pi\,;\pi]$:

$$x''(t) - x(t) = \cos(2t).$$

2. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(t) = 0$ si $|t| \geqslant C$. Montrer qu'il existe une solution à l'équation

$$x''(t) - x(t) = f(t)$$

telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

I.4.100 **X ESPCI 2013**

On considère une solution f bornée de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \frac{xy}{1+x^3} = 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

I.4.101 **Navale MP 2019**

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$ et h sa fonction somme sur $]-R\,;R[$.

1. Déterminer R.
2. Montrer que h vérifie sur $]-R\,;R[$ l'équation différentielle :
$$(1-4x)h'(x) - 2h(x) = 0.$$
3. On pose :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}.$$
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Montrer que f est développable en série entière en zéro et déterminer son développement en série entière.

I.4.102 **PT 2022**

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Déterminer les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
2. Donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$.

I.4.103 **ENS MP 2014**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

I.4.104 **Mines-Télécom 2022**

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : xy'' + (x-2)y' - 2y = 0.$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E).
2. Déterminer une solution de (E) sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

I.4.105 **ENS MP 2025**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ non nulle et deux fois dérivable telle que

$$f'' + af' + bf = 0,$$

où $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Soit $a, b : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telles que $a > b$. On considère des solutions $f, g : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ non nulles des équations :
$$\begin{cases} f'' + af = 0 \\ g'' + bg = 0 \end{cases}$$
On suppose qu'il existe $t_0, t_1 \in [0\,;1]$ tels que $t_0 < t_1$ et $g(t_0) = g(t_1) = 0$.
Montrer qu'il existe $t_2 \in]t_0\,; t_1[$ tel que $f(t_2) = 0$.
3. Soit $p : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f_λ l'unique solution de :
$$\begin{cases} f_\lambda'' + (p(t) + \lambda) f_\lambda = 0 \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f_\lambda'(0) = 1 \end{cases}$$
On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de f_λ dans $[0\,;1]$.
   (a) Montrer que $N(\lambda)$ est strictement croissant en λ.
   (b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} N(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} N(\lambda)$.
4. On pose :
$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f_\lambda(1) = 0\}.$$
Montrer que $S = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite strictement croissante.
On admet que $(\lambda; t) \mapsto f_\lambda(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0\,;1]$.

I.4.106 **X ESPCI 2015**

Soit l'équation différentielle

$$(E) : f'' + af' + bf = 0,$$

avec a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Il existe f et g solutions de (E) telles que $fg = 1$;
ii) la fonction b est de classe C^1, négative et $b' = -2ab$.

I.4.107 **X MP 2025**

On considère l'équation différentielle

$$y'' + \mathrm{e}^x y = 0, \text{ sur } \mathbb{R},\, y \neq 0.$$

Montrer que y s'annule au moins une fois.

I.4.108 **CCINP MP 2012**

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.
2. Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit

$$h : x \longmapsto \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x - t) \, \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $h'' + 4h = g$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = g$.
3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f > 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) > 0.$$

5 Fonctions de plusieurs variables

I.5.1 **CCP MP**

Déterminer les coordonnées et la nature des extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 - (y^3 - y)^2 \end{array}$$

I.5.2 **Mines-Ponts/X MP**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $h = a\dfrac{\partial h}{\partial x} + b\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
On suppose que h est bornée. Montrer que h est nulle.

I.5.3 **CCP 2015**

On considère le disque $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et la fonction f définie par :

$$\forall (x;y) \in \mathcal{D},\ f(x;y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

La fonction f admet-elle sur $\mathcal{D}$ des extrema globaux ou des extrema locaux ?

I.5.4 **CCP MP**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0;0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0;0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

I.5.5 **CCP MP**

On pose, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, $f(x;y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0;0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

I.5.6 **CCP MP**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ \alpha & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

1. Prouver que :
$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0;0)$ et donner leur valeur.
   (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

I.5.7 **CCP MP**

1. Soit E et F deux espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application.
   Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x;y) \in E \times E$, $\|(x;y)\| = \max(\|x\|_\infty; \|y\|_\infty)$.
   On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
   (a) Prouver que :
   $$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x;y) \in E \times E,\ |B(x;y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0; v_0) \in E \times E$.

I.5.8 **Mines 2016**

On considère l'ensemble $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6\}$ et la fonction f définie sur Δ par :
$$\forall (x;y) \in \Delta,\ f(x;y) = x^2 y(x+y-4).$$

1. Représenter le domaine Δ.
2. Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ.

I.5.9 **CCINP 2024**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x;y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0\,;1] \times [0\,;1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.

I.5.10 **X-ENS/Mines-Ponts MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note : $f(M) = (\mathrm{Tr}(M); \mathrm{Tr}(M^2); \ldots; \mathrm{Tr}(M^n)) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}f(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal annulateur de M, noté π_M.
3. Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \pi_M\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

I.5.11 **Mines-Ponts MP**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la fonction g admet un minimum global.
3. En déduire que la fonction f est surjective.

I.5.12 **Mines-Ponts PSI**

L'application $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x;y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$, et $H(0;0) = 0$ est-elle continue ? de classe C^1 ?

I.5.13 **CCINP MP 2023**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x;y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un minimum sur C.
2. Soit $(u;v) \in C$ où f atteint l'un de ses extrema.
   (a) Justifier avec un théorème de votre programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

   $$\begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
3. Déterminer les valeurs possibles de $(u;v)$, puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

I.5.14 **CCINP PC 2017**

On pose $f(x;y) = x\ln(y) - y\ln(x)$ pour tout $(x;y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.
Déterminer les extrema de f sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

I.5.15 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ et $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right\}$.

1. Représenter Δ et D dans $\mathbb{R}^2$.
2. Les ensembles Δ et D sont-ils ouverts ? fermés ?
3. Montrer que
$$f : (x;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\sin(xy))}{xy} & \text{si } (x;y) \notin \Delta \\ 1 & \text{si } (x;y) \in \Delta \end{cases}$$
est de classe C^∞ sur D.

I.5.16 **CCINP TSI**

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$$
Déterminer les points où f admet des extrema locaux.

I.5.17 **Mines 2024**

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \min(x^2;y^2) \end{array}$$
Quel est le domaine de continuité de f ? de différentiabilité de f ? La fonction f est-elle de classe C^1 ?

I.5.18 **Centrale-Supélec PC 2023**

On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - \ln(1+x^2) \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ F(x;y) = f(x) - f(y).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et que l'équation $f'(x) = a$ d'inconnue x admet au plus deux solutions.
2. Déterminer les points critiques de F.
3. Quelle est la nature des points critiques ?

I.5.19 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Rechercher les éventuels extrema de la fonction $f(x;y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$.

I.5.20 **Mines 2024**

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{2}\sin(x+y); \dfrac{1}{2}\cos(x-y)\right) \end{array}$$

1. Déterminer la différentielle de f.
2. Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\| \mathrm{d}f(x;y) \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire que le système

$$\begin{cases} 2x = \sin(x+y) \\ 2y = \cos(x-y) \end{cases}$$

admet au plus une solution.

I.5.21 **Mines 2023**

Étudier l'existence, la continuité et les extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+x)}{t+y}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

I.5.22 **ENSEA/ENSIIE MPI 2023**

Étudier les extrema de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x(y^2 + \ln^2(x)) \end{array}$$

I.5.23 **Mines-Ponts MP 2022**

On pose :

$$f(x;y) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f admet-elle des extrema globaux ? locaux ?

I.5.24 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ?

I.5.25 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 3xy - x^3 - y^3 \end{array}$$

Étudier les extrema de la fonction f.

I.5.26 **CCINP PSI 2019**

Soit $f : (x;y) \mapsto \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$, et $f(0;0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

I.5.27 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 telle que f admet un extremum en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.
2. Énoncer un théorème semblable pour U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3. Étudier les extrema de

$$f : (x;y) \longmapsto |\sin(x + \mathrm{i}y)|^2$$

sur l'ensemble $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

I.5.28 **Mines-Ponts PSI 2025**

On pose $f(x;y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les dérivées partielles de f.

I.5.29 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 y^2 (x + y - 1) \end{array}$$

1. Trouver les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux de f.

I.5.30 **CCINP MP 2027**

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

I.5.31 **CCINP PSI 2015**

On considère les deux ensembles suivants :

$$K = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\},$$
$$T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < \pi\}.$$

On considère la fonction $F(x;y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$ et $F(x;y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$.

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum ? Si oui, déterminer leur valeur.

I.5.32 **CCINP MP 2022**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x;y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les points critiques de f. La fonction f admet-elle un extremum global ?
2. Soit $(a;b)$ un point critique de f. Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a;b;f(a;b))$.
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1;1;1)$.
4. Exprimer la différentielle en $(1;1)$, puis g telle que $g(x;y) = (f(x;y);f(x;y))$.

I.5.33 **Mines-Ponts PSI 2014**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

1. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.
2. En est-il de même pour deux points de $\mathcal{C}$ séparés d'un quart de tour ?

I.5.34 **CCINP PSI 2017**

On note f la fonction :

$$(x;y) \longmapsto x^2y + \ln(4 + y^2).$$

1. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ un unique point critique.
2. On note $g : x \mapsto f(x;x^3) - f(0;0)$. Trouver un équivalent simple de g en 0.
3. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?

I.5.35 **Centrale-Supélec PC 2023**

On définit :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [-2\,;2] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2} - \sqrt{4 - x^2}\cos(y) \end{array}$$

Montrer que f possède un maximum et un minimum, puis déterminer leur valeur.

I.5.36 **CCINP PC 2019**

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x;y) = \cosh(2x) - \cos(2y).$$

On considère les deux ensembles suivants :

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$$D' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leqslant t$ et $\sinh(t) \geqslant t$.
2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.
4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.
5. En déduire qu'il existe $t_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0);\sin(t_0))$.
6. Étudier les variations sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta);\sin(\theta))$. Conclure.

I.5.37 **CCINP TSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y;z) & \longmapsto & (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2) \end{array}$$

et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x;y;z) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est régulière en tout point.
2. Soit $M(3;0;0)$. Trouver une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par M.

I.5.38 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\Delta = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et

$$f : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \longmapsto \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose que h est de classe C^1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose que h est de classe C^2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

I.5.39 **Mines-Ponts MP 2023**

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne usuelle. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geqslant a N(x-y)^2.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $N(x)$ tend vers $+\infty$.

I.5.40 **ENS MP 2022**

1. Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\Delta u > 0$ sur $\overline{B}(0,1)$. Montrer que u atteint son maximum sur la sphère $S(0;1)$.
2. Démontrer le même résultat en supposant uniquement que $\Delta u \geqslant 0$ sur $\overline{B}(0,1)$.
3. Soit V telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\Delta V = 0$.

I.5.41 **CCINP PC 2018**

1. Soit

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) + \exp(x) \end{array}$$

Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.

2. Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x\exp(y) + y\exp(x) \end{array}$$

Montrer que si $(x_0;y_0)$ est un point critique, alors $x_0 < 0$, $x_0y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).

3. Soit $x \mapsto f(-1+ax;-1+x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5. Notons $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

I.5.42 **Mines-Télécom PSI 2022**

Étudier la continuité en $(0;0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0;0)$. Elles sont définies pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ par :

$$f(x;y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, \quad g(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad h(x;y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2+xy}.$$

I.5.43 **TPE/EIVP PSI 2017**

Posons $f(x;y) = (x-y)^2(1-x^2-y^2)$ pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Préciser le signe de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?
4. Montrer que f possède un maximum global et préciser les points où il est atteint.
5. Préciser les extrema locaux de f.

I.5.44 **CCINP PC 2015**

Soit

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x-y} \end{array}$$

1. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t.$$
2. Déterminer tous les points critiques de f et donner leur nature. Existe-t-il un maximum ?

I.5.45 **CCINP MP 2023**

On note, pour tous réels x et y :

$$f(x;y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x;0) = 0.$$

1. On pose $X_0 = (x_0; 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f est continue en $(x_0; 0)$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.
   (a) Calculer les dérivées partielles de f en X_1.
   (b) La fonction f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1, puis en $(0;1)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0. Si on suppose que f est différentiable en X_0, que vaut sa différentielle ?

I.5.46 **CCINP MP 2012**

1. Déterminer les extrema de la fonction
$$f : (x;y) \longmapsto \sin(x)\cos(x)\cos(x+y)$$
sur le domaine
$$\Delta = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}.$$
2. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x + y + z \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Montrer que $\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leqslant \frac{1}{8}$.

I.5.47 **Mines-Ponts MP 2014**

Montrer que

$$f(x;y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - nx - y)^2}{2^n}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle possède un minimum et trouver pour quel couple $(x;y)$ elle l'atteint.

I.5.48 **CCINP PC 2024**

Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives, de classe C^2, convexe et de dérivée strictement négative.

1. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ vérifie ces hypothèses.
2. Soit
$$g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + h'(x) \end{array}$$
   (a) Montrer que g est strictement croissante, et vérifier que $g(0) < 0$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution. On la notera α.
3. Soit f l'application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à $(x;y)$ associe $x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
   (a) Montrer que $\left(\alpha; \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de f.
   (b) Montrer que f admet un extremum local et déterminer sa nature.
4. On pose :
$$\phi : ((x;y);(x';y')) \longmapsto xx' - xy' - x'y + 2yy'.$$
   On admet que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :
$$\exists k > 0,\ \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2xy + 2y^2 \geqslant k(x^2 + y^2).$$
5. Montrer que l'extremum de f est global.

I.5.49 **ENSAM 2015**

Déterminer les fonctions $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que le champ de vecteurs
$$V(x;y) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix}$$
soit le gradient d'une fonction f. Calculer alors cette (ces) fonction(s) f.

I.5.50 **ENS MP 2019**

On définit les intégrales doubles des fonctions de $[0\,;1]^2$ dans $\mathbb{R}$ continues : on intègre successivement et les deux variables jouent des rôles équivalents i.e.
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$
On définit une norme :
$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 f(x;y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}.$$
On considère l'ensemble A des $g \in C([0\,;1]^2, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $r, s : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ avec, pour tous x, y, $g(x;y) = r(x)s(y)$.
Soit $f \in C([0\,;1]^2, \mathbb{R})$. Supposons que, pour tout $g \in A$, $\|f + g\| \geqslant \|f\|$.
Montrer que f est la fonction nulle.

I.5.51 **CCINP PC 2024**

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 - y^2 \end{array}$$
Soit l'ensemble $C = \{(x;y) \mid h(x;y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe C^1, puis montrer que $(0;0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0;0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1 telle que $f(x;y) = 0$ pour tout $(x;y) \in C$.
   (a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t^2;t^3) = 0$.
   (b) En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0) = 0$.
3. Soit
$$\varphi_t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & f(t^2;u) \end{array}$$
   Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3\,;t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$.
4. Conclure que $(0;0)$ est un point critique pour f.
5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

I.5.52 **Mines-Ponts MP 2024**

Posons $D = {\mathbb{R}_+^*}^2$. Montrer que l'ensemble
$$S = \left\{ g \in C^1(D,\mathbb{R}) \mid \exists f \in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),\ \forall (x;y) \in D,\ g(x;y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \right\}$$
est l'ensemble des solutions sur D d'une équation aux dérivées partielles à préciser.

I.5.53 **CCINP PSI 2014**

On pose $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 + xy \leqslant 1\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il borné ?
2. À l'aide du changement de variable $u = x + \frac{y}{2}$ et $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$, calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

I.5.54 **TPE/EIVP MP 2018**

On définit :
$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1;\dots;x_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \end{array}$$
La fonction f admet-elle des extrema ? Si oui, lesquels ?

I.5.55 **Mines-Télécom MP 2018**

Étudier la fonction f définie par :
$$f(x;y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

$\boxed{\textbf{I.5.56}}$ **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit, pour tout $(u;v) \in D$:

$$\phi(u;v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}; \frac{u}{v}\right).$$

1. Montrer que ϕ est une bijection de D dans Δ.
2. Montrer que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1.

$\boxed{\textbf{I.5.57}}$ **Centrale-Supélec PC 2022**

Soit $f \in C^2(]0\,;+\infty[, \mathbb{R})$. On définit :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : &]0\,;+\infty[^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x;y;z) & \longmapsto & f\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) \end{array}$$

Déterminer les choix de f tels que :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

$\boxed{\textbf{I.5.58}}$ **CCINP PC 2018**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *harmonique*, c'est-à-dire g est de classe C^2 et :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

1. Trouver a, b des réels tels que :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' = 0.$$

   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = f \circ g$.

3. Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
4. On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique si et seulement si g est une constante.

   Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et :

$$G(x;y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\cosh(y)}\right).$$

5. Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

I.5.59 **Mines 2015**

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2)$$

dans le domaine $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x;0) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$, en passant en coordonnées polaires.

I.5.60 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit

$$f : (x;y) \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les extrema locaux de f.

I.5.61 **ENS MP 2013**

On suppose disposer d'une fonction f de deux variables $(t;x) \in \mathbb{R}_+^2$, positive, de classe C^1, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(0;x) = 0$, et vérifiant l'inégalité :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} \leqslant Kf,$$

où c et K sont deux constantes réelles avec $c > 0$. Montrer que f est nulle.

I.5.62 **ENS MP 2013**

Soit v une fonction de deux variables $(t;x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, lipschitzienne et bornée.
Montrer qu'étant donnée une fonction $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial (uv)}{\partial x} = 0 \\ u(0;\cdot) = u_0 \end{cases}$$

I.5.63 **Centrale-Supélec MP 2013**

On considère $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien.
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
On note $N : x \mapsto \|x\|$ et $F : x \mapsto f(\|x\|)x$.

1. La fonction N est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?
   Quelle est la différentielle de N ?
2. La fonction F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?
   Quelle est la différentielle de F ?
3. La fonction F est-elle continue en 0 ? Est-elle différentiable en 0 ?

I.5.64 **CCINP MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0;0) = 0$ et

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) > \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right|.$$

On pose $u : x \mapsto f(x;x)$, $v : x \mapsto f(x;-x)$ et $w_x : y \mapsto f(x;y)$.

1. Calculer les dérivées de u, v et w_x.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leqslant |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \mapsto y_x$. On suppose que φ est dérivable. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x;\varphi(x))$. Montrer que φ est de classe C^1.

I.5.65 **ENS MP 2014**

Soit $\mu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $\chi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi\mu)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi)\|^2 \mu^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \chi^2 \mu \Delta\mu.$$

I.5.66 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit S une matrice symétrique réelle. On note

$$R(X) = \frac{X^T S X}{X^T X}$$

pour tout vecteur colonne X non nul.
Montrer que $P(x) = \det(S - xI_n)$ admet comme racines les valeurs prises par la fonction R en ses points critiques.

I.5.67 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-2\} \\ & & z & \longmapsto & \dfrac{2z+1}{z+2} \end{array}$$

On pose $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que sous réserve de restrictions, f définit une bijection sur chacun de ces ensembles.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, $u : (x;y) \mapsto \mathrm{Re}(f(z))$ et $v : (x;y) \mapsto \mathrm{Im}(f(z))$. Montrer que u et v sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-2;0)\}$.
3. Déterminer f^{-1}.
4. Déterminer le jacobien de $(x;y) \mapsto (u(x;y); v(x;y))$.
5. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{|(z+2)^4|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

I.5.68 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f. Montrer qu'elles sont continues en $(0;0)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Interpréter le résultat.

I.5.69 **CCINP MP 2022**

Soit $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x;y) & \longmapsto & \left(xy; \dfrac{x}{y}\right) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2. On pose $(u;v) = \Phi(x;y)$ et $f(x;y) = F(u;v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3. Résoudre :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) - 2f(x;y) + 2 = 0.$$
4. Résoudre :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

I.5.70 **CCINP MP 2022**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Prouver que $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. On pose $\overrightarrow{u_\theta} = (\cos(\theta); \sin(\theta))$ avec $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.
   Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0;0)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ existe.
3. Existe-t-il des dérivées partielles de f en $(0;0)$?
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ avec $(x;y) \neq (0;0)$.
5. Est-ce qu'il existe des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

I.5.71 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $(p; q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(p; q) \neq (0; 0)$, et $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que les restrictions de f aux droites d'équation $px + qy = c$ sont constantes si et seulement si $q\dfrac{\partial f}{\partial x} = p\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

I.5.72 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

I.5.73 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]^2$ telle que :

$$\forall (x; y) \in [0\,;1]^2 \setminus \{(1; 1)\},\ f(x; y) = \frac{xy(1-y)(1-x)}{1 - xy} \quad \text{et} \quad f(1; 1) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; 1]^2$.
2. Déterminer $\sup(f)$ sur son ensemble de définition.

I.5.74 **ENS PC 2025**

Soit

$$f(x; y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr)\sin(yr)}{(1+r)^2}\,\mathrm{d}r.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
3. Montrer que $x \mapsto f(x; x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
4. Bonus : la fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$?

I.5.75 **ENS PC 2025**

Soit $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$|h(x)| \leqslant \frac{1}{1 + |x|} \quad \text{et} \quad |h'(x)| \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

I.5.76 **Mines-Ponts MP 2016**

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x;y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

et donner leur nature.

I.5.77 **CCINP TSI 2024**

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x;y) = h(x-y)$.

1. Montrer que f est solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. On pose $\varphi(t) = f(x+t; y+t)$. Calculer $\varphi'(t)$.

I.5.78 **ENS MP 2014**

Soit $f(r;\theta) = f(z) = f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ à valeurs réelles et de Laplacien nul.
On rappelle que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \overline{z}^n.$$

I.5.79 **Navale PSI 2022**

Trouver toutes les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0.$$

I.5.80 **ENS MP 2013**

On suppose disposer d'une fonction f de deux variables $(t;x) \in \mathbb{R}_+^2$, positive, de classe C^1, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(0;x) = 0$, et vérifiant l'inégalité

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} \leqslant Kf,$$

où c et K sont deux constantes réelles avec $c > 0$. Montrer que f est nulle.

I.5.81 **ENS MP 2013**

Soit v une fonction de deux variables $(t;x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, lipschitzienne et bornée. Montrer qu'étant donnée une fonction $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe une fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ unique vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial (uv)}{\partial x} = 0 \\ u(0;\cdot) = u_0 \end{cases}$$

I.5.82 **ENS Ulm MP 2025**

Trouver toutes les fonctions harmoniques et α-homogènes à deux variables réelles.

I.5.83 **PT 2019**

On souhaite déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall (x;y) \in U, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 0.$$

On considère le changement de variables $(u;v) = (xy; xy^{-1})$ et on définit, pour tout $(u;v) \in U$, $F(u;v) = f(x;y)$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de F.
2. Montrer que l'équation de départ devient $\dfrac{\partial F}{\partial v} - 2u \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$, puis la résoudre.

I.5.84 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

Déterminer les fonctions $\Psi \in C^1(]0\,;+\infty[^2; \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x;y) \in]0\,;+\infty[^2, \quad x \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x;y) + y \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

6 Topologie

I.6.1 **CCP**

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) On suppose $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbb{R}$.

I.6.2 **CCP MP**

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

I.6.3 **CCP MP**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose, pour tout $x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que :
   $$d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}.$$
   (b) On suppose que A est fermée et que, pour tout $(x;y) \in E^2$, pour tout $t \in [0\,;1]$,
   $$d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y).$$
   Prouver que A est convexe.

I.6.4 **X PC 2019**

On considère l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant une famille libre. Montrer que cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

I.6.5 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer qu'une intersection décroissante de boules fermées de E est encore une boule fermée.

I.6.6 **CCP MP**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$. On munit E des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définies par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On pose $O = \{f \in E \mid f(1) > 0\}$ et $F = \left\{f \in F \mid \int_0^1 f(t) \leqslant 0\right\}$.

1. Montrer que O est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.
3. L'ensemble O est-il ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$?

I.6.7 **CCINP 2024**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) Soit $u : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   Soit $c : [0\,;1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et on note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$. L'ensemble F est-il fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$?

I.6.8 **X-ENS**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que tout $a \in A$ est isolé. Montrer que l'ensemble A est au plus dénombrable.

I.6.9 **X-ENS**

Donner un exemple de forme linéaire non continue.

I.6.10 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact d'intérieur vide de $M_n(\mathbb{R})$.

I.6.11 **CCP MP**

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel réel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que, } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

3. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

I.6.12 **CCP MP**

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Soit f une application de E dans F et a un point de E.
   Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :
   i) L'application f est continue en a.
   ii) Pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense dans E, et soit f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

I.6.13 **CCP MP**

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) L'application f est continue sur E.
   ii) L'application f est continue en 0_E.
   iii) Il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

   On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

I.6.14 **CCP MP**

Soit $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

On considère l'ensemble $A = \left\{ f \in E \mid f(0) \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que si $f \in A$, alors $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n > 1$. On considère

$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leqslant \alpha \\ 1+\dfrac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

   Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $f_n \in A$.
   En déduire la distance de O_E à A.

I.6.15 **CCINP 2024**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de E par $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}|a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0;1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n des entiers naturels distincts.
   L'ensemble $S(0;1)$ est-il une partie compacte de E ? Justifier.

I.6.16 **Mines-Ponts**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application

$$f : x \longmapsto \frac{x}{1+\|x\|}$$

réalise une bijection continue de E dans la boule ouverte centrée en O et de rayon 1.

I.6.17 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit X une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

I.6.18 **CCP PSI**

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées complexes.

1. Montrer que $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E.
2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

I.6.19 **Centrale PSI**

On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? un groupe multiplicatif ? un fermé de $M_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$?

I.6.20 **X-ENS**

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

I.6.21 **X-ENS**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension finie, K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.
Cette boule est-elle unique ?

I.6.22 **X**

Décrire les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ et de $GL_n(\mathbb{R})$.

I.6.23 **X**

Décrire les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$.

I.6.24 **X**

Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

I.6.25 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E le plan euclidien.

1. L'ensemble $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ est-il un fermé de E ?
2. Donner la définition d'un partie connexe par arcs.
3. Montrer que le cercle de centre O et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée, est un segment.

I.6.26 **X**

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{A} = \{u \in L(\mathbb{R}^n) \mid u(K) \subset K\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est compact.
2. Montrer que, pour $u \in \mathcal{A}$, $|\det(u)| \leqslant 1$.

I.6.27 **x**

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ convexe non vide et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(K) \subset K$. Montrer que u admet un point fixe dans K.

I.6.28 **Centrale-Supélec MP 2025**

1. Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

   Soit Ω une partie de $E = \mathbb{R}$. On note (C) la propriété suivante :
   Pour toute fonction $f : \Omega \to \{0; 1\}$ continue sur Ω, f est constante.
2. Montrer que si Ω est connexe par arcs, alors Ω vérifie (C).

   Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\Omega = \left\{\left(x; \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\} \cup (\{0\} \times [-1\,; 1])$.
3. (a) Montrer que Ω vérifie (C).
   (b) Montrer que Ω n'est pas connexe par arcs.

I.6.29 **Centrale**

Soit E un espace vectoriel réel normé et f une forme linéaire de E. Montrer que :

$$f \text{ est continue} \iff \mathrm{Ker}(f) \text{ est fermé.}$$

I.6.30 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n et scindés sur $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer que U_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)|.$$
2. Conclure.

I.6.31 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension n. On identifiera $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit M un matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = X^T AX$, pour $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant \varphi_A(X) \leqslant \lambda_n \|X\|^2.$$
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.

I.6.32 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit E un espace vectoriel réel normé et A, B des sous-ensembles de E. On pose :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A et B son compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

I.6.33 **ENS MPI 2025**

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E, non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide.

I.6.34 **Mines-Ponts MP 2023**

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un fermé de ℓ^∞.

I.6.35 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A.

1. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert.
2. On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que, si $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors $A = E$.
3. On pose $E = M_n(\mathbb{R})$ et A l'ensemble des matrices nilpotentes de E. On veut montrer que $\mathring{A} = \emptyset$.
   (a) Montrer que si $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors l'intérieur de $\mathrm{Vect}(A)$ est non vide.
   (b) Aboutir à une contradiction.

I.6.36 **CCINP PC 2018**

On étudie $E = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x;y) \in E$.
2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.6.37 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un ouvert de E.
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E.
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes.

I.6.38 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit p un entier naturel non nul et a, b des réels tels que $a < b$.
On note $Z_p = \Big\{ f \in C([a\,;b], \mathbb{R}) \mid \mathrm{Card}(\{x \in [a\,;b]\}) \mid f(x) = 0\}) \geqslant p \Big\}$.
Déterminer l'adhérence de Z_p pour la norme infinie.

I.6.39 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à r (avec $0 \leqslant r \leqslant n$) est un fermé.
2. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang exactement r.

I.6.40 **X MP 2018**

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1; 0; 1\}$. Notons A l'ensemble des racines des polynômes de E. Quelle est l'adhérence de A ?

I.6.41 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit A un compact de E.

1. Montrer que $A \times A$ est un compact.
2. Soit $f : A \to A$ telle que :
$$\forall x, y \in A,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
Montrer que f admet un unique point fixe.
3. Soit $f : A \to A$ telle que :
$$\forall x, y \in A,\ \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$
Montrer que f est bijective et préserve les distances. (Montrer que l'inégalité de l'hypothèse est un fait une égalité.)

I.6.42 **ENS Ulm 2022**

Montrer que l'application $M \mapsto \mathrm{Tr}(\exp(M))$ est convexe sur $S_n(\mathbb{R})$.

I.6.43 **Centrale 2023**

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *connexe* s'il n'existe aucun couple de fermés disjoints non vides $(F; G)$ tel que $A = F \cup G$.

1. Montrer que l'on peut remplacer « fermés » par « ouverts » dans la définition ci-dessus.
2. Montrer que A est connexe si, et seulement si, toute application continue de A dans $\mathbb{N}$ est constante.
3. Montrer que si A est connexe par arcs, alors A est connexe.
4. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?
5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u. Montrer que $V(u)$ est un intervalle.
6. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que $V(u)$ est connexe.

I.6.44 **Centrale 2022**

Soit B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $u(B) \subset B$.

On pose $u_0 = \mathrm{Id}$, et $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour $n \geqslant 1$.

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?
2. On pose $A = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} u_n(B)$. Montrer que $x \in A$ si, et seulement si, $u(x) = x$ et $x \in B$.
3. Montrer que $A \neq \emptyset$.

I.6.45 **ENS 2022**

Montrer que les morphismes continus de $SL_n(\mathbb{R})$ vers $GL_n(\mathbb{R})$ sont à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

I.6.46 **Mines 2024**

On note $I = [1\,;+\infty[$ et on considère les ensembles :

- $E = \{f \in C(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ a une limite en } + \infty\}$,
- $F = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \exists n \in \mathbb{N},\, \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\, \forall t \in I,\, f(t) = P(t)t^{-n}\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, et que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est dense dans E.

I.6.47 **ENS 2022**

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ bornée et $x \in \operatorname{conv}(A)$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que :

$$\left\| x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leqslant \frac{\operatorname{diam}(A)}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

I.6.48 **Mines-Télécom PSI 2023**

1. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$N(x; y) = \max\left(|y|; \left|x + \frac{y}{2}\right|; |x + y|\right).$$
Représenter la boule unité pour cette norme.
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\{\varphi_1; \ldots; \varphi_p\}$ une famille de formes linéaires sur E. À quelle condition l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$, qui à x associe $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$, est-elle une norme ?

I.6.49 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $E = C([0\,; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.
On pose $A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\}$. Montrer que A est un fermé de E.

I.6.50 **ENS MP 2018**

Que dire d'un sous-groupe strict fermé de $\mathbb{U}$?

I.6.51 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.
2. Soit F un hyperplan de E. Montrer que F est fermé ou dense dans E.

I.6.52 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Montrer que les deux applications suivantes sont des normes sur E :

- La norme infinie des suites ;
- $N : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

1. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
2. Soit Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que l'intérieur de Z est vide, et déterminer son adhérence.

I.6.53 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit I un segment de $]0\,;1[$ et $E = C(I, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.
2. On pose $f(x) = 2x(1-x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E.

I.6.54 **ENS MP 2019**

Existe-t-il un espace vectoriel muni de deux normes et une suite dans cet espace tels que cette suite converge pour les deux normes mais vers des limites différentes ?

I.6.55 **CCINP**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact de E.
Soit $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x; y) \in K^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. (a) Montrer que si f admet un point fixe, alors ce point est unique.
   (b) En étudiant l'application $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K, montrer que f admet un unique point fixe.
2. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Montrer, à partir de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \|x_n - a\|,$$

où a est le point fixe de f, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.

I.6.56 **X MP 2019**

On note E l'ensemble des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme infinie sur $[0\,;1]$. Pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on définit :

$$\Omega_{m,\varepsilon} = \{f \in E \mid \forall x \in [0\,;1],\ \exists y \in]x-\varepsilon\,;x+\varepsilon[,\ |f(x)-f(y)| > m|x-y|\}.$$

1. Montrer que, pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, $\Omega_{m,\varepsilon}$ est un ouvert dense.
2. On admet le théorème de Baire : une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Montrer que l'ensemble des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle part dérivables est dense dans E.

I.6.57 **X MP 2013**

On note C_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal.

1. Démontrer que C_n est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.
2. L'application qui à une matrice associe son polynôme minimal est-elle continue ?
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

I.6.58 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les ensembles suivants :

$$\Lambda_n = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = n\} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \{(x;y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2 = n\}.$$

1. L'ensemble Δ_1 est-il dense dans Λ_1 ?
2. L'ensemble Δ_2 est-il dense dans Λ_2 ?
3. L'ensemble Δ_3 est-il dense dans Λ_3 ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_n soit dense dans Λ_n.

I.6.59 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension infinie.

1. Soit C un convexe de E et D un ensemble tel que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que $E \backslash H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

I.6.60 **Centrale-Supélec MP 2017**

On note A_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note B_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - m_{ii})$.

1. Rappeler la définition d'un fermé.
2. Montrer que B_n est un fermé. Montrer que A_n est un ouvert.
3. Quelle est la dimension maximale d'un espace vectoriel inclus dans B_n ?

I.6.61 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, A une partie de E et f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans E telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer qu'il existe un élément de $f([0\,;1])$ qui appartient à la frontière de A.

I.6.62 **X MP 2024**

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ et G_f son graphe. Les deux affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction f est continue si et seulement G_f est fermé.
2. La fonction f est continue si et seulement G_f est compact.

I.6.63 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe un segment de longueur maximale dans K.
On rappelle que $[a\,;b] = \{ta + (1-t)b \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

I.6.64 **X MP 2019**

1. Montrer que l'ensemble A défini par

$$A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P \text{ simplement scindé et } \deg(P) = n\}$$

   est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelle est l'adhérence de A ?

I.6.65 **Mines-Ponts**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ et $(f;g) \in E^2$. On pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

I.6.66 **ENS**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P d'une partie fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{C}$ est fermée (resp. ouverte).

I.6.67 **ENSEA/ENSIIE 2012**

Un espace vectoriel réel normé E est dit *uniformément convexe* si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,$$
$$\|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \text{ et } \|x-y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Étudier si $\mathbb{R}^2$, pour les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, est uniformément convexe.

I.6.68 **Mines-Ponts**

Soit $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2} N(f)$.
3. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

I.6.69 **Mines-Ponts**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit :

$$P = \{u \in L(E) \mid u^2 = \mathrm{Id}_E\}.$$

1. L'ensemble P est-il fermé ? compact ?

   Soit E un espace topologique, A une partie non vide de E et $a \in A$. On dit que le point $a \in A$ est *isolé* dans A s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap A = \{a\}$.
2. Caractériser $T = \{\mathrm{Tr}(u) \mid u \in P\}$. En déduire que Id_E est un point isolé de P.
3. Déterminer tous les points isolés de P.

I.6.70 **Centrale-Supélec MP 2023**

Soit (E, N) et (E', N') des espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $d \in \mathbb{N}$. On note $\|\cdot\|$ l'application de $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\left\| \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \right\| = \max_{k \in [\![0,d]\!]} |a_k|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell$.

   Montrer que $Y = \{\ell\} \cup \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E'.

   (b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ soit un compact de E. Montrer alors que pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ unitaire, x une racine réelle de P telle que $|x| > 1$. Montrer que $|x| \leqslant \|P\| + 1$.

   En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$.

I.6.71 **Mines-Ponts MP 2013**

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles.

I.6.72 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie n. Pour $u \in L(E)$, on pose :

$$\|u\| = \sup\{N(u(x)) \mid x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et que :

$$\forall y \in E,\ N(u(y)) \leqslant \|u\| N(y).$$

2. Montrer que l'on a ainsi bien défini une norme sur $L(E)$.
3. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L(E)$. Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement pour N.

I.6.73 **Mines-Télécom MP 2018**

1. Dans un espace vectoriel normé, donner la définition d'un point adhérent à une partie, et une caractérisation de l'adhérence d'une partie.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est adhérent à $GL_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $M_n(\mathbb{R})$?

I.6.74 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ une forme linéaire positive non nulle. Soit

$$p_\phi : f \longmapsto |\phi(f)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Par exemple, pour $\phi : f \mapsto f(0)$, on note p_0 la fonction associée.

1. Montrer que pour tout f :

$$|\phi(f)| \leqslant \phi(1)\|f\|_\infty.$$

   En déduire que p_ϕ est une norme.
2. Montrer que p_0 et p_ϕ sont équivalentes.

I.6.75 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit E un espace euclidien, A un compact et u un endomorphisme orthogonal tel que $u(A) \subset A$.

1. Montrer que $u(A) = A$.
2. On note :

$$r = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in E,\ A \subset B(x, s)\}.$$

   Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon r contenant A.
3. Montrer que u admet un point fixe.

I.6.76 **X MP 2025**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Montrer que tout convexe fermé non borné contient une demi-droite.
2. Montrer que le résultat est encore vrai sans l'hypothèse « fermé ».

I.6.77 **Mines-Télécom MP 2024**

On appelle *matrice stochastique* de $M_n(\mathbb{R})$ toute matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des réels positifs et la somme de chaque coefficient de la même ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit matriciel.
2. Étudier la topologie de $\mathcal{S}$ (ouvert, fermé, compact, connexité par arcs).

I.6.78 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note :

$$\varphi(f) : x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :
$$\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\|f\|_\infty.$$
3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :
$$\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\|f\|_1.$$

I.6.79 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Rappeler la définition de $|||\cdot|||$ sur $M_n(\mathbb{C})$.
   (b) On note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.
   L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme ?
2. Montrer que :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \rho(A) \leqslant |||A^k|||^{\frac{1}{k}}.$$
3. Soit N une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :
$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} |N(A^k)|^{\frac{1}{k}}.$$

I.6.80 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^2 de S dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f.

I.6.81 **X MP 2021**

Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que K est *précompacte* lorsque, pour tout $\delta > 0$, il existe une liste finie $(x_1; \dots; x_n)$ d'éléments de E telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta),$$

et on note alors $n(K, \delta)$ le plus petit de ces entiers n.

1. Montrer que si K est compact alors il est précompact.
2. On suppose E de dimension finie d. Soit K un compact d'intérieur non vide. Déterminer un équivalent de $\ln(n(K, \delta))$ lorsque δ tend vers 0^+.

   On pourra commencer par le cas où $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme infinie.
3. On considère ici l'espace vectoriel $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note K l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0. Montrer que K est précompact, puis déterminer un équivalent de $\ln(\ln(n(K, \delta)))$ quand δ tend vers 0^+.

I.6.82 **ENS MP 2025**

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitziennes et 1-périodiques. Pour tout $a \in]0\,;1]$, on note :

$$\|f\|_a = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^a}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur E pour tout $a \in]0\,;1]$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-périodiques est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_1$.

I.6.83 **Mines-Ponts PC 2022**

1. Donner la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$?

   Dans la suite, la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\cdot\|$. La sphère unité correspondante est notée S.
2. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur S. Ce maximum est noté $|||f|||$.
3. Pour tout couple $(f; g)$ d'éléments de $L(\mathbb{R}^n)$, prouver l'inégalité :

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \cdot |||g|||.$$

4. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $|||f||| < 1$. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} f^k$ est convergente et que sa somme est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.6.84 **Mines-Télécom MP 2022**

On pose pour tout l'exercice $E = C([a\,;b],\mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier, oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

I.6.85 **CCINP MP 2022**

1. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E.
   Montrer que K est fermé et borné.

   On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C([0\,;2\pi],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :
   $$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}.$$
2. On admet dans un premier temps que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
   (b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.
3. (a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité :
   $$|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}.$$
   En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$
   (b) Soit $(f;g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :
   $$h : \lambda \longmapsto \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$
   démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.
   (c) En déduire que $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

I.6.86 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) > 0$
- $N(0) = 0$
- $\forall (x;y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y)$

Montrer que N est une norme sur E.

I.6.87 **Mines-Ponts MP**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in [a\,;b]^{[\![1,n]\!]}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in [a\,;b]^{[\![1,n]\!]}$. On note E l'ensemble $C([a\,;b],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'adhérence de l'ensemble

$$\{p \in P \mid \forall i \in [\![1\,,n]\!],\, p(x_i) = y_i\}$$

est
$$\{f \in E \mid \forall i \in [\![1\,,n]\!],\, f(x_i) = y_i\}.$$

I.6.88 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit K un compact de E.
Soit $f : K \to K$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x;y) \in K^2,\, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un point fixe.

1. Montrer que l'hypothèse K compact est nécessaire, en considérant la fonction :
$$f \ : \ \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$$
2. Montrer que, si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.
3. Montrer que f admet un point fixe.
4. On considère $x_0 \in \mathbb{K}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :
$$U_N = \{u_n \mid n \geqslant N\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{U_N}.$$
   (a) Montrer que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points fixes de f. Conclure.

I.6.89 **TPE/EIVP MP 2012**

1. Soit $N_A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_+$ telle que $P \mapsto \sup\limits_{x\in A}|P(x)|$.
   À quelle condition sur A, l'application N_A est-elle une norme ?
2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que N_A et N_B soient des normes.
   Comparer N_A et N_B.

I.6.90 **ENS MP 2023**

Montrer que l'intervalle $]0\,;1[$ n'est pas réunion disjointe de fermés d'intérieur non vide.

I.6.91 **X MP 2017**

Soit $\omega = (\omega_1; \ldots; \omega_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et G_ω le groupe défini par $G_\omega = \omega\mathbb{R} + 2\pi\mathbb{Z}^n$. On suppose que les ω_i sont liés dans $\mathbb{Q}$. Montrer que G_ω n'est pas dense dans $\mathbb{R}^n$.

I.6.92 **ENS MP 2014**

Pouvez-vous imaginer un espace topologique X connexe par arcs tel qu'il existe $x \in X$ tel que X ne soit pas localement connexe au voisinage de x ?

I.6.93 **C.C.E. Mines PC 2015**

Au point $(x; y)$ on associe $\sup\{|x + ty| \mid t \in [0\,; 1]\}$.
Montrer que cette application définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et préciser la boule centrée en $(0; 0)$ de rayon 1.

I.6.94 **Navale MP 2018**

Soit $E = C([0\,; 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\forall f \in E,\ N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E.

   On dit qu'une suite $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est une *suite de Cauchy* pour N_1 si l'on a :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies N_1(f_{n+p} - f_n) \leqslant \varepsilon.$$

2. Montrer que, si la suite $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est convergente pour la norme N_1, alors c'est une suite de Cauchy pour la norme N_1.
3. On pose :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

   Montrer que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy pour la norme N_1. Est-elle convergente pour cette même norme ?

I.6.95 **X MP 2025**

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $D \in \mathbb{N}$. Soit $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^d$, avec $p_0 = 0$.
On dit que $\{p_0, \ldots, p_m\}$ se *plonge isométriquement* dans $\mathbb{R}^D$ s'il existe $q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{R}^D$ tels que :

$$\forall i, j \in \{0; \ldots; m\}, \quad \|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|.$$

1. On suppose que $p_0, \ldots, p_m$ se plongent isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels des p_i. Montrer que $\{p; p_0; \ldots; p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$.
2. On suppose que $\|p_i - p_j\| \in \mathbb{Q}$ pour tous i, j. Montrer que $\{p_0; \ldots; p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4D}$.

On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que

$$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

I.6.96 **ENS MP 2014**

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

I.6.97 **X-ENS Cachan PSI 2021**

On considère $L^2([-1\,;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f;g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et de la norme associée.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers* f si :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* f si :

$$\forall \varphi \in C^1([-1\,;1],\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle.$$

1. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers f.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f de classe C^1 et si la suite $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|f\|$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers f.
4. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 qui converge uniformément vers φ, si $(\varphi_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge faiblement vers f, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi_n\rangle = \langle f, \varphi\rangle$.
5. On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers la fonction nulle.

I.6.98 **X-ENS Cachan PSI 2017**

Soit $E = \{f \in C^2([0\,;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$.
2. Montrer que :
$$\forall t \in [0\,;1], \quad f(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t (t-x)\mathrm{e}^x g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant a\|f\|.$$
   Trouver le plus a vérifiant la relation précédente.
4. Existe-t-il $b > 0$ tel que
$$\forall f \in E, \quad \|f\| \leqslant b\|f\|_\infty \ ?$$

I.6.99 **ENS Lyon MP 2025**

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ (avec $\|\cdot\|$ la norme 2).
Soit $\Gamma = \{\gamma : [0\,;1] \to S$ continu tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$.
   Montrer qu'il existe une fonction $\theta : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $t \in [0\,;1]$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta(t)}$.
2. Soit $(\gamma_1;\gamma_2) \in \Gamma^2$.
   On dit que γ_1 et γ_2 sont *homotopiques* si et seulement s'il existe $h : [0\,;1]^2 \to \mathbb{R}^2$ continu tel que :
   - $\forall t \in [0\,;1]$ on a $h(t;\cdot) \in \Gamma$;
   - $h(0;\cdot) = \gamma_1$;
   - $h(1;\cdot) = \gamma_2$.

   Est-ce que $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$ pour $t \in [0\,;1]$ sont homotopiques ?
3. Existe-t-il $F : B \to S$ continue telle que $F(x) = x$ pour $x \in S$?
4. Soit $f : B \to B$ continue.
   Montrer que f admet un point fixe.

I.6.100 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ et N la norme sur E définie par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que f est une norme.
2. La norme N est-elle équivalente à N_1 ?
   On rappelle que, pour tout $f \in E$, $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
3. Soit
   $$\begin{array}{cccc} \phi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & f^2 \end{array}$$
   L'application ϕ est-elle continue pour la norme N_1 ?

I.6.101 **ENS MP 2022**

Étant donné $A > 0$, on dit qu'une partie V de $GL_n(\mathbb{C})$ est A-*bornée* si :

$$\forall M \in V, \quad \|M - I_n\| \leqslant A.$$

Quel est le plus petit $A > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial et A-borné de $GL_n(\mathbb{C})$?