Questions d'oraux de mathématiques de concours d'entrée à de grandes écoles françaises

Partie II

Arithmétique et algèbre
Algèbre linéaire

1310 exercices

Jean-Pierre Serre (né en 1926)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 5 juin 2026

Table des matières

Introduction **1**

Notations **2**

1 Arithmétique et algèbre **6**

2 Algèbre linéaire **37**

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)
X (École Polytechnique (Paris))
Centrale
Centrale-Supélec
Mines
Mines-Ponts
Mines-Télécom
ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)
EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)
ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)
ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)
ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)
CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté !

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$[\![a\,,b]\!]$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leqslant k \leqslant b$ (a, b entiers)
$\operatorname{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \dots, a_n$
$\operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\operatorname{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$\lvert E \rvert$	cardinal de l'ensemble E
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\operatorname{sgn}(x)$	signe de x
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\deg(P)$	degré du polynôme P
$\mathbb{K}[X, Y]$	ensemble des polynômes en X et Y, à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$a \equiv b \mod n$	a et b congrus modulo n
$\overline{x}$	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo p (p premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\mathrm{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A
$\mathrm{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $[\![1\,,n]\!]$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\mathrm{Ker}(u)$	noyau de u
$\mathrm{Im}(u)$	image de u
$\mathrm{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$\|A\|$	déterminant de la matrice A
$\mathrm{com}(A)$	comatrice de A
$C(A)$	commutant de A
$\mathrm{Tr}(u)$	trace de u
$\mathrm{Sp}(u)$	spectre de u
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de u sur $\mathbb{K}$
$\mathrm{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$\mathrm{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S sur A
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$-vectoriel E
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E,F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m\times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$

$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^*$
$f^\star$	adjoint de f
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\lVert\!\lvert A \rvert\!\rVert$	norme subordonnée (à la norme $\lVert\cdot\rVert$) de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de x et y
$x \wedge y$	produit vectoriel de x et y $(x, y \in \mathbb{R}^3)$
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \to \{-1; 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E
ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\lVert\cdot\rVert_p$
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norme infinie
$\lVert\cdot\rVert_p$	p-norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R
$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p-adique de n $(p \in \mathcal{P})$
$\lvert\cdot\rvert_p$	valeur absolue p-adique
$\lvert x - y \rvert_p$	distance p-adique entre x et y
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance p-adique
F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f\vert_A$	restriction de la fonction f à A $(A \subset E)$
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E, à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F
$L^1(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles Lebesgue-intégrables sur E
$L^2(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles de carré Lebesgue-intégrable sur E
$L^\infty(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles bornées et Lebesgue-mesurables sur E
$\cosh$	cosinus hyperbolique
$\sinh$	sinus hyperbolique

tanh	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\mathring{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\operatorname{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\operatorname{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$\operatorname{dist}(A; B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E
$\mathbb{P}(E \mid F)$	probabilité conditionnelle de E sachant F
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$

1 Arithmétique et algèbre

II.1.1 **X-ENS**

Soit $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ et $n \geqslant 3$ un entier. On suppose $P^n + Q^n = R^n$.
Montrer que P, Q, R sont égaux, à une constante multiplicative près.

II.1.2 **Mines MP 2019**

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \star y = x + (-1)^x y$. Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.

II.1.3 **X-ENS**

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui sont continus.

II.1.4 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation $\sigma \in S_n$ est un *dérangement* si et seulement si σ n'a pas de point fixe. Y-a-t-il plus de dérangements pairs ou impairs ?

II.1.5 **ENS MP**

Trouver tous les groupes finis tels que l'identité soit le seul automorphisme.

II.1.6 **Mines-Ponts MP 2021**

Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 sont égaux à 1.

II.1.7 **CCP MP**

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A.
On note $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$ le *radical* de I.

1. Montrer que $\sqrt{0} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal et qu'il contient I.
3. Soit I et J deux idéaux de A. Montrer que
   (a) $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$
   (b) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
4. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = I$.

II.1.8 **X PC 2020**

Trouver les polynômes P appartenant $\mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ est premier.

II.1.9 **Mines-Ponts**

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Déterminer un groupe multiplicatif de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Soit G un groupe multiplicatif de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang.

II.1.10 **Mines-Ponts**

On pose $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid (a; b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau. Quels sont les éléments inversibles ?

II.1.11 **Mines-Ponts**

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

II.1.12 **Mines**

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$.
Montrer que G est cyclique.

II.1.13 **Mines-Ponts MP 2021**

Quel est le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$?

II.1.14 **X**

Soit $n \geqslant 2$ un nombre naturel. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) n est premier ;

ii) $(n-1)! \equiv -1 \mod n$.

II.1.15 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $N_n \in \mathbb{N}$ tel que tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur ou égal à N_n.

II.1.16 **X-ENS**

Soit V un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(V)$. On note $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G,\ g(x) = x\}$. Montrer que

$$\frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = \dim(V^G). \quad (\textit{formule de Burnside})$$

II.1.17 **ENS Ulm**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *spectre* de x, noté $\mathrm{spec}(x)$, la suite réelle $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est défini par $u_n = \lfloor nx \rfloor$ (partie entière de nx). Si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, on dit que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une *suite de Beatty*.

Démontrer le *théorème de Beatty* :

Soit a et b deux nombres réels supérieurs à 1. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les ensembles $A = \{u_n(a) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{u_n(b) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

ii) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ et a, b sont irrationnels.

II.1.18 **X-ENS**

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est *transcendant* si et seulement s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ annulé par un polynôme irréductible $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 1$.
   Soit $(p_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$,
   avec $\dfrac{p_n}{q_n} \neq \alpha$.
   Montrer le *critère de Liouville* :
   $$\frac{1}{q_n^d} = O\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\right).$$
2. Montrer que le nombre $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

II.1.19 **Mines-Ponts MP**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien d'élément neutre e. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^n = e$.

1. On suppose $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
   On pose $G_a = \{x^a \mid x \in G\}$ et $G_b = \{x^b \mid x \in G\}$.
   Montrer que G_a est un sous-groupe de G.
   Montrer que pour tout $x \in G$, il existe un unique couple $(u; v) \in G_a \times G_b$ tel que $x = uv$.
2. On suppose n impair.
   (a) Montrer que l'application $\Phi_2 : x \mapsto x^2$ est un automorphisme de G et préciser sa réciproque.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \wedge n = 1$.
   Montrer que l'application $\Phi_k : x \mapsto x^k$ est un automorphisme de G et préciser sa réciproque.

II.1.20 **ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\displaystyle\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{M \in G} M = 0$.

II.1.21 **Mines-Ponts MP 2023**

1. Soit a et n deux nombres naturels avec $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.
2. Soit p un nombre premier impair et d un diviseur de $2^p - 1$.
   Montrer que $d \equiv 1 \mod 2p$.

II.1.22 **X-ENS**

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},+)$ vers $(\mathbb{Z},+)$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(e_k)=0$, où e_k est la suite définie par $e_k(n)=\delta_{k,n}$. Montrer que $f=0$.

II.1.23 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On veut montrer que n ne divise pas 2^n-1. Par l'absurde, on suppose que n divise 2^n-1. Soit p un diviseur premier de n.

1. Montrer que 2 est inversible modulo p. On note k l'ordre de 2 modulo p.
   Montrer que $k \mid n$ et que $k \mid p-1$.
2. Conclure.

II.1.24 **X-ENS**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit d_n le nombre de couples $(a;b) \in [\![1\,,n]\!]^2$ tels que a et b soient premiers entre eux. Soit $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ la *fonction de Mœbius* définie par :

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ (-1)^r & \text{si } n=p_1\cdots p_r \quad (p_1,\dots,p_r \text{ premiers distincts}) \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait différent de } 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $d_n=\displaystyle\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{d_n}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$.

II.1.25 **X-ENS**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\mathbb{K}$ un corps, $|\mathbb{K}| \geqslant 3$. Démontrer que $D(GL_n(\mathbb{K}))=SL_n(\mathbb{K})$, où $D(GL_n(\mathbb{K}))=\langle ABA^{-1}B^{-1} \mid A,B \in GL_n(\mathbb{K})\rangle$. (L'ensemble $D(GL_n(\mathbb{K}))$ est appelé le *groupe dérivé* de $GL_n(\mathbb{K})$.)

II.1.26 **Mines-Ponts**

1. Le polynôme X^4+4 est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?
2. En déduire les entiers n tels que n^4+4 est premier.

II.1.27 **ENS Ulm**

Pour toute permutation σ de S_n, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\mathrm{inv}(\sigma)$ le nombre d'invariants de σ. Calculer :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\mathrm{inv}(\sigma)+1}.$$

II.1.28 **X-ENS**

Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

II.1.29 **X-ENS**

Soit $p \geqslant 3$ premier et $\varphi : GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction canonique. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\varphi|_G$ est injective.

II.1.30 **X-ENS**

Soit G un groupe fini. On suppose que pour tous x, y appartenant à $G \setminus \{e\}$, il existe $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\tau(x) = y$. Le groupe G est-il abélien ?

II.1.31 **X PC 2019**

Soit m, n des entiers positifs. Déterminer un polynôme unitaire de degré maximal divisant $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

II.1.32 **X MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n = \{(x; y) \in (\mathbb{Q}^*)^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.

1. Montrer que C_1 est non vide.
2. Montrer que C_7 est vide.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose C_n non vide. Montrer que C_n est infini.

II.1.33 **X MP 2021**

Résoudre l'équation $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{n}{a+b}$ d'inconnue $(a; b; n) \in \mathbb{N}^{*3}$.

II.1.34 **CCP MP**

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = kp.$$

On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
2. Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
3. On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau.
   Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

II.1.35 **CCP MP 2025**

1. Soit $(a;b;p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge ab = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que pour tout $k \in [\![1\,, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$

   En déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

   (b) Prouver que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p.$$
   Indication : procéder par récurrence.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que :
   $$p \text{ ne divise pas } n \implies n^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

II.1.36 **CCP MP**

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que :
   $$a \mid c \text{ et } b \mid c \iff ab \mid c.$$
3. On considère le système (S) :
   $$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 17 \\ x \equiv 4 \mod 15 \end{cases}$$
   dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

II.1.37 **X MP 2021**

Pour $\sigma \in S_n$, on pose $A(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n)$.
Déterminer le maximum de A.

II.1.38 **X ESPCI**

Soit $q \geqslant 2$ un entier fixé.

1. Soit d et n deux naturels non nuls. Montrer que, si d divise n, alors $q^d - 1$ divise $q^n - 1$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

II.1.39 **X**

Soit p premier et $C_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$.
Montrer que C_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et en déterminer les sous-groupes.

II.1.40 **Centrale PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{n}$ ou H_n le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
On pose $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

1. On dit qu'un polynôme P *stabilise* $\mathbb{Z}$ si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n stabilise $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0; \ldots; c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = c_0 H_0 + \cdots + c_n H_n$.

II.1.41 **ENS MP MPI**

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ et $XY = \{xy \mid (x; y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

II.1.42 **X ESPCI**

On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_m) \in \{-1; 1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

1. Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.
2. Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

II.1.43 **ENS MP MPI**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition $(a\,b)$ telle que $1 \leqslant a < b \leqslant n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $c = (1\,2 \cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.
2. Montrer que la transposition $\tau = (1\,3)$ et le cycle $c = (1\,2\,3\,4)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4. (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in [\![1\,,4]\!]$.)
3. Montrer que la transposition $(a\,b)$ et le cycle $c = (1\,2 \cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

II.1.44 **Mines-Ponts MP MPI**

Déterminer tous les couples $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$.

II.1.45 **X-ENS**

Calculer le nombre d'involutions du groupe S_n.

II.1.46 **X MP 2019**

Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau $C([0\,;1])$ des fonctions réelles définies et continues sur $[0\,;1]$ qui sont strictement inclus dans $C([0\,;1])$?

II.1.47 **X MP 2019**

1. Pour n un nombre premier, montrer que :

$$n \mid 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1.$$

2. Trouver tous les nombres entiers $n \geqslant 1$ tels que :

$$n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n.$$

II.1.48 **Mines-Télécom MP 2022**

1. Le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
3. Soit des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer que :

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

II.1.49 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Déterminer f sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Étudier la monotonie de f.
4. Déterminer entièrement f.

II.1.50 **Mines-Télécom MP 2018**

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 10 \end{cases}$$

II.1.51 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit E l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Montrer que E est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Est-ce un corps ?

II.1.52 **Mines-Télécom MP 2022**

Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est *premier* si et seulement si :

$$\forall (x;y) \in A^2,\ xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

II.1.53 **CCINP MP**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif.

1. (a) Rappeler la définition d'un anneau.
   (b) Rappeler la définition d'un idéal.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que si $1_A \in I$, alors $I = A$.
3. Soit $x \in A$. On pose $I_x = \{a \cdot x \mid a \in A\}$. Montrer que I_x est un idéal de A.
4. On suppose que A n'est pas l'anneau nul. Démontrer :

$$A \text{ est un corps} \iff \text{Les seuls idéaux de } A \text{ sont } \{0_A\} \text{ et } A.$$

II.1.54 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

II.1.55 **Mines-Ponts MP 2024**

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

II.1.56 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit l'anneau $A = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est un idéal.
2. Montrer que si $x_1 \neq x_2$, alors $A = I_{x_1} + I_{x_2}$.

II.1.57 **Mines-Ponts MP 2018**

Déterminer le plus petit entier n pour lequel il existe un groupe G de cardinal n non abélien.

II.1.58 **Mines-Télécom MPI 2024**

Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

II.1.59 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $a \in [\![1\,, p-1]\!]$ avec p premier.

1. Montrer qu'il existe un unique $b \in [\![1\,, p-1]\!]$ tel que $ab \equiv 1 \mod p$.
2. Quels sont les a tels que $a = b$?

II.1.60 **TPE/EIVP MP 2017**

1. Soit p un nombre premier. Résoudre l'équation $x^2 = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis montrer que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

II.1.61 **Centrale-Supélec 2017**

Soit p un nombre premier. On note :

- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{F}_p^*$ le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{F}_p^{*2} = \left\{\overline{x^2} \mid x \notin p\mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $\mathrm{e}^{\frac{2\pi x\mathrm{i}}{p}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi y\mathrm{i}}{p}}$.

   On notera $\tau(a) = \sum_{k\in\mathbb{F}_p} ak^2$.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{F}_p^{*2}$, alors $\tau(a) = \tau(1)$.
3. Montrer que si $b \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$, alors $\tau(b) + \tau(1) = 0$.

II.1.62 **TPE/EIVP MP 2017**

Résoudre dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

II.1.63 **Centrale-Supélec MP 2019**

On dit qu'un anneau A est *régulier* si, pour tout x appartenant à A, il existe un u appartenant à A tel que $xux = x$.

1. (a) L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est-il régulier ?
   (b) Un corps est-il un anneau régulier ?
   (c) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $(L(E), +, \circ)$ est un anneau régulier.
2. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ayant ses coefficients $a_{i,i+1}$ égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Exhiber U tel que $AUA = A$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ soit un anneau régulier.

II.1.64 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est de *type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in I,\, \forall x \in I,\, \exists a_1, \dots, a_p \in A,\, x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i.$$

On écrit aussi $I = \mathrm{Vect}_A(\{\lambda_1; \dots; \lambda_p\})$. On dit qu'un anneau est *noethérien* si tous ses idéaux sont de type fini.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ sont noethériens.
2. Montrer que l'anneau $(A, +, \cdot)$ est noethérien si et seulement si toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang.

II.1.65 **Mines-Ponts MPI 2025**

Soit p un nombre premier et $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$.

1. Calculer le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Montrer que pour tout $A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $A^{q+2} = A^2$.

II.1.66 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit G un groupe abélien d'ordre pq, où p et q sont deux premiers distincts.

1. Montrer que G est cyclique.
2. Montrer l'importance de la commutativité.

II.1.67 **Mines-Ponts MP**

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) fini de cardinal q.
On considère le groupe quotient $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.
   On pourra utiliser l'application déterminant.
2. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$.
3. Déterminer les cardinaux de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $\mathbb{L}$ un autre corps (commutatif) tel que $SL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{L})$ soient isomorphes. Que peut-on dire de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$?

II.1.68 **Mines-Télécom MP 2018**

Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

II.1.69 **Mines-Ponts MP**

Soit G un groupe cyclique de cardinal n, d'élément neutre e.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n = e$.
2. Soit H un sous-groupe de G.
   (a) Montrer que H est cyclique.
   (b) Montrer que le cardinal de H divise le cardinal de G.
3. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

II.1.70 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, f un endomorphisme de E et P son polynôme minimal. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $\mathbb{K}[f]$ soit un corps.

II.1.71 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Résoudre l'équation $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2. Résoudre l'équation $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

II.1.72 **ENS MP 2019**

Soit G un groupe. Est-il vrai que :

$$G \text{ est fini} \iff \text{L'ensemble des sous-groupes de } G \text{ est fini ?}$$

II.1.73 **Centrale-Supélec MP 2019**

On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et impair, et $\mathcal{C} = \{x^2 \mid x \in F_p^*\}$.

1. (a) Que dire de la structure algébrique de F_p et de $\mathcal{C}$?
   (b) Expliciter $\mathcal{C}$ pour $p = 11$.
2. Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à d et à coefficients entiers, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall i \in [\![1\,, d]\!],\ p \mid P(a_i) \text{ avec les } a_i \text{ distincts modulo } p.$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \mid P(n)$.
3. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p \mid x^{\frac{p-1}{2}} = 1\right\}$.

II.1.74 **CCINP PC 2014**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

II.1.75 **X MP 2019**

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{3}] \subset \mathbb{Z}[j]$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est euclidien.

II.1.76 **Centrale-Supélec MP 2025**

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. (a) Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Donner le reste de la division euclidienne de P par $(x-a)^2$.
   (c) En déduire une caractérisation des racines de P.
2. Posons $T_n = X^n - X + (-1)^n$. Quel est le nombre de racines de T_n dans $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

II.1.77 **ENS 2023**

Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe, engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.1.78 **Mines 2023**

On note $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\,\mathbb{Q} + \sqrt{3}\,\mathbb{Q} + \sqrt{6}\,\mathbb{Q}$.
Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dont $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}\}$ est une base, puis que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

II.1.79 **Centrale 2022**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

1. (a) Montrer que l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$ est donné par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ k & \longmapsto & k \cdot 1_A \end{array}$$

   (b) Montrer qu'il existe un unique $\kappa_A \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f_A) = \kappa_A\mathbb{Z}$. (Le nombre κ_A est appelé la *caractéristique* de l'anneau A.)

2. (a) Montrer que si A est un corps, alors $\kappa_A = 0$ ou κ_A est un nombre premier.
   (b) Montrer que si A est un corps fini, alors $\kappa_A \neq 0$.

3. (a) On suppose que A est un corps fini de cardinal p^n avec $n \geqslant 1$ et p premier. Montrer que l'application $F : x \mapsto x^p$ est un automorphisme de corps de A.
   (b) Déterminer l'ordre de F dans le groupe des automorphismes de A.

II.1.80 **Centrale 2024**

1. (a) Énoncer le théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$, ainsi que le petit théorème de Fermat.
   (b) Rappeler la définition d'un idéal d'un anneau commutatif. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $a\mathbb{Z}[X]$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Soit R un anneau commutatif et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $pR = \{pr \mid r \in R\}$ est un idéal de R, puis montrer que pour tous $x, y \in R$, $(x+y)^p - (x^p + y^p) \in pR$.

2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, R un anneau commutatif et I un idéal de R. On se donne $A, B \in M_n(R)$ et on suppose que tous les coefficients de B appartiennent à I. Montrer que $\det(A + B) - \det(A) \in I$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $P(X^p) - (P(X))^p \in p\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(M^p) = \mathrm{Tr}(M) \mod p$.

II.1.81 **Mines 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Pour $x = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $T(x) = \mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) $\det(A) \in \{-1; 1\}$

ii) $\forall x \in \mathbb{Z}^n$, $T(Ax) = T(x)$

II.1.82 **Mines 2024**

Soit G et G' deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que f est surjectif si, et seulement si, l'image par f de toute partie génératrice de G est G'.

II.1.83 **X 2022**

On pose $G = SO_3(\mathbb{R})$ et on considère un sous-groupe H de G tel que :

$$\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H.$$

Montrer que $H = \{I_3\}$ ou $H = G$.

II.1.84 **ENS 2022**

On considère le groupe :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Si B est un sous-groupe de G, on définit $C(B) = \{g^{-1}Bg \mid g \in G\}$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe non trivial H de G tel que $C(H) = H$.

II.1.85 **ENS 2023**

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs v_1, v_2 non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, on pose $L = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$, et on note $\mathrm{vol}(L) = |\det(v_1; v_2)|$.

1. Soit B une boule d'aire strictement supérieure à $\mathrm{vol}(L)$. Montrer qu'il existe $x, y \in B$ tels que $x - y \in L$.
2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I \in L,\ \|I\|_2 \leqslant 2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(L)}{\pi}}.$$
3. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \mod 4$. Montrer que -1 est un carré modulo p.
4. Montrer que p est somme de deux carrés.

II.1.86 **Mines-Ponts MP 2024**

1. Soit $(G, \star)$ un groupe et $(H, \star)$ un sous-groupe de G. Déterminer le plus petit sous-groupe de G contenant le complémentaire de H.
2. On suppose G fini. Soit S un sous-ensemble de G. Montrer que $(S, \star)$ est un sous-groupe de G si et seulement si S est stable pour la loi $\star$.

II.1.87 **CCINP MP 2022**

On considère un groupe $(G, \cdot)$ cyclique d'ordre n, engendré par a. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f : x \in G \mapsto x^r$. Soit encore $d = \mathrm{pgcd}(r, n)$.

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de G engendré par a^d.
4. Soit $g \in G$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $y = x^r$.

II.1.88 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que, pour tout $M \in G$, $M^2 = I_n$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que $|G| \leqslant 2^n$.
3. Soit $(n; p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que les deux groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

II.1.89 **ENS MP 2022**

Soit $p = \overline{a_n \dots a_0}^{10}$ un nombre premier (écriture en base 10).
On pose $P = a_n X^n + \cdots + a_0$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

II.1.90 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le sous-groupe engendré par A et B.
2. Que dire des éléments qui commutent avec A et B ?

II.1.91 **Mines-Ponts MP 2021**

Une application p d'un ensemble E dans E est dite *idempotente* si $p \circ p = p$.

1. (a) Montrer que si p est injective et idempotente, alors $p = \mathrm{Id}_E$.
   (b) Montrer que si p est surjective et idempotente, alors $p = \mathrm{Id}_E$.
   (c) Construire une application idempotente p différente de l'identité pour l'ensemble $E = \{a; b\}$.
2. Montrer que p est idempotente si et seulement si, pour tout $x \in P(E)$, $p(x) = x$.
3. Donner les trois applications idempotentes pour $E = \{a; b\}$, et les dix applications idempotentes pour $E = \{a; b; c\}$.

II.1.92 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Montrer que $f : x \mapsto ax$ est un automorphisme. En déduire que a est inversible.
2. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\{1; a\}$ est libre et que $\{1; a; a^2\}$ est liée.
3. Montrer l'existence de $i \in \mathcal{A}$ tel que $i^2 = -1$, puis que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

II.1.93 **X ESPCI 2016**

Soit $n = 10101010 \cdots 101$ tel qu'il y a 2016 fois le chiffre 0.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

II.1.94 **Mines-Télécom MP 2019 MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 10 = 1$. Montrer que $n^4 \equiv 1 \mod 10$.
2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{4 \cdot 10^k} \equiv 1 \mod 10^{k+1}$.

II.1.95 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $(g_1; g_2) \in G \times G$. On suppose que pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$. Soit G_1 le sous-groupe engendré par g_1 et G_2 les sous-groupe engendré par g_1 et g_2.

1. Décrire les éléments de G_1.
2. Décrire les éléments de G_2.
3. Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}^*$. Montrer que $G \cap K$ est fini.
4. Montrer que $\mathbb{U} \cap G$ est monogène.

II.1.96 **Mines-Ponts MP 2015**

Pour n entier naturel non nul, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs.
Montrer que $S(n) \leqslant n + n\ln(n)$.

II.1.97 **CCINP MP 2016**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau d'élément unité 1.

1. Soit $(a; b) \in A^2$. Supposons que $1 - ab$ soit inversible dans A. Montrer que $1 - ba$ est inversible dans A et préciser son inverse.
2. Soit a un élément de a tel qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $a^n = 0$.
   (a) Montrer que $1 - a$ est inversible et préciser son inverse.
   (b) En déduire que $b = 1 + 2a + \cdots + na^{n-1}$ est inversible dans A et préciser son inverse.
3. Soit $(a; b) \in A^2$ tel que ab est nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.
4. On suppose A commutatif. On note $\mathrm{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.

II.1.98 **ENS MP 2013**

Soit $(\mathcal{A}, \times)$ un magma associatif. Démontrer la proposition suivante généralement admise : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout n-uplet $(a_1; \ldots; a_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et tout parenthésage « admissible » de la multiplication $a_1 \times \cdots \times a_n$ (par exemple, pour $n = 4$, $(a_1 \times a_2) \times (a_3 \times a_4)$, $a_1 \times (a_2 \times (a_3 \times a_4))$, $(a_1 \times (a_2 \times a_3)) \times a_4$ sont des parenthésages admissibles), le résultat de la multiplication est le même.

II.1.99 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soit $n \geqslant 1$ entier. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p = 2^{2^p} + 1$. Montrer que :
$$\forall p, q \in \mathbb{N},\, p \neq q \implies f_p \wedge f_q = 1.$$
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

II.1.100 **Mines-Ponts**

Soit $(E,+,\cdot)$ un anneau non commutatif. On munit E d'une loi de composition interne $[\cdot,\cdot]$ (*crochets de Lie*) définie par :

$$\forall (a;b)\in E^2,\ [a,b]=ab-ba.$$

1. Montrer l'*identité de Jacobi* :

$$\forall (a;b;c)\in E^3,\ \Big[a,[b,c]\Big]+\Big[b,[c,a]\Big]+\Big[c,[a,b]\Big]=0.$$

2. On note, pour $a\in E$ fixé, l'application φ_a, qui va de E dans lui-même, définie par $\varphi_a(x)=[a,x]$. Montrer que :
   (a) Pour tout $(x;y)\in E^2$, $\varphi_a(x+y)=\varphi_a(x)+\varphi_a(y)$.
   (b) Pour tout $(x;y)\in E^2$, $\varphi_a(xy)=\varphi_a(x)y+x\varphi_a(y)$.
   (c) Pour tout $(x;y)\in E^2$, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varphi_a^n(xy)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_a^k(x)\varphi_a^{n-k}(y).$$

   (d) Pour tout $(x;y)\in E^2$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\varphi_a(x^n)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k\varphi_a(x)x^{n-1-k}.$$

   (e) Montrer que si a est *nilpotent*, c'est-à-dire s'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $a^p=0_E$, alors φ_a est également *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que φ_a^q est l'application nulle de E dans E.

II.1.101 **ENS MP 2019**

Soit G un groupe fini de cardinal n. On dit que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si pour tout entier d divisant n, il existe au plus un sous-groupe de G de cardinal d.

1. On suppose G cyclique. Montrer que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
2. Réciproquement, si G vérifie la propriété $\mathcal{P}$, montrer que G est cyclique.
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. On note $\mathbb{K}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$ et on rappelle que $(\mathbb{K}^*,\cdot)$ est un groupe. Montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique.
4. On suppose que $|\mathbb{K}|=p^2$, où p est un premier supérieur ou égal à 3. Montrer que X^4+1 admet une racine dans $\mathbb{K}$.

II.1.102 **X-ENS**

Soit p un nombre premier, G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ et φ le morphisme de *réduction modulo* p :

$$\begin{array}{rccl}\varphi & : & G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{F}_p)\\ & & M & \longmapsto & M \mod p\end{array}$$

Quand l'application φ est-elle injective ?

II.1.103 **X MP 2024**

Soit G un sous-groupe du groupe des bijections du plan complexe. On suppose que :

- G est cyclique d'ordre 2^n avec $n \geqslant 2$,
- G contient la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$,
- $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall g \in G$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(mz) = mg(z)$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $g \in G$ tel que $\dfrac{g(z)}{z} \notin \{-1; 1\}$.
2. Déterminer les sous-groupes de G d'ordre 2^{n-1}.
3. On regarde $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-il possible que G ne soit composé que d'applications linéaires ?

II.1.104 **CCINP MP 2025**

1. Calculer $d = \text{pgcd}(473, 220)$.
2. Existe-t-il un couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $473u + 220v = d$? Si oui, en déterminer un.
3. Les équations suivantes ont-elles des solutions $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$? Si oui, les déterminer.
   (a) $(E_a) : 473u + 220v = 1$
   (b) $(E_b) : 473u + 220v = 11$
   (c) $(E_c) : 473u + 220v = 22$

II.1.105 **ENS MP 2018**

Donner, à isomorphisme près, les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.

II.1.106 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $(G, \star)$ un groupe. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Soit $a \in G$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi_a & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & a \star x \star a^{-1} \end{array}$$

1. On considère :
$$\begin{array}{rccc} \phi & : & G & \longrightarrow & \text{Aut}(G) \\ & & a & \longmapsto & \phi_a \end{array}$$
   Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.
2. Montrer que $\{\phi_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$.

II.1.107 **CCINP PC 2022**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & (n; m) & \longmapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$$

1. Trouver un antécédent de 56 par f.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
4. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est-il dénombrable ?

II.1.108 **ENS MPI 2022**

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace euclidien.
Soit $e = (e_1; \dots; e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'un sous-groupe L de $(\mathbb{R}^n, +)$ est un *réseau* si :

- $\text{Vect}(L) = \mathbb{R}^n$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall R > 0\,, B(x, R) \cap L$ est fini.

1. Déterminer L pour $n = 1$.
2. On note $L(e) = \{a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \mid (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
   Montrer que $L(e)$ est un réseau.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $L(e) = L(e')$.

II.1.109 **ENS Ulm MP 2023**

Soit p premier. Montrer que n divise le cardinal de $GL_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

II.1.110 **ENS MP 2017**

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$.
Montrer que G s'injecte dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $p \geqslant 3$ premier.

II.1.111 **CCINP MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
2. Soit $(n; x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = x$.
4. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

II.1.112 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit E l'ensemble des matrices

$$M(a; b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que E est un anneau.
3. Soit la fonction φ telle que $\varphi(a + b\text{i}) = M(a; b)$. Montrer que φ est un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ dans E.
4. L'application φ est-elle un morphisme d'anneaux ?

II.1.113 **ENS MP 2024**

Montrer qu'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ admet une $\mathbb{Z}$-base.

II.1.114 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini d'élément neutre e.
Le groupe des automorphismes de G est supposé d'ordre 3.

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \phi & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$
est un automorphisme, puis que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
2. Montrer qu'il existe un sous-groupe V de G d'ordre 4. Déterminer les automorphismes de V.
3. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, en conclure une absurdité.

II.1.115 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $\varphi(n)$ le cardinal des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\varphi(p)$ pour p premier, puis $\varphi(p^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
2. Redémontrer le théorème chinois.
3. En déduire que si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
4. En déduire une expression générale de $\varphi(n)$.

II.1.116 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.

1. On définit l'ensemble quotient A/I avec la relation d'équivalence suivante :
$$\forall (a; b) \in A^2,\, a \sim b \iff a - b \in I.$$
Montrer que A/I est un anneau pour certaines lois que l'on précisera.
2. En déduire que si a est un entier et p un nombre premier tel que p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

II.1.117 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ euclidien muni de son produit scalaire canonique. On définit un arc Γ sur E par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$.

1. Trouver toutes les isométries de E qui conservent Γ.
2. Soit $G = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f(\Gamma) = \Gamma\}$. Montrer que G est un groupe pour la loi $\circ$. Puis trouver les sous-groupes de G.

II.1.118 **TPE/EIVP MP 2015**

On considère un groupe fini $(G, \cdot)$ d'élément neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. On considère un sous-groupe H de G, différent de G, et x un élément de G qui n'est pas dans H. On note K le sous-groupe engendré par H et x. Montrer que $\mathrm{Card}(K) = 2\mathrm{Card}(H)$. En déduire que le cardinal de G est une puissance de 2.

II.1.119 **X MP 2017**

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + n\mathbb{Z})$. On pose :

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & d^{-\frac{1}{4}} \tan(a) \\ -d^{\frac{1}{4}} \tan(a) & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le lien entre T_{a+b} et $T_a \cdot T_b$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, sans valuation paire dans sa décomposition en facteurs premiers. On note :
$$A_d = \{a + b\sqrt{d} \mid (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$
Montrer que A_d est un corps.
3. On note :
$$\begin{array}{cccc} \sigma & : & A_d & \longrightarrow & A_d \\ & & a + b\sqrt{d} & \longmapsto & a - b\sqrt{d} \end{array}$$
Montrer que σ est un automorphisme de corps.
4. Soit $p, q \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $p \wedge q = 1$ et $q \geqslant 3$ impair.
Montrer que $\tan\left(\pi \dfrac{p}{q}\right)$ ne peut s'écrire sous la forme $x = r \cdot d^{\frac{1}{4}}$ avec d entier vérifiant les conditions de la question 2 et $r \in \mathbb{Q}$.

II.1.120 **ENS Ulm**

Soit A un anneau tel que tout $a \in A$ est soit nilpotent, soit idempotent.

1. Montrer que $a^2 = a$ pour tout $a \in A$ et que A est commutatif.
2. Si A est fini, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cong \mathbb{F}_2^n$ en tant qu'anneau.

II.1.121 **X**

1. Soit a et r premiers entre eux.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1 \mod r$.
2. Soit a et r deux entiers relatifs avec $a > r \geqslant 2$. Montrer que la progression arithmétique de premier terme a et de raison r contient une infinité de termes ayant tous les mêmes diviseurs premiers.

II.1.122 **Mines-ponts MP 2017**

Soit a un nombre impair positif et n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \mod 2^n$.
2. En déduire les entiers n pour lesquels le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ est cyclique.

II.1.123 **X-ENS**

Soit G un groupe fini et f un morphisme de G dans G. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

II.1.124 **X MP 2017**

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et V un espace vectoriel. Si $\tau \in L(\mathcal{A}, V)$, on dit que τ est une *trace* si :

$$\forall (A; B) \in \mathcal{A}^2,\ \tau(AB) = \tau(BA).$$

On note $T(\mathcal{A}, V)$ l'ensemble des traces de $\mathcal{A}$ sur V.
On note $[A, B] = AB - BA$ et $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \mathrm{Vect}(\{[A, B] \mid (A; B) \in \mathcal{A}^2\})$.

1. On dit que A est équivalent à B si $A - B \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. Montrer que cette relation est effectivement une relation d'équivalence.
2. On note $L[\mathcal{A}]$ l'ensemble des classes d'équivalence et on considère l'application T de $\mathcal{A}$ dans $L[\mathcal{A}]$ qui à un élément associe sa classe d'équivalence. Montrer que $L[\mathcal{A}]$ est un espace vectoriel et que T est sa trace.
3. Soit $\tau \in T(\mathcal{A}, V)$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{\tau} \in L(L[\mathcal{A}], V)$ tel que :
$$\forall A \in \mathcal{A},\ \tau(A) = \overline{\tau}(T(A)).$$
4. Montrer que $T(\mathcal{A}, V) \cong L(L([\mathcal{A}], V)$.

II.1.125 **X 2022**

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est un *diviseur de zéro* lorsqu'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.

1. Montrer que si A est fini et sans diviseur de zéro, alors A est un corps.
2. Soit $f \in A[X] \setminus \{0\}$. Montrer que si f est un diviseur de zéro, alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $af = 0$.

II.1.126 **Centrale-Supélec MP**

1. Rappeler la définition de φ la fonction indicatrice d'Euler et calculer $\varphi(1176)$.
2. Soit $p_1, \ldots, p_r$ des premiers distincts. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un multiple de $p_1 p_2 \cdots p_r$. Calculer le cardinal de l'ensemble
$$E(q; p_1; \ldots; p_r) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant q \text{ et } k \wedge p_1 p_2 \cdots p_r = 1\}.$$
3. En déduire une propriété connue de la fonction indicatrice d'Euler.

II.1.127 **ENS MP 2018**

Soit f un morphisme de groupe de $\mathbb{U}$ muni du produit usuel, dans lui-même.

1. Supposons f injectif. Montrer que f est l'identité ou l'application $z \mapsto z^{-1}$.
2. Dans le cas général, montrer que f est de la forme $z \mapsto z^n$, où n est fixé dans $\mathbb{Z}$.

II.1.128 **ENS MP 2015**

Déterminer les entiers n vérifiant $n^2 \mid 2^n + 1$.

II.1.129 **ENS MP 2024**

On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1. On définit :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe.
2. Montrer que S et T engendrent $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$.
3. On admet que $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z})$. Déterminer sa décomposition avec les matrices S et T.

II.1.130 **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^d = I_n$. On pose $A = \dfrac{M - I_n}{3}$.

   Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe une constante K_n qui majore le cardinal de tous les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{Z})$.

II.1.131 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit p un premier impair.

1. Montrer que le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est $\frac{p+1}{2}$.
2. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.
3. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est somme de deux carrés.

II.1.132 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

Pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose $\mathcal{F}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$ et $\hat{\mathcal{F}}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2. Calculer $\mathcal{F} \circ \hat{\mathcal{F}}$. Montrer que $\mathcal{F}$ induit un automorphisme sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Exprimer sa réciproque.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que :
   (a) $\forall z \in \mathbb{U}_n$, $|P(z)| \leqslant 1$;
   (b) P admet une racine dans $\mathbb{U}_n$.

   Montrer que $X^n - 1$ divise P.

   On admet que si $A, P \in \mathbb{Z}[X]$, $A \neq 0$ et A de coefficient dominant 1 ou -1, le reste R dans la division euclidienne de P par A est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

II.1.133 **TPE/EIVP MP 2013**

Montrer que :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a \equiv b \mod n \implies a^n \equiv b^n \mod n^2.$$

II.1.134 **Mines-Ponts MP 2019**

On considère comme loi la multiplication matricielle. Décrire G, inclus dans $M_n(\mathbb{R})$, tel que G soit un groupe.

II.1.135 **ENS MP 2015**

1. Soit G un groupe fini. Soit f un automorphisme involutif dont le seul point fixe est e. Montrer que G est abélien.
2. Soit G un groupe abélien fini. Tous les automorphismes involutifs ont-ils seulement e comme point fixe ?
3. Soit G un groupe fini et $a \in G$. On suppose que a est d'ordre 2, et tel que pour tout $x \neq e$ et $x \neq a$, $ax \neq xa$. Que peut-on dire ?

II.1.136 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}^*$, deux à deux premiers entre eux.

1. On pose, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, $c_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} a_i$.

   Montrer que les c_k sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. Soit $b \in \mathbb{Z}$.

   Montrer qu'il existe un unique $(y; x_1; \ldots; x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$, avec $0 \leqslant x_k < a_k$ pour tout k, tel que :
   $$\frac{b}{a_1 \cdots a_r} = y + \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k}{a_k}.$$

II.1.137 **X MP 2018**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d(k)$ le nombre de diviseurs positifs de k. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n\ln(n) + n(2\gamma - 1) + O(\sqrt{n}),$$

où γ est la constante d'Euler.

II.1.138 **ENS Lyon MP 2022**

Soit p un nombre premier. On note pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-v_p(q)}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} |xy|_p = |x|_p |y|_p \\ |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p ; |y|_p) \end{cases}$$

   Que peut-on dire si $|x|_p \neq |y|_p$?

   On note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance associée à $|\cdot|_p$.

2. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est un corps.
3. Montrer que pour toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}_p$, la suite $(|u_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

5. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes en tant que corps.

II.1.139 **X MP 2021**

Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les carrés de l'anneau $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.

II.1.140 **X MP 2021**

À quelle condition une permutation de $\{1; \ldots ; n\}$ est-elle un carré ?

II.1.141 **X MP 2021**

Soit G un groupe d'ordre 8 non cyclique.

1. Montrer que G admet un élément d'ordre 2 et que tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4.
2. On suppose que tous les éléments sont d'ordre au plus 2. Que dire de G ?

   On suppose désormais qu'il existe un élément a d'ordre 4. On note H le sous-groupe engendré par a.

3. Montrer que $xHx^{-1} = H$ pour tout $x \in G$.
4. Soit $b \in G \setminus H$. Montrer que bab^{-1} vaut a ou a^3.
5. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, au plus cinq groupes d'ordre 8.
6. Exhiber cinq groupes d'ordre 8 deux à deux non isomorphes.

II.1.142 **ENS Ulm MP 2019**

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et S_n le groupe des permutations de $\{1; \ldots ; n\}$. On définit :

$$g(n) = \max_{\sigma\in S_n} \left(\min\left(\{k \geqslant 1 \mid \sigma^k = \mathrm{Id}\}\right)\right).$$

Déterminer les entiers naturels n tels que $g(n)$ est impair.

II.1.143 **ENS MP 2022**

On note $A = \mathbb{C}[X, Y]$. Pour tout $v \subset \mathbb{C}^2$, on pose :

$$I(v) = \{P \in A \mid \forall (x; y) \in v,\ P(x; y) = 0\}.$$

1. Soit $v \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que $I(v)$ est un idéal de A.
2. On pose $P(X; Y) = Y - X^2$, et on note :

$$v(P) = \{(x; y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x; y) = 0\}.$$

   Montrer que $A/I(v(p))$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

II.1.144 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(a) = 0$.

1. (a) Montrer que $\{Q(a) \mid Q \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
   (b) Que peut-on dire de sa dimension ?
2. Montrer que c'est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

II.1.145 **X MP 2023**

Pour $\sigma \in S_n$, on note $z(\sigma)$ l'ensemble des éléments de S_n commutant avec σ.

1. Montrer que $z(\sigma)$ est un groupe, puis que pour tout automorphisme ϕ de S_n, on a $z(\phi(\sigma)) = \phi(z(\sigma))$.
2. Déterminer le cardinal de ce groupe pour une transposition et pour une composition de transpositions à supports disjoints.
3. Montrer que si $n \neq 6$, alors pour toute transposition σ et pour tout automorphisme ϕ de S_n, $\phi(\sigma)$ est une transposition.

II.1.146 **ENS MP 2018**

On considère un anneau commutatif A. On suppose que A possède n diviseurs de zéro, avec $n > 1$.

1. Montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments.
2. Trouver une infinité d'anneaux du même type que A, et qui ont exactement $(n+1)^2$ éléments.

II.1.147 **ENS MP 2018**

Classifier les sous-groupes de $\mathbb{U}$.

II.1.148 **ENS MP 2017**

Soit n un entier naturel non nul. Exprimer la permutation qui à k associe $n + 1 - k$ à l'aide de transpositions de la forme $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$.

II.1.149 **X MP 2018**

Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $(*)$ l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ dont on cherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. (a) On suppose $d \leqslant 0$. Résoudre $(*)$.
   (b) On suppose $\sqrt{d} \in \mathbb{N}$. Résoudre $(*)$.

   On suppose dans la suite $d > 0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.
2. (a) Soit $(x_0; y_0)$ une solution de $(*)$ telle que $y_0 \neq 0$. On pose $z = x_0 + y_0\sqrt{d}$.
      i. Montrer que $|z| \neq 1$.
      ii. Montrer que l'on peut construire une suite $(x_n; y_n)$ de couples d'entiers telle que pour tout entier naturel n on a $z^{n+1} = x_n + y_n\sqrt{d}$.
   (b) En déduire que l'équation $(*)$ admet une infinité de solutions.
3. On admet le résultat suivant :

   Pour tout α réel irrationnel, il existe une infinité de rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, tels que $0 < |\alpha - r| < \frac{1}{q^2}$.

   Montrer qu'il existe une solution $(x_0; y_0)$ de l'équation $(*)$ telle que $y_0 \neq 0$.

II.1.150 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant 4$, la matrice $A + kB$ soit inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il en est de même pour la matrice $A + 5B$.

II.1.151 **ENS MP 2013**

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p \geqslant 3$ premier, et v un entier avec $0 < v < p - 1$.

1. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{K}$ tel que $y^v \neq 1$.
2. Calculer, pour $u \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{K}} x^u$.

II.1.152 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$, scindés dans $\mathbb{C}[X]$, que l'on pourra écrire :

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad Q = b \prod_{k=1}^{s} (X - \beta_k),$$

où les α_k sont deux à deux distincts et les β_k sont deux à deux distincts.
On pose $x = \alpha_1$ et $y = \beta_1$, et pour tout $t \in \mathbb{Q}$, $z_t = x + ty$ et $R_t = P(z_z - tX)$.

1. Justifier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $R_{t_0}(y) = 0$ et pour tout $j \geqslant 2$, $R_{t_0}(\beta_j) \neq 0$.

   On pose $\mathbb{Q}[z_{t_0}] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\{z_{t_0}^m \mid m \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{C}$. On admet que $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$ est un corps.
3. Montrer que x et y appartiennent à $\mathbb{Q}[z_{t_0}]$.

II.1.153 **X MP 2020**

On considère un corps quelconque $\mathbb{K}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

1. Soit A l'ensemble des combinaisons linéaires dans $\mathbb{K}$ des matrices I_2 et J. Que dire de la structure algébrique de A ?
2. Soit B l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec tout élément de A. Que dire de B ?

   Dorénavant, on cherche à résoudre l'équation $X^n = J$ dans $M_2(\mathbb{K})$ en distinguant selon si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer un isomorphisme d'anneaux entre A et un autre ensemble classique. En déduire la résolution de l'équation $X^n = J$ et son nombre de solutions.
   (b) En fait, quelle est la structure algébrique de A ici ?
4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) L'ensemble A garde-t-il la même structure algébrique ?
   (b) En s'inspirant de la méthode de 3(a), résoudre de nouveau l'équation $X^n = J$ et dénombrer l'ensemble des solutions.

II.1.154 **Centrale MP**

Soit p premier avec $p \equiv 3 \mod 4$ et $C = \{y = a^2 \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
Pour tout $x \in C$, posons :

$$\pi_x = \prod_{\substack{y \in C \\ y \neq x}} (x + y).$$

Montrer que $\pi_x = 1$.

II.1.155 **Mines-Ponts MNP 2022**

Soit n un entier naturel non nul. On note, pour tout $X \in \mathbb{Z}^n$, $\Lambda(X)$ le plus grand commun diviseur des coefficients de X. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

i) $\det(A) = \pm 1$
ii) $\forall X \in \mathbb{Z}^n$, $\Lambda(X) = \Lambda(AX)$

II.1.156 **X MP 2016**

1. Soit G un groupe non abélien de cardinal 8. Montrer qu'il est engendré par 2 éléments dont l'un, au moins, est d'ordre 4.
2. Déterminer des relations pertinentes entre les éléments de G dans le but de dresser sa table de loi.
3. Étude d'un exemple : caractériser le sous-groupe multiplicatif de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

II.1.157 **ENS MP 2015**

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-groupe propre de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont congrus à aucun élément de H modulo q.

II.1.158 **Centrale MP**

Soit $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$ et $M_n = 2^n - 1$ (*nombre de Mersenne*).
Montrer que si M_n divise s_{n-2}, alors M_n est premier.

II.1.159 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit P un polynôme à coefficients entiers unitaire de degré n.
On note $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$, pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $(X - \lambda_1^q) \cdots (X - \lambda_n^q)$ est lui aussi unitaire à coefficients entiers.

II.1.160 **X MP**

Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1; \ldots; n\}$.

1. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit de cycles à supports disjoints et ce de façon unique. Les supports des cycles sont appelés *orbites*, un point fixe comptant pour une orbite.
2. Si $\sigma \in S_n$, on note $\omega(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ. Soit
$$P_n = \sum_{\sigma \in S_n} X^{\omega(\sigma)}.$$
Factoriser P_n.

II.1.161 **C.C.E. Mines MP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$,
$$A(h) = \begin{pmatrix} a^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et $E = \{A(h) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
2. Calculer $\exp(tV)$ avec $V = A'(0)$.

II.1.162 **ENS MP 2023**

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
2. Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de rôle un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?
3. Même question avec le groupe S_n.

II.1.163 **X MP 2025**

On dit que deux séries entières

$$A(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{et} \quad B(z) = \sum \frac{b_n}{n!} z^n$$

sont *congrues modulo* m si et seulement si

$$\forall n,\ a_n \equiv b_n \mod m.$$

1. Montrer que si p est premier, alors

$$(\mathrm{e}^z - 1)^{p-1} \equiv \sum \frac{-z^{k(p-1)}}{(k(p-1))!} \mod p.$$

2. Montrer que si $m > 4$ est non premier, alors $m \mid (m-1)!$ et

$$(\mathrm{e}^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \mod m.$$

II.1.164 **X MP 2025**

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}^d$. Pour $A \in M_d(\mathbb{C})$, on note $N(A) = \mathrm{Tr}(A\overline{A}^T)$.
On suppose que U_d est un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{C})$ vérifiant :

- Si $A, B \in U_d$ sont telles que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$, $N(I_d - B) < 4$, $C = ABA^{-1}B^{-1}$ vérifie $N(I_d - C) < 4$ et C commute avec A, alors $C = I_d$.
- Si $A, B \in U_d$ alors :

$$N(I_d - ABA^{-1}B^{-1}) \leqslant 2N(I_d - A)N(I_d - B).$$

- Si $A \in U_d$ et $B \in GL_d(\mathbb{C})$ alors :

$$N(AB) = N(BA) = N(B).$$

1. Soit G un sous-groupe fini de U_d. Soit $A, B \in G$ telles que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$ et $N(I_d - B) < 4$.
Montrer que $AB = BA$.
2. Soit H le sous-groupe de G engendré par les éléments A appartenant à G tels que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$.
Montrer que H est abélien.
3. Pour $g \in E$, on définit $gh = \{gh \mid h \in H\}$.
Montrer qu'il existe une constante K_d qui ne dépend pas du sous-groupe G telle que :

$$G = \bigcup_{\text{au plus } K_d} gH.$$

II.1.165 **X MP 2025**

Soit $A \in \mathbb{N}^*$ et $P(t) = t^2 + t + A$ tels que :

$$\forall n \in \{1; \ldots; A-2\},\ P(n) \text{ est premier.}$$

Montrer que pour tout $0 < k < A - 1$ on a :

$$P(A+k) \text{ est premier} \iff k+1 \text{ n'est pas un carré parfait.}$$

II.1.166 **X MP 2025**

On considère l'équation suivante :

$$\frac{X^2+Y^2}{1+XY} = N \quad (1) \qquad \text{avec } (X;Y) \in \mathbb{Z}^2,\ N \in \mathbb{N}.$$

1. Résoudre (1) si $X = Y$.
2. Résoudre (1) pour $N = 0$, $N = 1$.
3. Soit $(X;Y)$ solution de (1) pour $N > 1$ tel que $X \neq Y$.
   Montrer qu'il existe $(U;V)$ solution de (1) tel que $U > V \geqslant 0$.
4. Pour $(X;Y)$ solution de (1), montrer qu'il existe $Z \in \mathbb{Z}$ tel que $(Y;Z)$ est solution et $Y > Z$.
5. Soit $(X;Y)$ solution de (1). Montrer que N est un carré parfait.
6. Soit $(X;Y) \in \mathbb{Z}^2$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que

   $$\frac{X^2+Y^2}{1+XY} = -N.$$

   Montrer que $N = 5$.

II.1.167 **X MP 2025**

Soit $D = \{\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z} \mid \phi \text{ morphisme de groupes}\}$. Pour tout $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, on note $\pi_i(a) = a_i$. Soit $e_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ définie par $\pi_i(e_i) = 1$ et pour tout $j \neq i$, $\pi_j(e_i) = 0$.

1. Soit $\phi \in D$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(e_n) = 0$. Montrer que $\phi = 0$.
   Indication : montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = 2^n a + 3^n b$.
2. Soit $\phi \in D$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On note $x_n = \phi(e_n)$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+1} \geqslant n + 1 + \sum\limits_{i\leqslant n} |\lambda_i x_i|$ et que pour tout $i \in \mathbb{N}$, λ_i divise λ_{i+1}.
   On note $\ell = \phi(\lambda)$.
   Montrer que $\ell = \sum\limits_{i \leqslant |\ell|} \lambda_i x_i$.
3. Soit $\phi \in D$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\phi = \sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i \pi_i$.

2 Algèbre linéaire

II.2.1 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Calculer :

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

II.2.2 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de f.

II.2.3 **X PC 2012**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les matrices A et B ont une valeur propre commune.

ii) Il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

II.2.4 **X**

Calculer :

$$\det\left(\left(\mathrm{pgcd}(i,j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

II.2.5 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ un entier.
Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A = \mathrm{com}(A)$, où $\mathrm{com}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

II.2.6 **Mines-Ponts MP**

Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que la matrice A est nilpotente.

II.2.7 **ENS 2024**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que $M^k = A$. Que dire de la matrice A ?

II.2.8 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux vecteurs de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. On pose $M = XY^T$.
Étudier la diagonalisabilité de M.

II.2.9 **X-ENS**

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé uniquement de matrices diagonalisables ?

II.2.10 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices U et V dans $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

II.2.11 **X**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^T = \mathrm{Tr}(X)A$, d'inconnue X.

II.2.12 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. L'égalité $(AB)^2 = 0$ implique-t-elle $(BA)^2 = 0$?

II.2.13 **ENS PC**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose que

$$\mathrm{Tr}(A) = 3,\ \ \mathrm{Tr}(A^2) = 5,\ \ \mathrm{Tr}(A^3) = 9.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices M appartenant $M_3(\mathbb{R})$, symétriques et telles que $\mathrm{Tr}(AM) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A^2M) = 3$. Déterminer $\min\{\mathrm{Tr}(M^2) \mid M \in \mathcal{E}\}$.

II.2.14 **Mines/Centrale**

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit p, q, r trois projecteurs de V tels que $p = \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$. Montrer que $p = q = r = 0$.

II.2.15 **Mines-Ponts**

Montrer que la famille $\{|x - a| \mid a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

II.2.16 **Mines 2014**

Soit A une matrice carrée réelle. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Montrer que la matrice B est diagonalisable et de spectre inclus dans $\{0; 1\}$.

II.2.17 **Mines-Ponts MP/PC 2023**

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}| \leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

II.2.18 **Mines-Ponts MP 2008**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de taille n :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

II.2.19 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible.
   Montrer que AB et BA sont semblables.
2. Que dire si A n'est pas inversible ?

II.2.20 **ENS PC 2023**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Si $A + \mathrm{i}B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Si les matrices A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.21 **Mines-Ponts MP**

Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A+M) = \det(A)+\det(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

II.2.22 **Mines-Ponts PC**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, N \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A et B commutent. Factoriser $A^n - B^n$.
2. On suppose N nilpotente. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible.
3. On suppose N nilpotente et $AN = NA$. Montrer que $A - N$ est inversible si et seulement si A est inversible.

II.2.23 **Mines**

Soit $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice BA est diagonalisable.

II.2.24 **Mines-Ponts MP**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ possédant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $|\lambda| < 1$

ii) La suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

iii) La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} M^k$ converge.

II.2.25 **CCP MP**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $X^3 - X - 1$ admet une seule racine réelle et strictement positive.
3. En déduire que $\det(A) > 0$.

II.2.26 **Mines-Télécom MP**

Soit p un nombre premier.
On note $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}_2[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant 2\}$.

1. Calculer $\mathrm{Card}(\mathbb{K}_2[X])$.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$ non scindés.
3. En déduire qu'il existe des matrices de $M_2(\mathbb{K})$ non trigonalisables.

II.2.27 **Mines-Ponts PC**

Calculer, en fonction de n, le nombre de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et à coefficients entiers.

II.2.28 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que n est pair.

II.2.29 **CCP PSI 2005**

Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}.$$

II.2.30 **Mines-Télécom 2019**

Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n de deux manières différentes.

II.2.31 **X MP**

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. On pose $r = p + q - pq$. Montrer que r est un projecteur. Trouver son image et son noyau.

II.2.32 **Mines**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

II.2.33 **X PC/MP PSI 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\mathrm{Tr}(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}(A)\mathrm{Tr}(A^2)$.

II.2.34 **CCINP MP 2023**

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) Il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que cf est un projecteur.
   ii) $f \circ f \neq 0$
   iii) $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$

II.2.35 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation matricielle dans $M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} M^5 = M^2 \\ \mathrm{Tr}(M) = n \end{cases}$$

II.2.36 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$ telle que $M^n = I_2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

II.2.37 **CCP MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Caractériser $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

II.2.38 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

II.2.39 **Mines-Ponts PSI 2019**

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit V le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à V.

II.2.40 **Mines-Ponts PSI**

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de V. Prouver que :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

II.2.41 **X PC 2016**

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant n < p$, $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.
Que dire de $\det(AB)$?

II.2.42 **Mines-Ponts**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

II.2.43 **CCINP MP**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base ordonnée de E.
Soit encore f l'application définie, pour tout $x \in E$, par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, que f est symétrique, bijective et que f admet des valeurs propres toutes strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (g(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

II.2.44 **X PC 2020**

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux vecteurs non nuls de E. Montrer que

$$\|x - y\| \geqslant \frac{1}{2}\max(\|x\|; \|y\|)\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

II.2.45 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que la matrice A est nilpotente.

II.2.46 **CCINP MP**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 3$.
Soit a et b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E.
Soit encore u l'application définie, pour tout $x \in E$, par :

$$u(x) = \langle x, a\rangle b + \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$.
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
4. Déterminer les extrema de $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{\langle x, a\rangle\cdot\langle x, b\rangle}{\|x\|^2}$.

II.2.47 **Mines-Ponts MP**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que, pour tout $(A; B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $f(A) = 0$

ii) $A \notin GL_n(\mathbb{K})$

II.2.48 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

II.2.49 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant tous ses coefficients égaux à 1.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(A + tH)\det(A - tH) \leqslant \det(A^2)$.

II.2.50 **Centrale PC 2010**

Soit $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$, où $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les composantes de u dans la base $\mathcal{B}$ pour que le n-uplet $(e_1 + u; \dots; e_n + u)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

II.2.51 **X PC 2015**

Soit f un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
On suppose que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Montrer que f est soit injectif, soit nul.

II.2.52 **X PC 2020**

Soit G un sous-ensemble fini de $GL_n(\mathbb{R})$, non vide et stable par produit.

1. Montrer que $I_n \in G$. Soit $A \in G$. Montrer que $A^{-1} \in G$.
2. On pose $P = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(G)} \displaystyle\sum_{A \in G} A$.
   (a) Soit $A \in G$. Montrer que $AP = PA$ et que P est un projecteur.
   (b) Déterminer les ensembles G tels que $P = I_n$.

II.2.53 **Centrale 2018**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite à *diagonale strictement dominante* lorsque :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible.

II.2.54 **X PC 2020**

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leqslant n$ et $\mathbb{K}$ un corps. Soit encore $A \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$. On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

1. Calculer D.
2. Calculer BA.

II.2.55 **Mines-Ponts MP/PSI**

Quel est le nombre minimal de coefficients à modifier sur une matrice inversible pour la rendre non inversible ?

II.2.56 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

II.2.57 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A + M)$.
   On pourra commencer par le cas où $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
4. Le résultat est-il toujours valable si A et M ne commutent pas ?

II.2.58 **ENS**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que u admet un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables. Combien y en a-t-il ? Décrire ces sous-espaces.

II.2.59 **X**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n. Montrer que u admet exactement $n + 1$ sous-espaces vectoriels stables, et que ce sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

II.2.60 **Mines-Ponts**

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$. On suppose que le rang de u est fini. Montrer que le rang de u est pair.

II.2.61 **X-ENS**

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en la matrice identité.

II.2.62 **CCINP**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$ et α, β, γ non nuls.

1. Montrer que $\chi_B = \chi_{\gamma A} \cdot \chi_{-\beta A}$.
2. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.
3. Justifier que pour $\alpha = -1$, $\beta = 3$, la matrice B est diagonalisable, puis la diagonaliser.

II.2.63 **Mines/Centrale**

Soit Φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini, pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, par $\Phi(A) = A^T$. Déterminer $\det(\Phi)$ et $\mathrm{Tr}(\Phi)$.

II.2.64 **ENS PC 2024**

Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$:

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.65 **Centrale**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, g un endomorphisme de E de rang 1 et $f \in GL(E)$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $f + g \in GL(E)$

ii) $\mathrm{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$

II.2.66 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.
Montrer que $p + \mathrm{rang}(I_n + AB) = n + \mathrm{rang}(I_p + BA)$.

II.2.67 **Mines-Ponts 2019**

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : E \to E$ défini par $D(f) = f'$.
Existe-t-il un endomorphisme φ de E tel que $\varphi^2 = D$?

II.2.68 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\Phi(M) = \alpha M + \beta M^T.$$

1. Montrer que Φ induit un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer le déterminant de Φ. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ appartienne à $GL(M_n(\mathbb{R}))$.
3. Déterminer sous réserve de sens Φ^{-1}.

II.2.69 **X MP**

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f, g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\operatorname{rang}(g) \leqslant \operatorname{rang}(f)$

ii) Il existe un automorphisme h de F et un endomorphisme k de E vérifiant l'égalité $h \circ g = f \circ k$.

II.2.70 **X PC 2013**

Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

II.2.71 **X PC**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que le déterminant de A est égal au déterminant de la matrice $(a_{ij} + \lambda)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$.

II.2.72 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit u, v deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices u et v sont simultanément diagonales.
2. Plus généralement, soit $u_1, \ldots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

II.2.73 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que u ne laisse stable aucun hyperplan de E.

II.2.74 **Mines**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que n est pair et que $\operatorname{Tr}(A) \in \mathbb{Z}_-$.

II.2.75 **X-ENS**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et $n_1, \ldots, n_r$ leur multiplicité.

1. Calculer la dimension de $\mathbb{K}[A]$ et celle du commutant de A noté $C(A)$.
2. Montrer que $\dim(C(A)) = n$ si et seulement si $r = n$ si et seulement si $C(A) = \mathbb{K}[A]$.

II.2.76 **X-ENS**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que l'algèbre des endomorphismes de E est simple.

II.2.77 **CCINP PSI 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A^T A)^2 = I_n$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que A est symétrique.
3. Montrer que $A = I_n$.

II.2.78 **Mines-Télécom MP**

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $N \in M_2(\mathbb{C})$ non nulle, nilpotente et vérifiant $A = \alpha I_2 + N$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.79 **X PSI**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1\,, n-1]\!]$ et $u(e_n) = 0$.
Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u.

II.2.80 **Mines-Ponts PSI 2018**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Soit $(t_0; t_1; \ldots; t_n)$ un $(n+1)$-uplet de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $(P(X+t_0); P(X+t_1); \ldots; P(X+t_n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

II.2.81 **Mines-Ponts**

Soit un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Soit $n+1$ nombres réels distincts $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P(\alpha_0 X); P(\alpha_1 X); \ldots; P(\alpha_n X))$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.2.82 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout A et B appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge vers une matrice que l'on notera e^A.
2. Montrer que $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

II.2.83 **X ESPCI 2024**

Montrer que l'espace vectoriel

$$\left\{ f \in D^1(]0\,; +\infty[, \mathbb{R}) \mid \forall x > 0,\ f(x) = x f'\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

est de dimension infinie.

II.2.84 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel. Donner une base.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?
3. Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i;j) \in \{1;\dots;p\}^2$, $a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$.
   Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.85 **ENS PC 2019**

Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{e}^M = -I_n$.

II.2.86 **X**

1. Soit $a_1,\dots,a_p$ des réels distincts deux à deux et $c_1,\dots,c_p$ des réels non tous nuls. On pose $f(t) = c_1\mathrm{e}^{a_1 t} + \cdots + c_p\mathrm{e}^{a_p t}$. Montrer que f admet au plus $p-1$ zéros.
2. Soit $a_1 < \cdots < a_p$ et $b_1 < \cdots < b_p$ des réels.
   On pose $M = \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Montrer que $\det(M) > 0$.

II.2.87 **X-ENS**

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit la suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ en posant $A_0 = A$ et pour tout $k \geqslant 1$:

$$A_k = A\left(A_{k-1} - \frac{1}{k}\mathrm{Tr}(A_{k-1})I_n\right).$$

Montrer que $A_n = 0$.

II.2.88 **Centrale MP 2007**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux annule la matrice A.
2. En déduire que si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors A est diagonalisable. Que dire si $\mathrm{Tr}(A) = 0$?
3. Montrer que la matrice $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

II.2.89 **X**

Soit E une espace vectoriel complexe de dimension supérieure ou égale à 1, et u un endomorphisme de E. Montrer l'existence d'un unique couple $(d;n)$ d'endomorphismes de E tel que :

- $u = d + n$,
- d et n commutent,
- d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

II.2.90 **ENS Ulm MP**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et $X = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que λx_i est encore une composante de X de module maximal.
2. En déduire que λ est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité avec $m \leqslant n$.
3. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. Montrer que la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

II.2.91 **Mines-Ponts PSI**

Soit la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ?

II.2.92 **X MP 2022**

Soit Φ l'endomorphisme « *moyenne de Cesàro* » de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Déterminer le spectre, les sous-espaces propres et l'expression des vecteurs propres de l'endomorphisme Φ.

II.2.93 **X MP 2006**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\mathrm{sim}(A)}$.

II.2.94 **Mines**

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ et on note :

$$P_A(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(A) X^{n-k}.$$

1. Rappeler l'expression de χ_A en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
2. Que valent $c_0(A)$ et $c_1(A)$?
3. Montrer que $c_2(A) = \dfrac{\mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)}{2}$.

II.2.95 **Mines-Ponts**

Cas particulier :

Soit $A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ appartenant à $M_{3\times1}(\mathbb{R})$.

Soit encore $M = AB^T + BA^T$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de M.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 et montrer qu'il est orthogonal à $\mathrm{Vect}(\{A; B\})$. (L'espace est muni du produit scalaire canonique.)

Cas général :

Soit A et B appartenant à $M_{n\times1}(\mathbb{R})$ linéairement indépendants.

1. Montrer que $M = AB^T + BA^T$ est diagonalisable.
2. Montrer que 0 est une valeur propre de M et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Donner une condition (suffisante) pour que $A + B$ soit un vecteur propre de M.

II.2.96 **ENS MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{sim}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{sim}(A)$ est fermée.

II.2.97 **CCP MP**

1. Soit $P(X) = X^n - X + 1$. Montrer que le polynôme P admet n racines complexes distinctes $z_1, \dots, z_n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que $\det(A) = 2 \cdot (-1)^n$.

II.2.98 **Mines-Ponts MP**

Soit $(e_i)_{i\in\{1;\dots;n\}}$ une famille libre dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On suppose que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $\|e_i\| \leqslant 1$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $\|e_i\| \geqslant 1$.
3. En déduire que $(e_i)_{i\in\{1;\dots;n\}}$ est une base orthonormée de E.

II.2.99 **Centrale PC 2024**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, on définit $G : E \to E$ par :

$$G(f)(x) = \int_0^1 \min(x;t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est bien défini et est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de G.
3. Déterminer les éléments propres de G.

II.2.100 **CCP MP**

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x\rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On considère :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle \end{array}$$

   (a) Montrer que les dérivées partielles de g existent, et les calculer.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique z.
   (c) Montrer que g admet un minimum en z.

II.2.101 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall (x;y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

II.2.102 **Centrale MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $r \in [\![1\,, n]\!]$. Calculer $\mathrm{com}(\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r\text{ un}},\overbrace{0,\ldots,0}^{n-r\text{ zéro}}))$.
2. Montrer que pour tout $(A;B) \in E^2$, $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$.
3. En déduire $\mathrm{rang}(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\mathrm{rang}(A)$.
4. Soit $\varphi : E \to E$, $A \mapsto \mathrm{rang}(A)$.
   L'application φ est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.

II.2.103 **CCINP PC 2021**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle T, P\rangle = P(0)$.

II.2.104 **CCP MP**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 3$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de M_a. Donner une valeur propre évidente de M_a et sa multiplicité.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

   Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ en fonction de M.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M_a soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.105 **X-ENS**

1. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det\left((x_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) telle que $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Montrer que A est nilpotente.

II.2.106 **CCINP MP 2023**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

II.2.107 **Mines-Télécom PSI 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

II.2.108 **X**

Trouver une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes périodiques.

II.2.109 **X MP**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On dit qu'un endomorphisme u de E est un *opérateur positif* (ce que l'on note $u \geqslant 0$), si $u(f) \geqslant 0$ pour tout $f \geqslant 0$.

1. Soit u un endomorphisme positif de E. Montrer que u est continu.
2. Soit $f \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x; y) \in [0\,;1]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon + c(y-x)^2.$$
3. (*Théorème de Korovkin*)
Pour tout $\in \mathbb{N}$, on note e_k l'élément de E défini par $e_k : x \mapsto x^k$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs positifs de E.
On suppose que pour $k \in \{0; 1; 2\}$, la suite de fonctions $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e_k dans $(E, \|\cdot\|)$.
Montrer que pour tout $f \in E$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

II.2.110 **X-ENS**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

II.2.111 **Centrale-Supélec PC 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

1. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda = 0$.
2. On suppose que A commute avec A^T. Montrer que A est la matrice nulle.

II.2.112 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que A est *positive* (resp. *définie positive*) si
$$\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^TAX \geqslant 0 \quad (\text{resp. } X^TAX > 0)$$

1. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

II.2.113 **X ESPCI**

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) = \mathrm{rang}(f+g)$

ii) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$

II.2.114 **CCINP 2023**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Trouver des endomorphismes diagonalisables f de E vérifiant $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0$.

II.2.115 **X-ENS**

Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

II.2.116 **X ESPCI 2023**

Soit $n \geqslant 3$ un naturel impair et $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Pour $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $M = \alpha A + \beta A^T$. Montrer que $\det(M)$ est un multiple de $\alpha + \beta$.

II.2.117 **Mines**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice A.

II.2.118 **CCINP PC 2023**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = u^2$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u est un projecteur.

II.2.119 **CCP MP**

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$.
Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
Soit g l'endomorphisme de E tel que $A^T = (g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

1. (a) Montrer que :
$$\forall (x;y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$
   (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Soit $y \in E$.
   (a) Si $f(y) = y$, montrer que $\|g(y) - y\|^2 = \|g(y)\|^2 - \|y\|^2$.
   (b) En déduire que $f(y) = y$ si et seulement si $g(y) = y$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)^\perp$.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \boxplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

II.2.120 **Mines MP 2024**

Calculer $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Vect}(\mathbb{U}_5))$, où $\mathbb{U}_5 = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{5}} \mid 0 \leqslant k \leqslant 4 \right\}$.

II.2.121 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $f \circ f = 0$. Montrer que $\text{rang}(f) \leqslant 2$.

II.2.122 **Mines**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire. Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que p et q ont une droite propre commune.

II.2.123 **CCINP MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ appartenant à $\mathbb{C}$ et

$$M(a_0; \dots; a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $J = M(0; 1; 0; \dots; 0)$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J. Montrer que J est diagonalisable.
2. Montrer que $M(a_0; \dots; a_{n-1})$ est un polynôme en J. La matrice $M(a_0; \dots; a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ?
3. Soit $\mathcal{T} = \{M(a_0; \dots; a_{n-1}) \mid (a_0; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?

II.2.124 **X PC 2020**

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

II.2.125 **Mines-Ponts**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. On suppose que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

II.2.126 **Mines-Télécom MP**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $B \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telles que $AB = BA$.
La norme euclidienne sur $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est notée $\|\cdot\|$.

1. Soit $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(AX)^T BX = 0$, puis que :

$$\|(A+B)X\| = \|(A-B)X\|.$$

   Pour la suite, on suppose en plus que $B \in GL_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $A + B$ et $A - B$ sont inversibles.
3. Montrer que $(A+B)(A-B)^{-1}$ est orthogonale.

II.2.127 **Mines-Télécom MP**

Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E tel que, pour tout $(x; y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

1. Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.
2. Soit a une valeur propre de s et V_a l'espace propre associé.
   (a) Soit $x \in V_a \setminus \{O_E\}$. Montrer que $\langle s(x), x\rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$.
   (b) En déduire que $a < 0$.
   (c) Soit $F = \text{Vect}(\{x; f(x)\})$. Montrer que F et $F^\perp$ sont stables par f.
3. Montrer que $\dim(F) = 2$.

II.2.128 **CCP MP**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un vecteur non nul de E. On pose $H = u^\perp$. Soit encore s la réflexion (la symétrie orthogonale) par rapport à H et $f \in O(E)$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie, et déterminer ses espaces propres caractéristiques.
2. Montrer que f et s commutent si et seulement si u est un vecteur propre de f.
3. En déduire l'ensemble $\mathcal{C} = \{f \in O(E) \mid \forall g \in O(E), f \circ g = g \circ f\}$.

II.2.129 **CCP MP**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes, et g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g.
2. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $P(f) = g$.

II.2.130 **CCP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et soit $\mathcal{B} = \{e_1; \dots; e_n\}$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Avec les données de l'énoncé, exprimer $\text{Tr}(f)$.

II.2.131 **Centrale**

Trouver les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $MM^TM = I_n$.

II.2.132 **Mines-Ponts**

Soit A et B deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ n'ayant pas de valeur propre commune.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = Y$.

II.2.133 **Mines PSI 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathrm{Im}(u) = F \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = G \iff \dim(F) + \dim(G) = n$$

2. Dans cette question $n = 3$, F est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}(\{(1; -1; 0)\})$. Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G.

II.2.134 **X PC 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$

ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} O_p & I_p \\ O_p & O_p \end{pmatrix}$$

où O_p désigne la matrice nulle de $M_p(\mathbb{K})$.

II.2.135 **ENS PSI 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0\,;\pi[$. On considère les deux matrices suivantes appartenant à $M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\theta = 2\cos(\theta) I_n + A.$$

1. Montrer que $\det(B_\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
2. En déduire que la matrice A admet n valeurs propres distinctes. Calculer ces valeurs propres.

II.2.136 **ENS MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, $\det(A + M) = 0$. Montrer que M est antisymétrique.

II.2.137 **X PC 2012**

Soit $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des nombres complexes distincts et pour tout $k \in [\![1\,, n]\!]$, $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x}$. Montrer que $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

II.2.138 **X PC 2012**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_p$ appartenant à $\mathbb{K}$ tels que

$$A^{-1} = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p.$$

Autrement dit, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

II.2.139 **X PC 2014**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u et v deux projecteurs de E. On suppose que $\mathrm{Id}_E - u - v$ est inversible. Montrer que $\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(v)$.

II.2.140 **X PC 2019**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Sous quelle condition la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

II.2.141 **X PC 2019**

Soit $q \in \mathbb{R}^*$ et

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & q(q+1) \\ q(q-1) & -q \end{pmatrix}.$$

1. Soit p et q deux nombres réels non nuls et distincts. Les matrices $A(p)$ et $A(q)$ sont-elles semblables ?
2. Même question pour les matrices $B(q) = q^{-2}A(q)$.
3. On considère les matrices $C \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = (A(q))^2$. Combien parmi celles-ci ne sont pas semblables à $A(q)$?

II.2.142 **X PC 2019**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g.$$

Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

II.2.143 **X PC 2019**

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et u^2 soit non nul. Trouver l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u.

II.2.144 **CCP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calcul, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.145 **CCP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $2A^3+3A^2+6A-I_n=0$. Justifier les propositions suivantes :

1. A est inversible ;
2. A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$;
3. $\det(A)>0$

II.2.146 **CCP 2015**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A=0$.
Que peut-on dire du rang de A ?

II.2.147 **CCP 2015**

Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$, de trace égale à 7 et vérifiant l'égalité $A^3-5A^2+6A=0$.

II.2.148 **Mines-Ponts 2015**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E sans point fixe autre que le vecteur nul, tel que f^2-2f est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

II.2.149 **X-ENS 2015**

Trouver toutes les racines carrées de $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

II.2.150 **Centrale 2015**

Résoudre dans $M_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^2+M=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.

II.2.151 **Mines 2015**

Soit $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3&-6\\0&3&6&9\\7&3&13&9\\4&2&8&6\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Trouver $P,Q \in GL_4(\mathbb{R})$ telles que $PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

II.2.152 **Mines 2015**

À quelle(s) condition(s) la matrice $A=\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&0&0\\0&1&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

II.2.153 **Mines 2015**

Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

II.2.154 **CCP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $AM - MA$.
2. L'endomorphisme $f : M \mapsto AM - MA$ est-il diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

II.2.155 **CCP 2015**

Montrer qu'une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ a un indice de nilpotence inférieur ou égal à n. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.156 **CCP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A + I_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \dim(E_1)$, où E_1 est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

II.2.157 **CCP 2015**

On considère l'application f qui, à tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, fait correspondre le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par X^4-1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Est-il diagonalisable ? injectif ?

II.2.158 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé simple.

1. Montrer que la famille $\{I_n; A; \dots; A^{n-1}\}$ est libre.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que B est une combinaison linéaire des matrices $I_n, A, \dots, A^{n-1}$.

II.2.159 **CCP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une matrice R telle que $R^2 = A$. (On ne demande pas de calculer R.)
3. Montrer que toute matrice R appartenant à $M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ est diagonalisable.

II.2.160 **Mines 2015**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[-1\,;1]$, à valeurs réelles. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f;g) & \longmapsto & f(0)g(0)+\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur E. Trouver une base orthonormée du sous-espace vectoriel $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(0)=0\}$.

II.2.161 **CCP 2015**

On considère l'endomorphisme u de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ u(M)=\frac{1}{3}(2M-M^T).$$

1. Rechercher les éléments propres de u.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer $\mathrm{Tr}(u)$ et $\det(u)$.

II.2.162 **Centrale 2015**

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace euclidien E. Soit $f:F\to G$ et $g:G\to F$ des applications linéaires telles que :

$$\forall(x;y)\in F\times G,\ \langle f(x),y\rangle=\langle x,g(y)\rangle.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(g)^{\perp}\cap F$.
2. Montrer que $F=\mathrm{Ker}(f)\boxplus\mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si g est surjective.
4. Montrer que g est injective si et seulement si f est surjective.

II.2.163 **Centrale 2015**

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

II.2.164 **Centrale 2015**

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ et $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Montrer que A est une matrice de rotation si et seulement si il existe $h\in\left]0\,;\frac{4}{27}\right[$ tel que a,b et c sont les racines du polynôme X^3-X^2+h.

II.2.165 **Centrale 2015**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix}$.

À quelle condition sur A, la matrice B est-elle diagonalisable ?
On pourra commencer par étudier le cas $n = 1$.

II.2.166 **CCP 2015**

Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$. Soit encore $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On cherche à démontrer que M est semblable à A.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et donner son spectre. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1; j; j^2\}$.
   Montrer que j et j^2 ont la même multiplicité algébrique.
   En déduire les valeurs propres de M.
3. Montrer que M est semblable à A dans $M_3(\mathbb{C})$, puis dans $M_3(\mathbb{R})$.

II.2.167 **Petites Mines 2015**

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ une base orthonormée de E. On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.
2. Déterminer la nature de f et ses caractéristiques géométriques.

II.2.168 **Mines-Ponts 2015**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire

$$(P; Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \int_0^1 (t+x)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et qu'il est symétrique.

II.2.169 **Centrale 2015**

On considère les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

$$u^2 = v^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \quad \text{et} \quad u \circ v = -v \circ u.$$

Montrer qu'il en existe une infinité si $n = 4$ et aucun si $n = 3$.

II.2.170 **Mines-Ponts**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| < n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

II.2.171 **X-ENS PC 2019**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer qu'il existe un élément v de E tel que $\{v; f(v); \ldots; f^{n-1}(v)\}$ soit une base si et seulement si f possède n valeurs propres distinctes.

II.2.172 **X-ENS 2015**

Soit $(U_1; U_2; \ldots; U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Montrer que la matrice $A = (\langle U_i, U_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont strictement positives.

II.2.173 **Centrale 2015**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On considère l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si A est nilpotente, f l'est aussi.
3. Montrer que si A est diagonalisable, f l'est aussi.

II.2.174 **CCP MP**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f ;
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

II.2.175 **X MP 2021**

Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ semblables uniquement à elles-mêmes.

II.2.176 **CCP MP**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1 les éléments propres de B.

II.2.177 **CCP MP**

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

II.2.178 **CCP MP**

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le nombre réel 0 est-il valeur propre de la matrice A_n ?

II.2.179 **CCP MP**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\{I_2; A\})$.

II.2.180 **CCP MP**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un vecteur unique y_0 tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

II.2.181 **X MP 2021**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ dont toute valeur propre est de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(M^k)_{k \geqslant 0}$ converge vers 0.

II.2.182 **CCP MP**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases},$$

   x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1 et en le justifiant, résoudre ce système.

II.2.183 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base $(v_1; v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

II.2.184 **CCP MP**

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
   Soit u un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est une racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = M_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de E définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E,\, u(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A.$$

   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1).

II.2.185 **CCP MP**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire dans ℓ^2. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est un application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   (a) Déterminer $F^\perp$.
   (b) Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

II.2.186 **Mines 2015**

Rechercher les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$, de trace nulle, telles que $M^2 + M^T = I_3$.

II.2.187 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux ;
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

II.2.188 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on l'égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in C([a\,;b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a\,;b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

II.2.189 **CCP MP**

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les endomorphismes u et v définis par
$$u : P \longmapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v : P \longmapsto P'.$$
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

II.2.190 **CCP MP**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1; X - a, (X - a)^2; \ldots; (X - a)^n)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   le nombre a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et pour tout $k \in [\![0\,, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
   (c) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

II.2.191 **CCP MP**

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n \text{ avec } (u_0; u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

II.2.192 **CCP MP**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

II.2.193 **CCP MP**

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

II.2.194 **Mines 2015**

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P(X)) = P(2-X)$. Déterminer les éléments propres de φ.

II.2.195 **CCP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 - 7A^2 + 9A - 4I_n = 0$. Justifier les assertions suivantes :

1. A est inversible ;
2. A est diagonalisable ;
3. $\det(A) > 0$.

II.2.196 **X MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $M \in M_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls et que les termes en dehors de la diagonale appartiennent à $\{-1; 1\}$. Montrer que la matrice M est inversible.

II.2.197 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose, pour tout $(a; b) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$, où Tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

II.2.198 **CCP MP**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P; Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   P polynôme annulateur de $u \implies PQ$ polynôme annulateur de u
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire le polynôme caractéristique de A.
   (b) En déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

II.2.199 **CCP MP**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels.

1. La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
2. La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

II.2.200 **CCP 2016**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f et g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que :

$$|\mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(g)| \leqslant \mathrm{rang}(f + g) \leqslant \mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g).$$

II.2.201 **CCP MP**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

II.2.202 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant :

$$\deg(P) \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0\,,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0\,,n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0\,,n]\!], \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que, pour tout $p \in [\![0\,,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

II.2.203 **CCP MP**

On définit dans $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A; A') = \mathrm{Tr}(A^T A')$, où $\mathrm{Tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

II.2.204 **CCP MP**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

II.2.205 **Mines PSI 2016**

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

II.2.206 **CCP 2016**

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et U l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, U(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que U est un endomorphisme de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. L'endomorphisme U est-il surjectif ?
3. Déterminer le noyau de U.

II.2.207 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.208 **Petites Mines 2016**

Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie comme suit :

$$a_{ij} = \binom{j}{i} \text{ si } i \leqslant j \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

II.2.209 **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, π_A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

II.2.210 **Mines PSI 2016**

Soit $A, B, M \in M_n(\mathbb{C})$, λ et μ deux nombres complexes non nuls et distincts tels que :

$$\begin{cases} A + B = I_n \\ \lambda A + \mu B = M \\ \lambda^2 A + \mu^2 B = M^2 \end{cases}$$

1. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

II.2.211 **Mines 2016**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A^2 + A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

II.2.212 **Mines 2016**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, G un sous-espace vectoriel de E. Déterminer la dimension de $W = \{u \in L(E, F) \mid G \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.

II.2.213 **CCP 2016**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que :
$$H \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset H$$
2. Déterminer les sous-espaces de E stables par f, f étant un endomorphisme de E qui a pour matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
dans une base $\mathcal{B}$.

II.2.214 **CCP**

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $f(P)(X) = X(X+1)P'(X) - nXP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres de f.

II.2.215 **CCP 2016**

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Déterminer la nature et les caractéristiques de f, endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

II.2.216 **Mines 2016**

On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions $S : x \mapsto \sin(x)$ et $C : x \mapsto \cos(x)$. On désigne par D l'application dérivation.

1. Montrer que F est stable pour D et qu'il existe un endomorphisme u de F tel que $u \circ u = \tilde{D}$, où $\tilde{D}$ est l'endomorphisme induit par D sur F.
2. Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = D$?

II.2.217 **CCP**

Existe-t-il une base de $M_n(\mathbb{C})$ formée de matrices diagonalisables ?

II.2.218 **CCP 2016**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. À quelle(s) condition(s) existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$?

II.2.219 **ENSAM 2016**

Soit A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et $f : X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
3. Dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = -1$, trouver $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{rang}(f)$.
4. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Retrouver le résultat de la partie 2.

II.2.220 **TPE/EIVP 2016**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.221 **TPE/EIVP 2016**

Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases}$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

II.2.222 **Centrale 2016**

1. Écrire un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre inférieur ou égal à 4. Montrer que la matrice $I_n + N$ admet au moins une *racine carrée* dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = I_n + N$.

II.2.223 **Centrale PSI 2016**

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme symétrique et est 1-lipschitzien.
2. On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux.
   (a) Prouver que le polynôme caractéristique de $p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme $p + q$ est-il nécessairement un projecteur ?
   (b) Montrer que les valeurs propres de $p + q$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;2]$.
3. Donner un exemple de problème faisant intervenir des projecteurs orthogonaux.

II.2.224 **TPE/EIVP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est inversible et que $\det(A) > 0$.

II.2.225 **CCP 2016**

On considère l'endomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & M_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array}$$

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

II.2.226 **CCINP 2024**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.
   Prouver que A est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset [0\,; +\infty[$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que A^2 est positive.
3. Soit A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose A symétrique et B symétrique positive. Montrer que :

$$AB = BA \implies A^2B \text{ est symétrique positive}$$

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.
   Prouver qu'il existe une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, symétrique positive, telle que $A = B^2$.

II.2.227 **CCINP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et de y, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que, pour tout $(x; y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.
   Autrement dit, $\mathcal{O}(E) = \{u \in L(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$.
   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit u un endomorphisme de E. Soit $e = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_1); u(e_2); \ldots; u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

II.2.228 **X MP/PSI 2023**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
Montrer que $\det(A + B) \geqslant \max(\det(A); \det(B))$.

II.2.229 **X MP/PSI**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

II.2.230 **Mines-Télécom PC 2018**

Soit la matrice $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$.
Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell \in \mathbb{R}$.

II.2.231 **Mines-Télécom 2022**

On cherche à résoudre cet exercice avec le minimum de calculs possible.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Donner $\operatorname{rang}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$.
2. Soit g la restriction de f à $\operatorname{Im}(f)$. Expliciter g.
3. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

II.2.232 **Mines-Ponts 2022**

Soit $j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Combien de sous-espaces vectoriels stables par A existe-t-il ?
3. Étudier $C_A = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$.

II.2.233 **ENSAM**

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et D l'application de dérivation :

$$D \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
2. Montrer que D est nilpotent et calculer son indice de nilpotence.
3. On note I l'endomorphisme identité. Montrer que $I - D$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Résoudre dans E, puis dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'équation différentielle $y' - y = \frac{x^n}{n!}$.

II.2.234 **X ESPCI**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$$

II.2.235 **ENSIIE 2015**

On considère une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\det(A) = 10, \quad \mathrm{Tr}(A) = -6 \quad \text{ et } \quad A - I_3 \text{ n'est pas inversible.}$$

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme de la matrice A.

II.2.236 **CCINP**

Déterminer toutes les formes linéaires f de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A; B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

II.2.237 **CCP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, non nulle.

1. Quel est le rang de la matrice A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général. On pose $B = 2A - \mathrm{Tr}(A)I_n$. Calculer le déterminant de B.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
5. Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

II.2.238 **CCP 2017**

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant, pour A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$.

   Calculer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension.
4. Soit J la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à $\mathcal{H}$.

II.2.239 **CCP 2017**

On considère une forme linéaire non nulle φ sur un espace vectoriel E et x_0 un vecteur non nul de E. On pose, pour tout $x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x)x_0$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Donner la dimension du sous-espace propre associé.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable. Indiquer alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

II.2.240 **Petites Mines 2017**

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$$

Déterminer l'image de φ.

II.2.241 **Mines-Ponts 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \text{ est symétrique } \iff A^T A = A^2$$

II.2.242 **Centrale 2017**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, soit $X(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Soit $\omega_0 = 1$ et $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{èmes}}$ non réelles de l'unité.
   Montrer que la famille $\{X(\omega_0); \ldots ; X(\omega_{n-1})\}$ est libre.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable.

II.2.243 **Centrale 2017**

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel.
2. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de l'application dérivée $D : P \mapsto P'$ est composée seulement de 0 et 1.
3. (a) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.
   (b) Montrer que si $Q \geqslant 0$, alors $P \geqslant 0$.
   (c) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, alors Q l'est aussi.

II.2.244 **Mines-Ponts 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$T : P \mapsto P(X+1) \quad \text{et} \quad S : P \mapsto P(1-X).$$

Trouver les vecteurs propres.

II.2.245 **Mines 2017**

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et sa transposée sont semblables dans $M_3(\mathbb{R})$.

II.2.246 **X-ENS PSI 2017**

1. Montrer que pour toutes matrices de $M_n(\mathbb{C})$, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
2. On considère deux endomorphismes inversibles f et g d'un espace vectoriel E. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$. On note E_λ le sous-espace propre de $f \circ g$ associé à la valeur propre λ et F_λ le sous-espace propre de $g \circ f$ associé à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.
   En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.
   (b) Montrer que si $f \circ g$ est inversible, $g \circ f$ l'est aussi.
3. Trouver deux matrices carrées X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX.

II.2.247 **X ESPCI 2017**

1. Trouver une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq M$ et $M^2 = M^3 \neq 0$.
2. Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) > 0$ et $A^{-1} = A^T$.
   Montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = X$.

II.2.248 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice réelle de taille 2 telle que $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
2. Montrer qu'il existe $k \in [\![0\,, 2n-1]\!]$ et P inversible dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que :
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) & \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}.$$
3. Montrer qu'il existe P pour la même relation, mais réelle.

II.2.249 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $(a_0; \dots ; a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ distincts deux à deux et $(A; B) \in M_n(\mathbb{C})^2$.
On définit :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ & & P & \longmapsto & (P(a_0); \dots ; P(a_n)) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
   En déduire l'existence de polynômes $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ ($i \in [\![0\,,n]\!]$) tels que :
   $$\forall k \in [\![0\,,n]\!],\ k \neq i,\ L_i(a_k) = 0 \text{ et } L_i(a_i) = 1.$$
2. Exprimer le polynôme caractéristique de A en fonction des L_i.
3. Montrer que
   $$\begin{array}{cccc} f & : & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & & M & \longmapsto & \chi_M \end{array}$$
   est continue.
4. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

II.2.250 **ENSEA/ENSIIE PSI 2017**

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$ et $H_1, \dots , H_p$ des hyperplans vectoriels de E deux à deux distincts.
Montrer que $\dim\left(\bigcap\limits_{k=1}^{p} H_k\right) \geqslant n - p$.
Indication : considérer

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & H_1 \times \cdots \times H_p & \longrightarrow & E^{p-1} \\ & & (x_1; \dots ; x_p) & \longmapsto & (x_2 - x_1; \dots ; x_p - x_1) \end{array}$$

II.2.251 **CCP 2017**

Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, ainsi que $\mathrm{Tr}(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?
3. Donner une matrice diagonale semblable à A.
4. Déterminer le polynôme caractéristique et l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

II.2.252 **CCP 2017**

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de M, et que M n'est pas inversible.
3. Montrer que M admet un polynôme annulateur de degré 2, que M est symétrique et de trace nulle.

II.2.253 **X MP 2021**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

II.2.254 **Mines-Ponts MP 2021**

Existe-t-il une norme N sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(A;B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$?

II.2.255 **X PSI 2023**

Déterminer le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices orthogonales.

II.2.256 **CCP 2012**

On considère trois nombres réels a, b, c et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Exprimer, suivant la parité de $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A ou de A^2.
   On pourra utiliser l'égalité $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
3. Montrer que $\exp(A) = I_3 + \dfrac{\sin(r)}{r}A + \dfrac{1 - \cos(r)}{r^2}A^2$.

II.2.257 **Mines 2012**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \leqslant 0$.

II.2.258 **Centrale 2012**

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = A^T$ et on pose $B = A^{n+1}$.

1. Montrer que B est symétrique et que ses valeurs propres sont positives.
2. (a) Calculer B^n.
   (b) En déduire les valeurs propres de B.
   (c) Quelle est la nature de B ? (On assimilera une matrice à son endomorphisme canoniquement associé.)
3. Montrer que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(B) + \mathrm{Im}(B)$ et que la somme est orthogonale.
4. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$ sont stables par A.
   (b) Montrer que l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Im}(B)$ est une isométrie.
   (c) Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Ker}(B)$?
5. Caractériser les matrices $A \in M_p(\mathbb{R})$ telles que $A^n = A^T$.

II.2.259 **Centrale 2012**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que pour tout $P \in E$, il existe $Q \in E$, unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)Q(x) = \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t,$$

   et que l'application f qui à P associe Q est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Trouver tous les endomorphismes de E tels que $g^2 = f$.

II.2.260 **Mines-Ponts 2012**

Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si A admet un polynôme annulateur qui prend en 0 la valeur 1.

II.2.261 **Mines 2012**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que si n est impair, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que si n est pair, alors $\det(A) \geqslant 0$. Sous quelle(s) condition(s) l'inégalité est-elle stricte ?

II.2.262 **ENSEA/ENSIIE 2012**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2.
3. Donner les valeurs propres de A sans utiliser le polynôme caractéristique.

II.2.263 **CCP 2012**

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ définie par blocs.

1. Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}$, puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi, et que ce n'est possible que si $A = 0$.

II.2.264 **CCP 2012**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. À tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on associe $\Phi(P) : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(\Phi)$.

II.2.265 **CCP 2017**

Soit $A \in \mathbb{R}^n$ une matrice colonne non nulle.

1. Montrer que $B = AA^T$ est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de B.
3. Calculer B^2.
4. Donner les éléments propres de A.
5. Calculer $\det(I_n + B)$ en fonction du vecteur A.

II.2.266 **CCP 2017**

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.267 **CCP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Avec un minimum de calculs, déterminer les valeurs propres de A et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ semblable à A.
2. Montrer que si une matrice M commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

II.2.268 **CCINP PSI 2021**

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E. Montrer que :

1. Si $\mathrm{rang}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si $\mathrm{rang}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.269 **ENS Rennes 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

II.2.270 **CCP 2017**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

1. Que peut-on dire de u ?
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E solution de l'équation (E) : $g^2 = u$, alors tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de g.
3. Combien l'équation (E) admet-elle de solutions ?

II.2.271 **Centrale PSI**

Soit $S : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.
2. L'application S est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s. L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

II.2.272 **Centrale PSI**

Soit $M = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le polynôme minimal π_M de la matrice M.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ semblable à M.

II.2.273 **Centrale PSI**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.274 **CCP**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

À quelle(s) condition(s) portant sur a et b, la matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.275 **CCP PC**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

II.2.276 **Petites Mines PC**

Soit $n \geqslant 2$ un entier, un nombre réel m et la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = 1$ si $(i;j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,n-1]\!]$ et $a_{in} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. On suppose que $m \neq 1-n$. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $m = 1-n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

II.2.277 **TPE/EIVP PC**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\Phi_A = 0$.
2. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.
3. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

II.2.278 **CCP PC**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de E de rang r et $(e_1;\ldots;e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$.

II.2.279 **Centrale PSI**

Soit p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E. Soit encore $u = p + q$.

1. Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x, p(x)\rangle$ et $\langle x, q(x)\rangle$. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0\,;2]$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

II.2.280 **TPE/EIVP PSI**

Soit S une matrice symétrique réelle et D une matrice diagonale dont tous les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose que S et D sont semblables. Calculer $\mathrm{Tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

II.2.281 **CCP 2017**

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, non nul, tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que f n'est pas inversible.
2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(f)$, $(f(x); f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Calculer la trace de f.

II.2.282 **TPE/EIVP PSI**

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$.

II.2.283 **X**

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$.

Étudier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.

II.2.284 **CCP**

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?
3. Étudier la diagonalisabilité de A_m en général.

II.2.285 **X ESPCI**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) = 0$ si et seulement s'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

II.2.286 **Mines-Ponts PSI**

Soit E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E et f un sous-espace vectoriel de E stable par u. On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

II.2.287 **CCP**

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère une matrice A symétrique réelle telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$. Étudier les valeur propres et la diagonalisabilité de A. Que peut-on en conclure ?

II.2.288 **CCP**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Reconnaître f et donner ses caractéristiques géométriques.

II.2.289 **CCP**

On définit l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A qui représente φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que A est inversible, et calculer A^{-1}.

II.2.290 **CCP PSI**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que :

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$$

II.2.291 **Mines-Ponts PSI**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe un endomorphisme g de E tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

II.2.292 **X MP MPI**

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que :

1. l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;
2. $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(q) + (\text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p))$;
3. l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;
4. le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0\,;1]$.

II.2.293 **Mines-Ponts**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant de taille n :

$$\Delta_n(a; b; c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que l'application $x \mapsto \Delta_n(a + x; b + x; c + x)$ est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Calculer $\Delta_n(a; b; c)$ en fonction de a, b, c et n.

II.2.294 **Centrale PSI**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

II.2.295 **Centrale PSI 2021**

Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?
2. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim(F) \leqslant n$.

II.2.296 **TPE/EIVP PSI**

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (x-a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

II.2.297 **Mines-Ponts PSI**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_n(\mathbb{R}), (\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(A^T A)\}$.
2. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(A^T A)\}$.

II.2.298 **Mines-Ponts PC**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques.
Montrer que $2\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A^2) + \mathrm{Tr}(B^2)$.

II.2.299 **CCP PC**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \mathrm{i}X$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

II.2.300 **CCP PSI**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.301 **Centrale PC**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit g un endomorphisme de E autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
2. Soit g un endomorphisme de E autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

II.2.302 **Mines-Ponts PSI**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leur polynôme caractéristique respectif.

1. Montrer que si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tels que $AUV^T = UV^T B$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.
3. À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

II.2.303 **CCP PSI**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. On note $(\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$ le spectre ordonné par ordre croissant de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

II.2.304 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)^2 \leqslant \mathrm{rang}(M)\mathrm{Tr}(M^2)$.
2. Caractériser par leurs valeurs propres les matrices symétriques réelles vérifiant le cas d'égalité.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive.
   (a) Montrer que M est inversible et que pour tous X et Y dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$:
   $$\langle MX, X\rangle\langle M^{-1}Y, Y\rangle \geqslant \langle X, Y\rangle^2.$$
   (b) En déduire $\inf\{\langle MX, X\rangle \cdot \langle M^{-1}X, X\rangle \mid \|X\| = 1\}$.

II.2.305 **CCP PC**

1. On définit l'endomorphisme φ de $M_n(\mathbb{R})$ par :
   $$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = 2M + M^T.$$
   Déterminer un polynôme annulateur de φ. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et
   $$\varphi_{a,b} : M \longmapsto aM + bM^T.$$
   Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

II.2.306 **ENSAM PSI**

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice J est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

II.2.307 **TPE/EIVP PSI**

Discuter, dans $M_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}.$$

II.2.308 **Centrale PSI**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id}_E - p$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

II.2.309 **Mines-Ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & & & \vdots \\ \vdots & 2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $\det(A + mI_n)$ pour chaque entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$.
2. Montrer que χ_A est un polynôme scindé.
3. Montrer que, pour toute valeur propre λ de A,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1.$$

4. Calculer la somme et le produit des valeurs propres de A.

II.2.310 **ENS MPI 2025**

Soit A et B deux matrices appartenant à $S_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \leqslant B$ si $B - A$ appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$. On considère l'application :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

Montrer que f est décroissante.

II.2.311 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $(f;g) \in E^2$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0\,;1], f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$.
3. Que vaut $F + F^\perp$?

II.2.312 **X-ENS**

Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

II.2.313 **X**

Soit $V_1, \ldots, V_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de réunion égale à $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'un des V_i est égal à $\mathbb{R}^n$.

II.2.314 **X**

Donner deux modes de description d'un plan de $\mathbb{R}^4$.

II.2.315 **X**

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

II.2.316 **X**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $(S; H) \in S_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = SH$.

II.2.317 **X MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Toutes les valeurs propres (complexes) de A sont égales à 1.
   ii) $A = \mathrm{Id} + N$ où $N^n = 0$.
2. On suppose A à coefficients rationnels. Montrer qu'il existe une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{Q})$ telle que $A = B^2$.
   Indication : on peut commencer par le cas réel.

II.2.318 **CCP MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Montrer que $P_{n+1}(X) = (X - n)P_n(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, $(-1)^{n-k}P_n(k) > 0$.
3. En déduire que chaque intervalle $]0\,;1[$, $]1\,;2[$, …, $]n-1\,;+\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

II.2.319 **ENS Ulm**

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & M_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_3(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & A^3 \end{array}$$

Déterminer l'image de Φ.

II.2.320 **ENS**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B, C trois matrices de $M_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un triplet $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ a une valeur propre double.

II.2.321 **Mines-Ponts PC**

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

II.2.322 **Mines-Ponts PC**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.
2. On considère l'équation
$$(E) : X^2 - 3X = A,$$
en la matrice inconnue X de $M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que toute solution de (E) commute avec A.
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Calculer A^n où $n \geqslant 2$.

II.2.323 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de rotation R autour de la droite D d'équation $x - y + z = x + y + z = 0$ et telle que $R(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

II.2.324 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $\text{rang}(f \circ g) = 2$.
Calculer $\text{rang}(f)$ et $\text{rang}(g)$.

II.2.325 **Mines-Télécom MP 2024**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-m \\ m-2 & 0 & 1 \\ 2m & m-2 & m-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de A en fonction de m.
2. Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2y + (2-m)z = 2-m \\ (m-2)x + z = 1 \\ 2mx + (m-2)y + (m-2)z = m-2 \end{cases}$$

II.2.326 **X FUF 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N_1, \ldots, N_n$ dans $M_n(\mathbb{C})$ nilpotentes qui commutent.
Montrer que $N_1 \cdots N_n = 0$.

II.2.327 **CCINP MP 2021**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$, un entier $n \geqslant 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & 0 & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{rang}(A) = 2$.
2. On suppose que $\operatorname{rang}(A) = 2$.
   (a) Montrer que $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$.
   (b) Donner les expressions des valeurs propres de A.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur a, b et c) pour que A soit diagonalisable.

II.2.328 **X FUF 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit encore p et q dans $\mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q \leqslant 0$. Montrer que $\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0$.

II.2.329 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2023} = A^{2024}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \operatorname{rang}(A)$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

II.2.330 **CCINP MP 2024**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_n telle que $(A + I_n)^3 = 0$.

1. Montrer que A est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit p un entier naturel. Exprimer A^p en fonction de A^2, de A et de I_n.

II.2.331 **CCINP MP 2019**

1. Montrer que le polynôme $P = X^5 + 2X + 1$ admet une unique racine réelle strictement négative.
2. Soit $A \in M_{15}(\mathbb{R})$ telle que P soit annulateur de A. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ? Montrer que $\det(A) < 0$.

II.2.332 **CCINP MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les deux matrices suivantes de $M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Écrire A, puis A^2 sous forme de combinaisons linéaires de J et I.
2. En déduire un polynôme annulateur de A. Donner son polynôme minimal π_A et ses valeurs propres possibles.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit E un espace euclidien de dimension n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $(e_1; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs de E tels que, pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et pour tout $(i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$. Montrer que $(e_1; \dots; e_n)$ est une base de E.

II.2.333 **Mines-Ponts MP 2021**

Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

II.2.334 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$.

Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

II.2.335 **Mines-Télécom MPI 2024**

1. Montrer que
$$(P; Q) \longmapsto \varphi(P; Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\varphi(X^p; X^q)$ pour tout $(p; q)$ dans $\mathbb{N}^2$.
3. Orthonormaliser la base $(1; X; X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

II.2.336 **CCINP MP 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = I_n$ et telle que la famille $\{I_n; A; A^2; \dots; A^{n-1}\}$ est libre. Démontrer que la trace de A est nulle.

II.2.337 **Mines-Ponts MP**

Soit
$$\Delta = \inf_{(x_1;\dots;x_n)\in\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t \right).$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \displaystyle\int_0^1 A(t)B(t)\,\mathrm{d}t$.

On note Q la projection de orthogonale de 1 sur $\mathrm{Vect}(\{X; \dots; X^n\})$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de $(q_1; \dots; q_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_k X^k$ et montrer que
$$\Delta = \int_0^1 (1 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t.$$
2. On pose :
$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{q_1}{X+2} + \dots + \frac{q_n}{X+n+1}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $F(k) = 0$.
   (b) En déduire que $F(0) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. Calculer Δ et $(q_1; \dots; q_n)$.

II.2.338 **CCINP MP**

Soit Φ une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même telle que
$$\Phi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'.$$

1. Vérifier que Φ stabilise $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. On admet que Φ est linéaire. Donner la matrice représentative de Φ dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
4. Supposons λ une valeur propre de Φ associée au vecteur propre P telle que $\lambda \neq 1$. Montrer que 1 est une racine de P et donner sa multiplicité.

II.2.339 **CCINP MP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\overline{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. (a) Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
   (b) On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.
3. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

II.2.340 **CCINP PSI 2021**

Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(a_0; a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

1. Calculer $\chi_C(X)$.
2. Soit φ un endomorphisme de E, où $\dim(E) = n+1$. On dit que φ est *cyclique* s'il existe $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $(x; \varphi(x); \varphi^2(x); \ldots; \varphi^n(x))$ soit une base de E. Montrer que si φ est cyclique, alors sa matrice est de la forme de C.

II.2.341 **CCINP MP 2019**

On se place dans l'espace $E = C([-1\,;1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\Phi : (f; g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On appelle $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace vectoriel des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire.
3. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
4. Déterminer l'image de f par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

II.2.342 **Centrale-Supélec MP 2022**

Le but de l'exercice est de montrer que toute matrice carrée réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit à éléments diagonaux nuls.
2. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme de E. On suppose que u admet deux valeurs propres λ et μ telles que $\lambda\mu < 0$. On considère deux vecteurs propres de u, x et y, unitaires, orthogonaux et respectivement associés à λ et μ. Montrer qu'il existe z unitaire tel que $z \in \mathrm{Vect}(\{x; y\})$ et $\langle u(z), z \rangle = 0$.
3. Montrer le résultat souhaité pour une matrice symétrique réelle.
4. Montrer le résultat souhaité pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.343 **Mines-Ponts MP 2021**

On note :

- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle ;
- $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel engendré pas les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il l'ensemble des matrices nilpotentes ?
2. Montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.
3. A-t-on $\mathcal{N} = \mathcal{H}$?

II.2.344 **CCINP MP 2018**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit encore U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer $\det(A(-1))$.
2. On note $P(x) = \det(A(a)+xU)$. Montrer que P est polynomial de degré inférieur ou égal à 1.
3. Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det(A(a))$.
4. Étudier la continuité de $a \mapsto \det(A(a))$ et retrouver la valeur de $\det(A(-1))$.

II.2.345 **CCINP MP 2025**

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On note $C_n = \det(A_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$C_{n+2} = (1+x^2)C_{n+1} - x^2 C_n.$$
2. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2, puis déterminer C_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Discuter le résultat obtenu en fonction de x.
3. Étudier l'inversibilité de la matrice A_n en fonction de la valeur de x.

II.2.346 **Mines-Télécom 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$MM^TMM^TM = I_n.$$

II.2.347 **CCINP PSI 2025**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_a de M_a.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $3\chi_a$ par χ_a'.
   (c) La matrice M_a est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
2. On suppose que λ est une valeur propre complexe de M_a telle que $|\lambda| > 1$.
   (a) Montrer que $|a| > \dfrac{|\lambda|}{1+|\lambda|} > \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la suite $((M_a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle pour a suffisamment petit.

II.2.348 **CCINP MP 2025**

Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\overline{z}.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution $z \in \mathbb{C}$ non nulle si et seulement si $|a| = |b|$.

   On suppose maintenant que $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Déterminer α et β tels que f soit diagonalisable.

II.2.349 **TPE/EIVP PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $T(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que le spectre de T est $\{0\}$. Déterminer le sous-espace propre associé. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $T^{n+1} = 0$. (On pourra comparer les degrés de $T(P)$ et P pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.)
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) = 0.$$

   (Utiliser l'endomorphisme $D = T + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.)

II.2.350 **Mines-Ponts MPI 2024**

Soit B et M deux matrices de $M_3(\mathbb{C})$ telles que $M^3 = B$. Que dire sur B et M ?

II.2.351 **CCINP PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$. On suppose que $P = X^p$ est un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que P est annulateur de $A^T A$.
2. En déduire que $A = 0$.

II.2.352 **Mines-Ponts PSI 2022**

Soit $(a_0; a_1; \dots; a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer χ_A.
2. Montrer que :

$$A \text{ est diagonalisable } \iff \chi_A \text{ est scindé à racines simples.}$$

   Pour le sens direct, on montrera l'implication par deux méthodes différentes.

II.2.353 **CCINP PSI**

On note $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$. On définit sur E le produit scalaire :

$$\forall (f; g) \in E^2,\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note :

- $\mathcal{V} = \{f \in E \mid f'' = f\}$,
- $\mathcal{W} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$,
- $\mathcal{H} = \{f \in E \mid f(0) = \cosh(1) \text{ et } f(1) = 0\}$.

1. Montrer que $\{\cosh; \sinh\}$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Montrer que, pour tout $(f; g) \in \mathcal{F} \times E$:

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0).$$

   Calculer $\langle \cosh, \sinh \rangle$, $\|\cosh\|^2$ et $\|\sinh\|^2$.
3. Montrer que pour tout $(f; g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, $\langle f, g \rangle = 0$.
4. Soit $f \in \mathcal{H}$.
   Calculer $\langle f, \cosh \rangle$ et $\langle f, \sinh \rangle$.
   En déduire les composantes dans la base $(\cosh; \sinh)$ de la projection orthogonale $\prod_{\mathcal{V}}(f)$ sur $\mathcal{V}$.
5. Calculer :

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} \int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

II.2.354 **ENSEA/ENSIIE MP 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Calculer $\exp(A)$.

II.2.355 **Mines-Ponts PC 2025**

Soit $(A; B) \in M_n(\mathbb{C})^2$.
On suppose qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $AB = \alpha A + \beta B$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

II.2.356 **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que A^2 est diagonalisable. Montrer que ses valeurs propres sont négatives ou nulles. En déduire des informations sur A.
2. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale des zéros et des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

II.2.357 **Mines-Ponts MP 2024**

Déterminer la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les racines cinquièmes de l'unité.

II.2.358 **CCINP PC 2022**

Pour toute matrice M de $M_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\|_\infty = \max\left\{|m_{ij}| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant d\right\}.$$

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2, puis les autres puissances de N.
3. Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_d(\mathbb{C})$.
5. Pour tout couple $(M; N)$ de matrices de $M_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d\|M\|_\infty\|N\|_\infty.$$

6. On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

II.2.359 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer qu'il existe $p \leqslant 4$ entier tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
2. On suppose que $p = 4$. Montrer que A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.360 **CCINP MP 2021**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit encore u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
2. On suppose $n \geqslant 2$, où n est tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une base e de E telle que la matrice A de u dans la base e est de la forme
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Résoudre l'équation $X^2 = A$, avec $X \in M_n(\mathbb{K})$.

II.2.361 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\det(\lambda A^2 + I_n) \geqslant 0$.
2. On suppose maintenant que A est antisymétrique.
   Montrer que le résultat précédent est alors valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.2.362 **CCINP MP 2022**

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.
2. (a) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\mathrm{rang}(M) = 4$.
   (b) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rang}(M) = 2$.
3. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de M ?
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

II.2.363 **CCINP PC 2017**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1. Calculer M^2.
2. Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II.2.364 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

II.2.365 **CCINP MP 2017**

Considérons l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Démontrer que E est un espace vectoriel. Trouver la dimension de E.
   (On pourra utiliser l'application $u \mapsto (u_0; u_1; u_2)$.)
2. Déterminer les solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. En déduire une base de E.
3. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{2}{3}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}2^n \\ \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - \frac{4}{3}2^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}2^n \end{pmatrix}.$$

4. On fixe $(u_0; u_1; u_2) \in \mathbb{R}^3$, définissant une suite u de E.

   Calculer $A \cdot U_0$, où $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

   En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que de u_0, u_1 et u_2.

II.2.366 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \neq 0$.

II.2.367 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$. Montrer que $A = B$. Est-ce toujours vrai si A et B ne sont pas diagonalisables ?

II.2.368 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Soit F un plan vectoriel stable par f. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

II.2.369 **ENSAE MP 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme n'ayant que E et $\{0\}$ pour seuls sous-espaces vectoriels stables.

1. Montrer que u ne possède pas de valeur propre.
2. En déduire que $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, la famille $(x; u(x); u^2(x); \ldots; u^{n-1}(x))$ est une base de E.
4. Comment est la matrice de u dans cette base ?

II.2.370 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E et $P = \chi_f$.

1. Montrer que si P est irréductible, alors les seuls sous-espaces stables par f sont E et $\{0_E\}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

II.2.371 **CCINP PSI 2024**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P admet n racines. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

II.2.372 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k).$$

1. Les matrices A et B sont-elles nécessairement semblables ?
2. Traduire par une condition sur les valeurs propres de A et B l'hypothèse de l'exercice.
3. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

II.2.373 **Mines-Télécom MP 2019**

On note P_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0; 1\}$, telles qu'il n'y a qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que toute matrice P_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

II.2.374 **CCINP PSI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}(u) = n$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle u a pour matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rang}(u) = 2n$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle u a pour matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

II.2.375 **CCINP MP 2022**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A_2^n et A_1^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.376 **Mines-Ponts MP 2021**

1. Montrer que si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E, alors il existe une forme linéaire φ non nulle de E telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

II.2.377 **Centrale-Supélec MP 2021**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente.
   Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente.
   Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.
   Montrer que $\mathrm{Tr}(M) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

II.2.378 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det(AB - I_n) = \det(BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
   Indication : on pourra considérer la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par $A_p = A - \frac{1}{p} I_p$.

II.2.379 **Mines-Ponts MP 2022**

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \geqslant 2$, calculer le déterminant $n \times n$:

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z - \dfrac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z - \dfrac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z - \dfrac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z - \dfrac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

II.2.380 **CCINP PC 2023**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(P(X) - P(1-X)) \end{array}$$

1. Calculer φ^2.
2. Démontrer que :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\left\{X - \tfrac{1}{2}; \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^3\right\}\right) \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\left\{1; \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2\right\}\right).$$

3. Montrer que φ est un projecteur et en identifier les éléments géométriques.

II.2.381 **CCINP PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p et q deux endomorphismes de E tels que :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rang}(p) + \mathrm{rang}(q) \leqslant n.$$

Montrer que p et q sont des projecteurs.

II.2.382 **CCINP PSI 2024**

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. On suppose que $A \in M_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

II.2.383 **Mines-Télécom MP 2024**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation $x + 2y + z = 0$.
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

II.2.384 **CCINP PC 2023**

1. On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, stable par produit. Donner la dimension de F.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 ne contenant pas I_n et stable par produit.
   (a) Rappeler la valeur de $E_{ij} \cdot E_{kl}$ avec $i, j, k, l \in [\![1\,, n]\!]$.
   (On rappelle que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice $(i; j)$ qui vaut 1.)
   (b) Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(\{I_n\})$.
3. (a) Soit $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$ et $p : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\{I_n\})$ parallèlement à F.
   Montrer que $p(MM') = p(M)p(M')$.
   (b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.
4. Déduire des questions précédentes que $E_{ij} \in F$ pour tout $(i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2$, puis conclure.
5. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$. Est-il stable par produit ?

II.2.385 **TPE/EIVP MP 2018**

Calculer le déterminant de la matrice $A = \Big(\sin(i+j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

II.2.386 **Mines-Télécom PC 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Trouver les éléments propres de A.
Indication : calculer $\mathrm{Tr}(A^2)$.

II.2.387 **Centrale-Supélec TSI 2021**

Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Déterminer les endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\mathrm{Im}(f) = P$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset P$.

II.2.388 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^3 + f = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.389 **CCINP PSI 2022**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E tel que la matrice de f dans toute base de E soit égale à une même matrice A.

1. Montrer que, pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $PA = AP$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $AB = BA$.
   (c) Montrer que f est une homothétie.

II.2.390 **CCINP PC 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J.
2. Montrer qu'il n'existe pas de forme linéaire φ de $M_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{C})$, le nombre $\varphi(M)$ est une valeur propre de M.

II.2.391 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^T A$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

II.2.392 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons une application linéaire f de E dans F.

1. Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
   Démontrer que ce sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à $\{0_E\}$.

II.2.393 **CCINP TSI 2019**

Soit A_{2n} la matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_{2n} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } j = 2n+1-i \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner A_2 et A_4.
2. On note $\Delta_{2n} = \det(A_{2n})$.
   Calculer Δ_2 et Δ_4.
3. Calculer Δ_{2n} si $a = 0$.
4. Calculer Δ_{2n} si $a \neq 0$.

II.2.394 **CCINP PC 2017**

Soit $M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a;b;c) \mid (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0;1;0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a;b;c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a;b;c)$. Donner des conditions portant sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur. Donner alors son image et son noyau.

II.2.395 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{pmatrix}.$$

II.2.396 **CCINP MP 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$.

1. À quelles conditions sur $(a;b;c)$, la matrice M est-elle la matrice d'une isométrie vectorielle directe ?
2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ab + ac + bc$, et on donne l'identité suivante :

   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 2(ab + ac + bc)(a + b + c)^2.$$

   Traduire le système de la question 1 avec α et β.
3. Montrer l'équivalence suivante :
   La matrice M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $k \in \left[0\,;\frac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.
4. On suppose que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ et que $M \neq I_3$. La matrice M est donc la matrice canoniquement associée à une rotation de l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté, notée r. Déterminer l'axe D de la rotation r.
5. Orienter l'axe D et déterminer l'angle de r.

II.2.397 **ENS MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A + A^T = I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

II.2.398 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a_1; \dots ; a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \Big(|a_i - a_j|\Big)_{(i;j)\in[\![1\,,n]\!]} \in M_n(\mathbb{R})$.
Calculer $\det(A)$.

II.2.399 **ENSEA/ENSIIE MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique scindé et P un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que la matrice $P'(A)^2 - P(A)P''(A)$ est inversible.

II.2.400 **CCINP PC 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

1. Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff S = \pm 1$ et $\sigma = 0$.
2. Préciser une condition pour A appartienne à SO_3.

II.2.401 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit M la matrice carrée antidiagonale réelle de taille $2n$, d'éléments antidiagonaux $a_1, a_2, \dots , a_{2n}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

II.2.402 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

II.2.403 **Mines-Ponts PC 2023**

On fixe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

1. Trouver un nombre réel θ tel que $M^3 = -\theta M$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $M^{2n} = (-\theta)^{n-1} M^2$.
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée S_∞.
4. Trouver deux nombres réels α et β tels que $S_\infty = I_3 + \alpha M + \beta M^2$.

II.2.404 **CCINP PSI 2023**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$, $A \neq I_2$ et A inversible.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Montrer que A est une matrice orthogonale.
4. Calculer $\det(A)$.
5. Déterminer les matrices A.

II.2.405 **Mines-Ponts PC 2018**

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? dans $M_2(\mathbb{C})$? Déterminer ses éléments propres.
2. On pose $z_n = 1 + \dfrac{\mathrm{i}\alpha}{n}$ et $u_n = (z_n)^n$.
   (a) Montrer que z_n possède un argument θ_n dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Trouver un équivalent de θ_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II.2.406 **Centrale-Supélec PC 2022**

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

II.2.407 **Mines-Ponts MP 2018**

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et on prend $M \in M_n(\mathbb{C})$. A-t-on l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) M est diagonalisable ;
ii) $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(M) \in \mathcal{N} \implies P(M) = 0$?

II.2.408 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer sans calculs :
   (a) l'image et le noyau de A (exhiber une base) ;
   (b) les espaces propres de A (trouver les valeurs propres et une base pour chaque sous-espace).
2. Diagonaliser la matrice A.

II.2.409 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\exists M > 0,\, \forall n \in \mathbb{Z},\, \|A^n\|_\infty \leqslant M.$$

Montrer que A est diagonalisable.

II.2.410 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -a & 4+a & -(1+a) \\ 4+a & 1+a & a \\ 1+a & -a & -(4+a) \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A appartienne à $SO_3(\mathbb{R})$.
2. Quel est l'endomorphisme associé à A dans ce cas ?

II.2.411 **CCINP PSI 2017**

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments deux à deux distincts d'un corps (commutatif) $\mathbb{K}$.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $M = P(D)$.

II.2.412 **CCINP PSI 2016**

Une *matrice à diagonale propre* est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note ε_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.
2. Soit la matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   Est-ce que A est une matrice à diagonale propre ?
3. Soit A appartenant à ε_n antisymétrique.
   (a) Donner les valeurs propres de A.
   (b) Montrer qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.
   (c) Calculer $(A^T A)^p$ et en remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$.
   (d) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
   (e) Soit F un sous-espace vectoriel de ε_n. Montrer que $\dim(F) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

II.2.413 **ENS MP 2024**

Déterminer les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables à $2M$.

II.2.414 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & -A + \mathrm{Tr}(A) I_n \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le spectre de φ.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Est-ce que φ est diagonalisable ?

II.2.415 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est une matrice de projection.
2. Montrer que $BA = I_2$.

II.2.416 **X MP 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda \leqslant \mu$ les valeurs propres de A.

Montrer que $\lambda \leqslant a \leqslant \mu$.

II.2.417 **CCINP PSI 2024**

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^T = M^T M$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(M^T M) \subset \{-2; 2\}$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^T M)$, $\lambda \geqslant 0$. En déduire $\mathrm{Sp}(M^T M)$.
4. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M$ est orthogonale.
5. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M$ est la matrice d'une rotation d'angle θ à déterminer.
6. Déterminer toutes les matrices M possibles.

II.2.418 **Mines-Télécom MP 2021**

On note $E = C([0\,;1])$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $H = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal sur H de la fonction $g : x \mapsto x$.

II.2.419 **Mines-Ponts PC 2019**

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, expliciter $\Delta^p(u)$.

II.2.420 **CCINP MP 2017**

1. Démontrer que l'application $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(P; Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

   est un produit scalaire.
2. Calculer $\phi(X^p; X^q)$ pour tous p et q entiers naturels.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

II.2.421 **Mines-Télécom PC 2021**

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

   Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau de M.
2. Toujours sans calcul, diagonaliser la matrice M.

II.2.422 **X MP 2016**

On définit sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel un « pseudo produit scalaire » par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer alors l'équivalence des propriétés suivantes :

i) M est diagonalisable dans une base « pseudo orthonormée » ;

ii) $\exists (y; z) \in \mathbb{C}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in]0\,; 2\pi[$ tels que

$$M \text{ est diagonale ou } M = \begin{pmatrix} y & z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & y + \mu z \end{pmatrix};$$

iii) $\overline{M^T} M = M \overline{M^T}$.

II.2.423 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit A une matrice symétrique réelle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.
Montrer que $A^2 = I_n$.

II.2.424 **CCINP MP 2021**

Soit m un entier supérieur ou égal à 3. On définit le produit scalaire suivant : si $X, Y \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y\rangle = X^T Y$. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ est dite de *type* n lorsque $A^T = A^n$.

1. Comment appelle-t-on une matrice de type 1 ?

   Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $N(x)$ suivante :

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que pour tout $k > 0$, $N(x)^k = N(kx)$.

   (b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $N(x)$ est une matrice de type n.

   Pour la suite, on prendra $m = 3$.

   Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice de type n. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = A^{n+1}$.

   (c) Montrer que $A^{n^2} = A$.

   (d) Montrer que $B^n = B$ puis que B est symétrique. Quelles sont les valeurs possibles de B ?

   (e) Montrer que -1 ne peut pas être valeur propre.

II.2.425 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Soit $a > 0$.

   On définit une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives). Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

II.2.426 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit f un endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Tr}(f(I_2)) = 0$ et pour toute matrice N nilpotente, $f(N) = 0$. Montrer que f est nilpotente.

II.2.427 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ un matrice de projection. Considérons l'application

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PM + MP \end{array}$$

1. Démontrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$f^2(M) = PM + 2PMP + MP.$$

2. Démontrer que f est diagonalisable.
3. Déterminer la trace de f en fonction de n et du rang de P.

II.2.428 **CCINP PSI 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et le système (S) $\begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \mathrm{Tr}(M) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que si M vérifie (S), alors les valeurs propres de M sont les racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.
2. Déterminer toutes les matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient (S).

II.2.429 **Mines-Télécom MP 2022**

On considère l'application

$$u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{array}$$

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et exprimer son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

II.2.430 **Mines-Ponts MP 2014**

Déterminer toutes les matrices A et B telles que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AMB) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(M)\,?$$

Indication : commencer par le cas $B = I_n$.

II.2.431 **CCINP MP 2024**

Soit u l'application de $M_3(\mathbb{C})$ qui à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$ associe la matrice $\begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres associés à l'endomorphisme u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de u.

II.2.432 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit

$$T \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Déterminer les éléments propres de T.

II.2.433 **Mines-Ponts MP 2019**

On note $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{O_n\}$.

1. L'ensemble A est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$, contenu dans A ?
3. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}$? On s'intéressera surtout au cas $n = 2$.

II.2.434 **CCINP MP 2017**

Considérons l'application $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $T(M) = M^T$.

1. Étudier le rang de T.
2. Donner la matrice de T.
3. Déterminer le déterminant de T et sa trace.
4. Étudier la diagonalisabilité de T.
5. Que peut-on dire de la matrice $M + M^T - 2I_n$ si $M \in M_n(\mathbb{R})$?

II.2.435 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{com}(A)$ sa comatrice. On suppose que A est inversible. Déterminer le spectre de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.

II.2.436 **Mines-Ponts MP 2025**

Montrer que pour tout $A \in \mathbb{C}$,

$$A^2 = A \iff \mathrm{rang}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{rang}(I_n - A) \leqslant \mathrm{Tr}(I_n - A).$$

II.2.437 **Centrale-Supélec 2017**

1. Rappeler le théorème du rang.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que l'on a $f^{n-1} = 0$ et $f^{n-2} \neq 0$.
   Montrer que, pour tout $0 < k < n$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) = k + 1$.
3. Montrer qu'il existe une base de E telle que l'écriture matricielle de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.438 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

II.2.439 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ tel que :

- $f(N) = 0$ pour toute matrice nilpotente N ;
- $\mathrm{Tr}(f(I_2)) = 0$.

Montrer que $f \circ f = 0$.

II.2.440 **CCINP MP 2021**

1. (a) Déterminer trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   - $A(-1) = 1$, $A(0) = 0$, $A(1) = 0$,
   - $B(-1) = 0$, $B(0) = 1$, $B(1) = 0$,
   - $C(-1) = 0$, $C(0) = 0$, $C(1) = 1$.

   (b) Montrer que $(A; B; C)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ v(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C.$$

   (a) Montrer que $\mathrm{rang}(v) \leqslant 3$. Qu'en déduit-on sur $\mathrm{Ker}(v)$?

   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(v)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

II.2.441 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On définit une application $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ u(P)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n.$$

1. Montrer que u est bien définie et que u est un automorphisme.
2. Donner les valeurs propres de u.

II.2.442 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $S = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre n.

1. Pour tout $(x_1; \ldots; x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$, montrer que :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

2. En déduire que :

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{\mathrm{Tr}(S)}{n}\right)^n.$$

3. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $a_{ii} > 0$.
4. On note $D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}; \ldots; \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$ et $A = DSD$.

   (a) Montrer que A est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que $\det(S) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

II.2.443 **Centrale-Supélec MP 2017**

Soit G l'ensemble des matrices $M(a)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a \text{ réel.}$$

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?
2. Qu'est-ce que $M(0)$ géométriquement. Déterminer $\mathrm{Ker}(M(0))$ et $\mathrm{Im}(M(0))$.
3. Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.444 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A^2 = -I_n \implies \det(A) = 1.$$

II.2.445 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } AB = BA = 0.$$

2. Montrer que :

$$\det(A) = 0 \iff \exists B \neq 0 \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{N}^*, (A+B)^k = A^k + B^k.$$

II.2.446 **CCINP MP 2021**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\varphi : (f;g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left|\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (P(t))^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}.$$

II.2.447 **CCINP PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rang}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$.
2. Quelles déductions peut-on faire sur les valeurs propres de A ?

II.2.448 **CCINP PC 2024**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $a, b \in E$.
On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \langle a, x\rangle b \end{array}$$

Montrer que f est bijective si et seulement si $\langle a, b\rangle \neq 0$.

II.2.449 **CCINP PC 2024**

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On suppose que A et B sont des matrices réelles symétriques telles que $A^2 = B^2$. On admet que, pour toute matrice diagonale, $\operatorname{rang}(D) = \operatorname{rang}(D^2)$. L'objectif de l'exercice est de montrer l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $PA = B$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T AX = (BX)^T BX.$$
2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Montrer que A est inversible. Montrer alors que BA^{-1} est orthogonale.
   (b) Conclure.
3. On suppose maintenant que 0 est valeur propre de A, de multiplicité p.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A^2)$. En déduire que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}((B)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ et en déduire que 0 est valeur propre de B. Préciser sa multiplicité.

II.2.450 **CCINP MPI 2025**

On note T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - 5X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de $T(X^n)$ pour tout entier naturel n. Calculer $T(X^k)$ pour $k = 0, \ldots, 4$.
2. Montrer que si P est colinéaire à $T(P)$, alors P est de degré 3.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?
4. Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_3[X]$, notée T_1, définit un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de T_1 dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de T_1 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

II.2.451 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit $a > 0$ fixé. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que M admet une unique valeur propre réelle r.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \mathrm{Tr}(M^n)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{r^n}$.

II.2.452 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

II.2.453 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et F une matrice réelle symétrique de taille n. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha\,;\alpha],\ \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \mathrm{Tr}\Big(F^k\Big)\right) = \det\Big((I_n - tF)^{-1}\Big).$$

II.2.454 **ENS MP 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ est de rang 1. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

II.2.455 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que, pour tout $k \in [\![0\,,2n]\!]$, $A+kB \in GL_n(\mathbb{Z})$. Quelle est la valeur de $|\det(A)|$? de $\det(B)$?

II.2.456 **CCINP PC 2017**

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Les matrices A_n sont-elles inversibles pour tout $n \geqslant 1$?

II.2.457 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On définit $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & B & A \\ A & B & B \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M.
2. Calculer M^{-1}, lorsqu'elle existe, en fonction de A^{-1} et de $(B-A)^{-1}$.

II.2.458 **Mines-Ponts PC 2022**

On considère une famille $\mathcal{F} = \{F_1; \dots; F_p\}$ d'éléments de $M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ et une famille $\mathcal{G} = \{G_1; \dots; G_n\}$ d'éléments de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
Pour tout $i \in \{1; \dots; p\}$ et pour tout $j \in \{1; \dots; n\}$, on pose $M_{ij} = F_i \times G_j^T$.

1. Montrer que la famille $\{M_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de $M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}$ est une base de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
2. Soit un entier $r \leqslant \min(p; n)$. Déterminer le rang de la matrice $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} M_{k,k}$.

II.2.459 **Mines-Télécom MP 2023**

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?

II.2.460 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{Tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

II.2.461 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0\,;1]$ à valeurs réelles. On pose $\phi : f \mapsto F$, avec

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour } x \neq 0$$

et $F(0) = f(0)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

II.2.462 **Mines 2023**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

II.2.463 **Mines**

On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que C est diagonalisable.

II.2.464 **Mines 2024**

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}(A) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

II.2.465 **Mines 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^{p+2} = M^2$ et que $\mathrm{Tr}(M) = n$.
Déterminer M.

II.2.466 **Mines 2024**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A, χ_{A^2} et χ_{-A}.

II.2.467 **Mines 2024**

Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
Quel est le rang de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

II.2.468 **Mines 2022**

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |b_{ij}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rang}(B)}.$$

II.2.469 **CCP 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T A$.

1. Montrer que, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathrm{Ker}(A^2 - \mu^2 I_n) = \mathrm{Ker}(A - \mu I_n) \oplus \mathrm{Ker}(A + \mu I_n).$$

2. En déduire le polynôme caractéristique de A, et discuter le caractère diagonalisable de A.

II.2.470 **Centrale 2022**

On note $N_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in N_n(\mathbb{C})$, on désigne par $d(M)$ l'indice de nilpotence de M. On note enfin $\mathbb{C}[M]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en M.

1. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathbb{C}[N]$ est un espace vectoriel de dimension $d(N)$.
2. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N + I_n \in GL_n(\mathbb{C})$, puis que $N^2 + 2N \in N_n(\mathbb{C})$ avec $d(N^2 + 2N) = d(N)$.
3. Montrer que $\phi : N \mapsto N^2 + 2N$ réalise une injection de $N_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

II.2.471 **Mines 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un endomorphisme de E est une transvection lorsque :

$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n + \lambda E_{ij}$$

pour une certaine base $\mathcal{B}$ de E, un certain $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in \{1; \ldots ; n\}$ distincts.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) u est une transvection ;

ii) $\operatorname{rang}(u - \mathrm{Id}) = 1$ et $(u - \mathrm{Id})^2 = 0$.

II.2.472 **Mines 2024**

On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$ ainsi que :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors il en est de même pour :

$$C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}.$$

II.2.473 **ENS 2023**

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A : M \mapsto AM$.

1. Montrer que $|||\varphi_A||| \leqslant \|A\|_2$.
2. Donner une sous-algèbre stricte de $M_n(\mathbb{R})$ stable par transposition.
3. On définit la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (M_1; M_2) \in M_p(\mathbb{R}) \times M_q(\mathbb{R}),\ p + q = n \right\}.$$

   On admet que $B = \{\varphi_A \mid A \in \mathcal{S}\}$ est une sous-algèbre de $L(M_n(\mathbb{R}))$. Décrire l'ensemble des endomorphismes de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les éléments de B.

II.2.474 **CCP 2023**

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\exp(A)$.
4. Montrer que A est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Trouver une autre méthode pour calculer A^n.

II.2.475 **CCP 2023**

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer le polynôme minimal et les valeurs propres de A. En déduire le polynôme caractéristique de A.

II.2.476 **Centrale 2022**

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ et $\tau_A : M \mapsto MA - AM$.

1. On suppose que A est nilpotente. Montrer que $\mathrm{Ker}(\tau_A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.
2. On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A = BA - AB$.
   Calculer $BP(A) - P(A)B$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que A est nilpotente.
3. Caractériser les hyperplans H de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Im}(\tau_A) \subset H$. En déduire l'existence de $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = BA - AB$.
4. Montrer que $A\exp(I_n + B) = \exp(B)A$.

II.2.477 **Mines 2024**

Soit $n \geqslant 1$ entier. On considère le produit scalaire suivant sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On se donne $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et pour $P \in E$, on pose :

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} \Pi(x+t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est auto-adjoint et bijectif.
2. On considère une base orthonormée $(P_0; \dots; P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, chaque P_i étant associé à la valeur propre λ_i. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\Pi(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)P_k(y).$$

II.2.478 **Mines 2024**

1. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$?
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$?
3. Même question que la première avec une semi-norme.

II.2.479 **Mines 2023**

Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.
On considère $b \in \mathbb{C}$ vérifiant $|b| < 1$, et $f : P \mapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est continue pour $\|\cdot\|$.
3. Déterminer $|||f|||$ sous réserve d'existence.

II.2.480 **Mines 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $x \in E$:

$$N(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right|}{\sum_{k=1}^{n} t^{2k-2}}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer N et $\|\cdot\|_2$.

II.2.481 **Centrale 2022**

1. Montrer que si $U \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors U admet une unique racine carrée.
2. Montrer que si $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}(UV) \geqslant 0$.
3. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
   On considère une fonction dérivable $f : I \to M_n(\mathbb{R})$ ainsi que $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathrm{Tr} \circ P \circ f$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

II.2.482 **Mines 2024**

Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$:

$$f(v) \in S \quad \text{et} \quad v - f(v) \in S^\perp.$$

Montrer que S est un espace vectoriel et que f est la projection orthogonale sur S.

II.2.483 **Centrale 2023**

Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme de E.

1. Établir l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.
2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   i) $\exists c \geqslant 0, \forall x, y \in E, \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$;
   ii) $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.
3. Trouver tous les endomorphismes u de E tels que $u(V^\perp) \subset u(v)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

II.2.484 **CCP 2023**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f \neq 0$ et $f^3 = -f$. On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.
2. Soit $v \in G \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que $(v; f(v))$ est une base de G.
3. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.485 **Mines 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. On pose :

$$G = \{u \in L(E) \mid u \circ f = f \circ u,\ u^2 \circ f = f,\ \exists p \in \mathbb{N}, f^{p+1} \circ u = f^p\}.$$

1. Soit $u \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $u^{k+1} \circ f^k = u$.
2. Soit $u, v \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $u^k \circ f^{k+1} \circ v$ et $v \circ f^{k+1} \circ u^k$.
3. En déduire que G possède au plus un élément.

II.2.486 **CCP 2024**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On considère $f, g \in L(E)$ telles que :

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

L'objectif est de montrer que f est nilpotente de trois manières différentes.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
   (b) Conclure en étudiant l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ h & \longmapsto & h \circ g - g \circ h \end{array}$$

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P(f)$, puis conclure.
3. (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$.
   (b) Montrer que f ne possède qu'une seule valeur propre, puis conclure.

II.2.487 **Mines 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $p < n$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in GL_p(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que l'application $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto Y$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(M)$ vers $\mathrm{Ker}(D - CA^{-1}B)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{rang}(M) = p$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On pose $p = \max\limits_{M \in V} \mathrm{rang}(M)$.
   On souhaite majorer $\dim(V)$.
   (a) Montrer que l'on peut supposer $J_p \in V$, condition que l'on supposera vérifiée pour la suite.
   (b) On pose $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \,\middle|\, (B; D) \in M_{n-p \times p}(\mathbb{R}) \times M_{n-p \times n-p}(\mathbb{R}) \right\}$.
   Étudier $V \cap W$.

II.2.488 **Mines 2022**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $f : x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale et donner son degré.

II.2.489 **Mines 2024**

Soit $\alpha > 0$ et $u \in L(\mathbb{C}^n)$. Montrer qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tous $i, j \in \{1; \ldots ; n\}$:

$$i \neq j \implies \left| \left((u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right)_{ij} \right| \leqslant \alpha.$$

II.2.490 **Mines 2022**

Trouver une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - M = I_n$. Montrer que M vérifie nécessairement $\det(M) > 0$.

II.2.491 **X 2022**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) B est nilpotente et $BA = 0$

ii) $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM} = \chi_{AM+B}$

II.2.492 **X 2023**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
On considère $a, b \in L(E)$ et on pose $[a\,, b] = ab - ba$. On suppose que $[a\,, b] = f \circ v$, où $f \in L(\mathbb{C}, E)$ et $v \in L(E, \mathbb{C})$ vérifient $v \circ f = 0$.

1. Calculer $\det([a\,, b])$.
2. Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

II.2.493 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit E un espace euclidien et x, y deux vecteurs non nuls de E. Quelle(s) condition(s) y a-t-il sur x et y pour que le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(\{y\})$ soit égal au projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(\{x\})$?

II.2.494 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On étudie l'application qui à une suite u associe la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + (n+1)u_n}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que si u converge, alors $f(u)$ converge également. Préciser sa limite.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
4. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites bornées. On le munit de la norme infinie. Montrer que F est stable par f, que f est continue pour la norme considérée et préciser sa norme subordonnée.

II.2.495 **Mines-Télécom MP 2023**

On pose $E = C([0\,;1])$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose :

$$\forall f \in E,\ u(f)(x) = \int_0^1 \inf(x; t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|||u|||$.

II.2.496 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Résoudre $B^3 = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$, puis dans $M_2(\mathbb{C})$.
3. Résoudre $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

II.2.497 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.498 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

II.2.499 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme orthogonal de E (i.e. tel que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$). On considère $v = \mathrm{Id}_E - u$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^\perp$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont des supplémentaires orthogonaux.
2. Soit p le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Ker}(v)$.
   (a) Montrer que $p \circ u = u \circ p = p$.
   (b) Pour tout $x \in E$, montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $p(x) = x + u(y) - y$.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \in E,\ p(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \right).$$

II.2.500 **Mines-Télécom MP 2018**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(b_1; \ldots; b_n) \in \mathbb{C}^n$.
On pose : $A = (a_i b_j)_{(i;j) \in \{1;\ldots;j\}^2} \in M_n(\mathbb{C})$.
Dans quels cas la matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer alors ses éléments propres.

II.2.501 **CCINP MP 2018**

On cherche à déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^4 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

1. Montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.
2. Conclure.

II.2.502 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(A)$.

II.2.503 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^3.

II.2.504 **CCINP MP 2025**

Soit E un espace vectoriel de dimension 4.

1. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
2. Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme minimal s'écrive : $P(X) = (X^2+1)(X^2+4)$. Montrer qu'il existe x, y non nuls dans E tels que $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. Montrer que la famille $(x; f(x); y; f(y))$ est une base de E.
4. Exprimer la matrice canoniquement associée à f dans cette base.

II.2.505 **Mines-Ponts MPI 2025**

1. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $M^3 + M + I_n = 0$.

II.2.506 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha\,;\alpha],\ \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \mathrm{Tr}\Big(F^k\Big)\right) = \det\Big((I_n - tF)^{-1}\Big).$$

II.2.507 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

II.2.508 **CCINP MP 2025**

On définit les deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi que $C(N) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid NM = MN\}$.

1. Montrer que $C(N)$ est un espace vectoriel. Déterminer-le.
2. Montrer que N est un polynôme de degré 2 en T.

   On définit $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid M^8 = T\}$.
3. Montrer que pour tout $M \in E$, M est un polynôme en N.
4. Déterminer E.

II.2.509 **CCINP MPI 2025**

On note T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P + (X^2 - X)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1. Déterminer l'expression et le degré de $T(X^n)$ pour tout en entier naturel n. Calculer $T(x^k)$ pour $k = 0, \dots, 4$.
2. Montrer que si P est colinéaire à $T(P)$, alors P est de degré 3.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?
4. Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_3[X]$, notée T_1, est un endomorphisme sur cet espace vectoriel. Donner la matrice de T_1 dans une base choisie.
5. Donner une base de diagonalisation de T_1 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

II.2.510 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on nécessairement $BABA = 0$?

II.2.511 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Montrer qu'il existe deux matrices nilpotentes N_1 et N_2 telles que $A = N_1 + N_2$.

II.2.512 **Mines-Télécom MP 2021**

On note $(e_1; \dots; e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in S_n$, on note f^σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $f^\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Enfin, on pose :

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f^\sigma.$$

1. Soit $(\sigma; \tau) \in S_n^2$. Calculer $f^\sigma \circ f^\tau$.
2. Montrer que l'application $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection de S_n.
3. Montrer que p est un projecteur.

II.2.513 **X ESPCI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition existe-t-il deux matrices A et B diagonalisables, de rang 1, telles que $M = A + B$?

II.2.514 **CCINP MP 2021**

Résoudre le système suivant d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m :

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$

II.2.515 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent. On suppose qu'il existe $n+1$ réels deux à deux distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ tels que, pour tout i entre 1 et $n+1$, la matrice $C_i = A + t_i B$ soit nilpotente. Montrer que les matrices A et B sont nilpotentes.

II.2.516 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(M) \text{ est nilpotent}\}$.
Déterminer I.

II.2.517 **CCINP PSI 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

II.2.518 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$.
Montrer que A et $-A$ sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

II.2.519 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. On pose :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \cdot A - \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \cdot P.$$

1. Montrer que $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

II.2.520 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $\dim(E) = 2$, montrer qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
2. On revient au cas général et on suppose l'existence d'un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que f n'admet pas de valeur propre et que $\dim(E)$ est paire.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(\{x; f(x)\})$ est stable par f.
   (c) En posant $\dim(E) = 2p$, montrer qu'il existe une famille de vecteurs de E, $\{e_1; \dots; e_p\}$, telle que $\{e_1; f(e_1); \dots; e_p; f(e_p)\}$ est une base de E.

II.2.521 **Mines-Télécom MP 2018**

On donne les deux matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont-elles semblables ?

II.2.522 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que, pour tous $i, j \in [\![1\,, n]\!]$ tels que $i \neq j$, $\|e_i - e_j\|$=1. Démontrer que $(e_1; \dots; e_n)$ est une base de E.

II.2.523 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit r et s deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que si les axes de r et s sont identiques, alors r et s commutent.
2. Montrer que si r et s sont des rotations d'angles π et d'axes orthogonaux, alors r et s commutent.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que r et s commutent.

II.2.524 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

Soit M une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4 = 0$. Montrer que $M^3 = 0$.

II.2.525 **CCINP MP 2023**

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs x et y de E, $\langle x, y\rangle$. On fixe deux vecteurs non nuls u et v de E.

1. Pour tout vecteur x de E, on pose : $(u \otimes v)(x) = \langle v, x\rangle u$.
   (a) Justifier que $u \otimes v$ est linéaire et donner son rang.
   (b) Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$.
   (c) L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.
3. Soit g un endomorphisme de E. On note $g^\star$ son adjoint. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^\star(v) = \alpha v$.

II.2.526 **Mines-Télécom MP 2023**

1. Rappeler le théorème spectral.
2. On munit $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $A + A^T$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

II.2.527 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \forall j \in [\![1\,,n]\!],\ a_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Étudier la diagonalisabilité de A et donner ses éléments propres.

II.2.528 **CCINP MP 2023**

Soit a, b, c, d, e, f des réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est trigonalisable.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour la matrice A soit diagonalisable.
3. Dans ce cas, trouver une base de vecteurs propres.

II.2.529 **CCINP PSI 2024**

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour tout k entier naturel compris entre 1 et n, on pose $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $\{f_1; \ldots; f_n\}$ est libre.
3. Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β, γ.
4. Résoudre le système suivant, composé de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$$

II.2.530 **Mines-Ponts MPI 2023**

Soit $n \geqslant 2$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$. Notons :

$$\mathcal{E} = \{\|X\| \mid X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Tr}(X^T S X) = 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un maximum si et seulement si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le maximum de $\mathcal{E}$ si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2.531 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ admettant une unique valeur propre λ.

1. Montrer que $A - \lambda I_n$ est nilpotente.
2. Soit le système différentiel $(E) : Y' = AY$. Montrer que les solutions de (E) sont bornées si et seulement si $A = \lambda I_n$ et $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

II.2.532 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in L(E)$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f^2(x)\| \geqslant C\|f(x)\|$ pour tout $x \in E$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

II.2.533 **Mines-Télécom 2024**

Soit $\mathcal{E}$ une partie de $M_n(\mathbb{R})$. On appelle *centre* de $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices commutant avec tous les éléments de $\mathcal{E}$.

1. Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathrm{Vect}(GL_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$. En déduire le centre de $GL_n(\mathbb{R})$.

II.2.534 **Mines-Télécom 2025**

On étudie les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_{kk}) \quad (1),$$

c'est-à-dire les matrices pour lesquelles les valeurs propres sont réelles et sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice.

1. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Les matrices M_1 et M_2 vérifient-elles la condition (1) ?
2. Soit $(u; v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$.
   À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $M_{u,v}$ vérifie-t-elle la condition (1) ?
3. Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition (1) ?

II.2.535 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall k \in [\![1\,, n-1]\!], \mathrm{Tr}(A^k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(A^n) \neq 0.$$

Montrer que A est diagonalisable.

II.2.536 **CCINP 2025**

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Trouver les matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$.
   On souhaite résoudre le système différentiel suivant :
   $$(S) : \begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$$
3. On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$.
   Trouver un système d'équations vérifié par $U(t)$ et effectuer la résolution de ce système.
   On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant :
   $$(S') : \begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$$
4. On pose $V(t) = P^{-1}X(t)$.
   Trouver un système d'équations vérifié par $V(t)$.
5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de (S') est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?

II.2.537 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. Montrer que :
   $$\forall x \in E,\ f(x) = x \implies f^\star(x) = x,$$
   où $f^\star$ est l'adjoint de f.
2. Étudier la suite u de $L(E)^{\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k.$$

II.2.538 **CCINP TSI 2019**

Soit φ définie pour tout $(P;Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ par $\varphi(P;Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée $(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Soit $M_i = \sup\limits_{t \in [-1;1]} |Q_i(t)|$, $i \in [\![0\,,3]\!]$. Montrer que $M_i = Q_i(1)$.

II.2.539 **CCINP MP 2025**

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

1. (a) Montrer que :

   $$\forall x, y \in E,\ \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|.$$

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = E$ ou $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
2. Supposons E de dimension finie n. Soit $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E.
   (a) Montrer que les $\|f(e_i)\|$ sont tous égaux à un même entier $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
   (b) Montrer qu'il existe un entier k tel que :

   $$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|.$$

3. Montrer que le résultat précédent reste valable en dimension infinie.
4. Montrer que :
   $$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle.$$

II.2.540 **MP ENS 2025**

Une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est dite de *Bourdeaud* si tous ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdeaud si et seulement si elle est trigonalisable.
2. Existe-t-il une matrice complexe, symétrique et de Bourdeaud qui ne soit pas diagonalisable ?
3. Une matrice est dite *normale* si elle commute avec sa transposée. Quelles sont les matrices réelles, symétriques et normales de Bourdeaud ?

II.2.541 **ENSEA/ENSIIE MP 2022**

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $f \in L(E)$ par :

$$\forall P \in E,\ f(P) = (X-3)(X+1)P' - XP.$$

Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

II.2.542 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit E un espace euclidien. Soit $\{e_1;\dots;e_n\}$ une famille liée génératrice de vecteurs unitaires de E, deux à deux distincts, pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i,j \in [\![1\,,n]\!],\ i \neq j \implies \langle e_i, e_j\rangle = \alpha.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ et $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$.
2. Montrer que $\dim(E) = n-1$.

II.2.543 **Mines-Ponts PC 2023**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note :

$$\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle = 0\}.$$

1. Dans cette question, on prend $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A$.
2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $\mathcal{C}_A = \mathrm{Ker}(A)$;
   ii) $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
   iii) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ou $-A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

II.2.544 **CCINP MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U_n la matrice carrée réelle de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Sans calculer le déterminant, trouver les valeurs propres de U_n avec leur multiplicité.
2. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{R}^n$. On définit :

$$\forall i \in [\![2\,,n]\!],\ f_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{i-1} e_k - e_i.$$

   Montrer que $(f_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de U_n, pour le produit scalaire canonique.
3. En déduire une base orthonormée formée de vecteurs propres de U_n. Donner la formule de diagonalisation de U_n.

II.2.545 **Mines-Ponts PC 2023**

Trouver tous les couples $(u;v)$ d'isométries qui anticommutent dans un espace euclidien de dimension 2.

II.2.546 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \frac{1}{a} & 0 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition sur a, b et c afin que A soit diagonalisable.
2. Soit f l'endomorphisme associé à A. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

II.2.547 **Mines-Télécom PSI 2019**

On considère :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P;Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=-2017}^{2017} P(k)Q(k) \end{array}$$

Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles φ est un produit scalaire ?

II.2.548 **CCINP MP 2018**

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Calculer χ_C et π_C.
2. Montrer qu'il existe A et B dans $M_5(\mathbb{R})$ telles que :
$$C = A + B, \quad A^2 = A, \quad B^2 = 3B \quad \text{et} \quad AB = BA = 0.$$
3. Déterminer le rang de A et le rang de B.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C^n s'écrit comme une combinaison linéaire de A et B dont on déterminera les coefficients.

II.2.549 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit A une matrice réelle symétrique, B une matrice réelle antisymétrique et M une matrice réelle inversible telle que $A = M^{-1}BM$. Montrer que $A = B = 0$.

II.2.550 **X MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et λ_1, λ_2 ses valeurs propres.
Trouver le lieu de $(a; c)$ sachant que les deux valeurs propres de A sont fixées.

II.2.551 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ entier. Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$:

$$M^2 - \mathrm{Tr}(M)M + \det(M)I_n = 0.$$

II.2.552 **CCINP MP 2018**

Soit x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
2. Trouver α réel tel que, si $x < \alpha$, alors $M \in E_x$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Ici, $x = -2$. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_x. Quel est son cardinal ?

II.2.553 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer la distance entre le polynôme X^2 et le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

II.2.554 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X^T - X \end{array}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

II.2.555 **Mines-Ponts PC 2022**

Soit $A \in M_{3n}(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 = 0$ et que $\text{rang}(A) = 2n$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_{3n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.556 **CCINP PSI 2022**

Soit f, g des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que $f = g \circ g$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $A = (f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Soit e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3. Montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3.
3. Montrer que e_1 et e_3 sont aussi des vecteurs propres de g.
4. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
5. Quelles sont les valeurs propres possibles de g ?

II.2.557 **Mines-Ponts MP 2018**

Étudier les classes de similitude de $M_3(\mathbb{R})$.

II.2.558 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et a un vecteur normé de E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$, endomorphisme de E.

1. Montrer que :
$$\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$
2. Déterminer les α tels que f_α soit bijectif.
3. Trouver les valeurs propres de f_α.

II.2.559 **CCINP PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie la relation :

$$A^3 + 9A = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0; 3\mathrm{i}; -3\mathrm{i}\}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?
4. On suppose n impair. Montrer que A n'est pas inversible.
5. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation (1).

II.2.560 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et u l'application qui à f de E associe $x \mapsto f(px+q)$, avec $p \in]0\,;1[$ et $q = 1-p$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $]-1\,;1]$.
3. Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
4. Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

II.2.561 **CCINP MP 2023**

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Redéfinir la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Donner les éléments propres de f.
4. L'application f est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de f dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, définir f^n.

II.2.562 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E_n l'ensemble des $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_n.
3. Donner une base de E_n.

II.2.563 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $\mathcal{F} \subset M_n(\mathbb{C})$ une partie non vide stable par produit.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \in \{0;\dots;n\}$.

II.2.564 **Centrale-Supélec PSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A admet une valeur propre simple notée b et une valeur propre double notée a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que :
$$P(b) = f(b), \quad P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$
On note P_f ce polynôme.
3. Donner P_f dans le cas où f est l'application $x \mapsto \dfrac{x}{2}$, puis $x \mapsto \dfrac{x}{3}$.

II.2.565 **CCINP MP 2023**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ou bien $ab > 0$, ou bien $a = b = 0$.
2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $(e_1;\dots;e_n)$, de taille n, est :
$$\begin{pmatrix} & & & a_n \\ & 0 & \iddots & \\ & \iddots & & \\ & \iddots & 0 & \\ a_1 & & & \end{pmatrix}$$
avec n pair.
   (a) Donner les sous-espaces vectoriels u-stables de dimension 2.
   (b) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si
$$a_i = a_{n+1-i} = 0 \ \text{ ou } \ a_i a_{n+1-i} > 0 \ \text{ pour tout } i \in [\![1\,,n]\!].$$

II.2.566 **CCINP MP 2021**

On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{b2} \end{pmatrix}.$$

On pose également :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}I_2 & a_{12}I_2 \\ a_{21}I_2 & a_{22}I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}.$$

On suppose A et B diagonalisables. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de B, on pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de $\tilde{A}$ et que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de $\tilde{B}$.
2. Montrer que $W = x_1V_1 + x_2V_2$ est vecteur propre de $\tilde{A}$ et de $\tilde{B}$.
3. Comment former une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs propres communs à $\tilde{A}$ et à $\tilde{B}$?
4. La matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$?

II.2.567 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$T(P) = (-3X + 8)P + 5(X^2 + X)P' - 2(X^3 - X^2)P''.$$

1. Soit $P \in E$ de degré n. Déterminer le coefficient de X^{n+1} de $T(P)$. En déduire que les vecteurs propres éventuels de T sont tous de même degré.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T. On note alors T_3 l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{C}_3[X]$. Déterminer la matrice de T_3 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
3. La matrice T_3 est-elle diagonalisable ? inversible ?
4. On note :
$$(E) : 2(x^3 - x^2)y'' - 5(x^2 + x)y' + (3x + 14)y = 0.$$
   (a) Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Comment peut-on trouver des solutions non polynomiales de (E) sur $]0\,;1[$?

II.2.568 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale non nulle. Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

II.2.569 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f, g \in L(\mathbb{C}^n)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ soit bijective.
Montrer que $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$.

II.2.570 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & M \mapsto \text{Tr}(AM) \end{array}$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

II.2.571 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \longmapsto & (X^2+X)P(1) + (X^2-X)P(-1) \end{array}$$

1. Déterminer des bases de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Trouver les éléments propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

II.2.572 **CCINP PC 2016**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls.
On considère :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & E & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & x - \langle a, x\rangle b \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $\langle a, x\rangle \neq 1$.
2. Si f est bijective, calculer f^{-1}.

II.2.573 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(a + bX + cX^2) = (2a + c)(1 - X^2) + (a + b + c)X.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle inversible ?
3. Trouver les vecteurs propres de A.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

II.2.574 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2014} = A^{2016}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \text{rang}(A)$.
2. Ce résultat demeure-t-il vrai si A est seulement diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

II.2.575 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $P \in \mathbb{C}[X]$. On note π_u le polynôme minimal de u.

1. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et π_u sont premiers entre eux.
2. Montrer que si $P(u)$ est inversible, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{C}[u]$.

II.2.576 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $t \in \mathbb{R}$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1-t \\ 1-t & 1 & 1-t \\ t-1 & t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.
2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + (1-t)y(t) + (1-t)z(t) \\ y'(t) = (1-t)x(t) + y(t) + (1-t)z(t) \\ z'(t) = (t-1)x(t) + (t-1)y(t) + (2t-1)z(t) \end{cases}$$

II.2.577 **Centrale-Supélec MP 2017**

1. On note $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x+3y & -6x+6y \\ x-y & 3x-2y \end{pmatrix} \,\Big|\, (x;y) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.
   Montrer que $\mathcal{E}$ est un plan vectoriel d'éléments tous diagonalisables.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq \beta$.
   On suppose que pour tout nombre complexe t, $B + tA$ est diagonalisable.
   Montrer que $b = c = 0$.
3. Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont diagonalisables. Calculer $d_2(\mathbb{C})$, puis $d_n(\mathbb{R})$.

II.2.578 **CCINP PSI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Soit D la matrice diagonale portant les valeurs propres de A. Montrer que si une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Soit $P(X) = X^7 + 4X^3 + 1$. Trouver toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.

II.2.579 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p+q$ admet des vecteurs propres.
2. Montrer que E peut se décomposer en somme directe de plans ou de droites stables par p et q.

II.2.580 **CCINP MP 2019**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit f un endomorphisme symétrique de E. On note a la plus petite valeur propre de f, b la plus grande.

1. Montrer que :
$$a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2.$$
2. Montrer que s'il existe un réel r tels que, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \leqslant r\|x\|^2$, alors $r \geqslant b$.
3. Soit k un réel fixé. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$
Montrer que $b \leqslant k+2$.

II.2.581 **CCINP MP 2019**

Soit
$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P(X) + 2X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

II.2.582 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Montrer que l'ensemble E des suites
$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = 2a\}$$
est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $\Psi : u \mapsto (a; u_0; u_1)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que les suites $n \mapsto 1$, $n \mapsto \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $n \mapsto \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ forment une base de E.

II.2.583 **CCINP MP PSI 2019**

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(I_n + 2M) \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Mx, x\rangle = \|x\|^2$.
2. Conclure sur M.

II.2.584 **Mines-Ponts MP 2019**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$, où $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$.

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Trouver $F^\perp$ et vérifier que l'on n'a pas $F \oplus F^\perp = E$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $\mathrm{dist}(1; F) = \|1 - P\|$.
   Indication : on pourra s'aider des polynômes définis par $P_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{n}$.

II.2.585 **ENS MP 2012**

Soit p un nombre premier. Est-ce que toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est trigonalisable ?

II.2.586 **Mines-Ponts PC 2013**

Soit deux formes linéaires indépendantes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux vecteurs x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_2) = 0$, $f_2(x_1) = 0$, $f_2(x_2) = 1$.

II.2.587 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit M une matrice de $GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T = -M^2$. Que peut-on dire de M ?

II.2.588 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \longmapsto & (X^2+1)P'' - 2XP' \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique.
2. Prouver qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de Φ.
3. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\, T_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall \theta \in \,]0\,;\pi[,\ T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de Φ.

II.2.589 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) > 0$.
Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p + B^p) > 0$.

II.2.590 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1, et que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Trouver des conditions sur n et α.

II.2.591 **Mines-Ponts MP 2014**

Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \cos(\beta) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ 1 & \cos(\gamma) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix}.$$

II.2.592 **X PC 2023**

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B) > 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{A+B}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B)$.

II.2.593 **Centrale-Supélec PSI 2015**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M$ est inversible et symétrique, de spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega S$.
3. Trouver Ω et S telles que $M = \Omega S$ lorsque :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω' et une matrice triangulaire T à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega' T$.
5. Trouver Ω' et T telles que $M = \Omega' T$ lorsque :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.2.594 **Mines-Ponts MP 2014**

On considère le système :

$$\begin{cases} M^2 + I_n = 0 \\ MM^T = M^T M \end{cases}$$

1. Résoudre le système dans $M_n(\mathbb{R})$ pour n impair.
2. Résoudre le système dans $M_n(\mathbb{R})$ pour n pair.

II.2.595 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

1. Existe-t-il un polynôme P tel que $P(A^2) = A$?
2. Que dire pour $P(A^k) = A$, avec k impair ?

II.2.596 **CCINP MP 2016**

Soit $n \geqslant 2$ entier, $a \in \mathbb{R}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à a.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Le polynôme $X^n - (na)^{n-1}X$ est-il un polynôme annulateur de A ?
4. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

II.2.597 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit M une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives. Montrer que :

$$\sqrt[n]{\det(I_n + M)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\det(M)}.$$

II.2.598 **Mines-Télécom MP 2016**

On considère l'endomorphisme

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(1)X + P(2)X^2 \end{array}$$

Trouver les éléments propres de u.

II.2.599 **Mines-Télécom MP 2016**

Trouver toutes les matrices $M \in M_4(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.600 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA^2$. En supposant que A admet des valeurs propres de module différent de 1, montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

II.2.601 **TPE/EIVP PSI 2017**

Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$C = A + B, \quad C^2 = 2A + 3B, \quad C^3 = 5A + 6B.$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

II.2.602 **ENSEA/ENSIIE MP 2018**

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1. On se place dans $\mathbb{C}$. Déterminer si A est diagonalisable ou non.
2. Même question si on se place dans $\mathbb{R}$.
3. Refaire les deux premières questions pour la matrice B.

II.2.603 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \dfrac{X^T B X}{X^T A X}$ admet un maximum M et un minimum m.
2. Montrer qu'il existe V tel que $A = V^2$.
3. Montrer que la matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable.

II.2.604 **CCINP MP 2022**

On considère dans $\mathbb{R}^n$ deux vecteurs non colinéaires $(a_1; \ldots; a_n)$ et $(b_1; \ldots; b_n)$.

1. Montrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n \ = 0 \end{cases}$$

   où $(x_1; \cdots; x_n)$ est un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$, définit un espace vectoriel noté F. Donner sa dimension.

2. *Application :*

   Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note $e = (e_1; \ldots; e_4)$ la base canonique. Soit le système :

$$\begin{cases} x - y + z + tx \quad = 0 \\ x + 2y + 2z - t \ = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner une base orthonormale de F.
   (b) Calculer $\mathrm{dist}(u; F)$ lorsque $u = e_1 - e_3 + 2e_4$.

II.2.605 **ENS MP 2018**

Soit σ une permutation de S_n et P_σ la matrice de permutation associée. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P_σ soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.606 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit s une symétrie d'un espace vectoriel réel E. On considère :

$$\begin{array}{rcll} \Phi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) \end{array}$$

Déterminer les éléments propres de Φ.

II.2.607 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et S_A l'ensemble des matrices semblables à A. Trouver l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que S_A est fini.

II.2.608 **CCINP TSI 2022**

Reconnaître l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice suivante :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

II.2.609 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = A + B$.
Montrer que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

II.2.610 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit N un opérateur nilpotent. Comparer $\operatorname{Ker}(N)$ et $\operatorname{Ker}(\exp(N) - \operatorname{Id})$.

II.2.611 **X MP 2015**

Soit L un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre qui conserve la transposée si et seulement s'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $L(X) = U^T X U$.

II.2.612 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Im}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

II.2.613 **CCINP MP 2025**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? dans $M_n(\mathbb{C})$?
3. Trouver une matrice triangulaire T semblable à A.
4. Quelle est la limite de $\frac{A^n}{n!}$ quand $n \to +\infty$?

II.2.614 **Mines-Télécom MP 2025**

Résoudre l'équation matricielle suivante d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{R})$:

$$M(M^T M)^2 = I_n.$$

II.2.615 **Mines-Télécom MP 2025**

On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Soit $\varphi : u \mapsto v$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Que peut-on dire de son spectre ?
2. Déterminer les valeurs propres de φ.

II.2.616 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\|^2$ est égal à la somme des carrés des valeurs propres de A.

II.2.617 **CCINP MP 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = AA^T$ et $A^2 = -I_n$.

1. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que $(A^T A)^2 = I_n$.
3. Montrer que $A^T A$ est symétrique, et en déduire que A est orthogonale.

II.2.618 **CCINP MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.
2. Montrer que la réciproque est fausse à l'aide la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir un polynôme annulateur pour que A soit diagonalisable.
4. On suppose que A et A^2 sont diagonalisables. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.
5. On suppose que A^2 possède n valeurs propres distinctes. Montrer que A est diagonalisable.
6. On suppose que A^2 est diagonalisable et que A est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

II.2.619 **ENS MP 2017**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une base $(e_1; \ldots; e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et une permutation σ de S_n telles que :

- A est triangulaire dans la base $(e_1; \ldots; e_n)$;
- B est triangulaire dans la base $(e_{\sigma(1)}; \ldots; e_{\sigma(n)})$.

II.2.620 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une *involution* de $L(E)$ est un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que :

$$f \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

1. Soit a et b deux automorphismes de $L(E)$ vérifiant :

$$a \circ b \circ a = b \quad \text{et} \quad b \circ a \circ b = a.$$

   Montrer que $a^2 = b^2$ et que a^2 est une involution.
2. On suppose maintenant que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2.
   Soit a et b deux involutions de $L(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a) = \mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b).$$

II.2.621 **Mines-Ponts MP 2014**

On définit le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \,\mathrm{d}t.$$

On pose $M(P) = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

1. Montrer que $(1; X; \ldots; X^n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
2. Soit $Q = X^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k X^k$. Calculer $\|Q\|$ et montrer que $M(Q) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Q tel que $M(Q) = 1$.
3. Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

   Montrer que $M(P) \geqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

II.2.622 **Mines-Télécom MPI 2024**

Soit $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Démontrer que :

$$\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X.$$

II.2.623 **Mines-Ponts MPI 2023**

On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs, de diagonale nulle, et telle que :

$$\forall i, j \in [\![1\,, n]\!],\ i \neq j \implies a_{ij} + a_{ji} = 1.$$

1. Exprimer $A + A^T$ en fonction de J et I_n.
2. Évaluer $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(J)$.
3. En déduire que $\mathrm{rang}(A) \geqslant n - 1$.
4. Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toute matrice vérifiant les propriétés de A soit inversible ?

II.2.624 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. On considère l'application

$$\begin{array}{rcccc} W & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \\ & & t & \longmapsto & W(t) \end{array}$$

   telle que $W' = AW$.
   Exprimer W en fonction de t et d'autres paramètres que l'on précisera.

II.2.625 **Mines-Télécom MPI 2025**

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre :

i) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(AB) \leqslant \min(f(A); f(B))$;

ii) $\exists \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f = \varphi \circ \mathrm{rang}$.

II.2.626 **CCINP PSI 2024**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, soit $A = (\alpha^{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?

II.2.627 **Mines-Ponts PSI 2023**

Pour tout $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$, on définit :

$$\begin{array}{rcccc} f_{a,b,c} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} b\mathrm{e}^t + c\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\mathrm{e}^t \\ a + c\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $F = \{f_{a,b,c} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. Déterminer $B \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $f \in F$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = Bf(t)$.

II.2.628 **Mines-Ponts PSI 2022**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de *famille obtusangle* de $n+2$ vecteurs, c'est-à-dire une famille $\{u_1; \ldots; u_{n+2}\}$ telle que :

$$\forall (i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2,\ i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle < 0.$$

1. Étudier les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Établir la propriété par récurrence pour tout n.
3. Montrer qu'il existe une famille obtusangle de $n+1$ vecteurs.

II.2.629 **Mines-Ponts PSI 2022**

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et $\wedge$ le produit vectoriel.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & \omega \wedge x \end{array}$$

où ω est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On pose $P = \mathrm{Vect}(\{\omega\})^\perp$. On rappelle que la formule du double produit vectoriel n'est pas au programme et est donc à proscrire.

1. (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme g induit par la restriction de f à P.
   (b) Montrer que $\det(g) > 0$.
2. (a) Trouver tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$, unitaires de degré 3, annulateurs de f.
   (b) Sans faire de calculs, exprimer χ_f, le polynôme caractéristique de f.
3. (a) Redémontrer la propriété du cours suivante pour $\varphi \in L(E)$: le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par φ divise χ_φ.
   (b) Montrer-le dans le cas de f et g.

II.2.630 **X ESPCI 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X) \in \mathrm{Vect}(\{X^n\}).$$

II.2.631 **X ESPCI 2018**

Pour tout couple $(P;Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que cette intégrale existe et qu'on a défini ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer l'existence d'une base orthonormale $\{P_0;\dots;P_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire telle que pour chaque $i \in \{0;\dots;n\}$, la famille $\{P_0;\dots;P_i\}$ soit une base de $\mathbb{R}_i[X]$.
3. Soit $i \in [\![1\,,n]\!]$. Montrer que le polynôme P_i est scindé, à racines simples, et que toutes ses racines sont dans $[-1\,;1]$.

II.2.632 **X ESPCI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$.
On suppose que $\det(A)$ est impair. On considère $(\varepsilon_1;\varepsilon_2;\varepsilon_3;\varepsilon_4) \in \{-1;1\}^4$ et on pose $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} a\varepsilon_1 & b\varepsilon_2 \\ c\varepsilon_3 & d\varepsilon_4 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A_ε est inversible.

II.2.633 **X ESPCI 2015**

Soit A est une matrice carrée réelle. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, quelle que soit P orthogonale, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

II.2.634 **CCINP PC 2024**

Soit la matrice $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Donner une valeur propre de M.

II.2.635 **Mines-Ponts**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut écrire M sous la forme $M = A + S + cI_n$, avec $A \in A_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(S) = 0$, et $c \in \mathbb{R}$. Montrer, de plus, que :

$$\mathrm{Tr}(M^2) = \mathrm{Tr}(A^2) + \mathrm{Tr}(S^2) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)^2.$$

II.2.636 **CCINP PSI 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, alors les valeurs propres de M sont forcément racines de P.
2. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}(M)\det(M) \neq 0$.
3. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 ne fait pas partie de son spectre.

II.2.637 **CCINP MP 2022**

Soit A et B deux matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

1. Que peut-on dire de $A + B$, de AB et de $\mathrm{com}(A)$?
2. On suppose de plus que $\dfrac{A+B}{2}$ est orthogonale.

   Calculer $A^TB + B^TA$. Montrer que toute matrice du segment $[A\,;B]$ est orthogonale.

II.2.638 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = \bigcup_{k=1}^{p} F_k.$$

   Montrer qu'il existe $k_0 \in [\![1\,, p]\!]$ tel que $F_{k_0} = E$.

II.2.639 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$.
2. Montrer que $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1})^2 = S^{-1}$.
3. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle X, X\rangle \leqslant \langle SX, X\rangle \langle S^{-1}X, X\rangle.$$

4. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

II.2.640 **Mines-ponts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Soit encore $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $(a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{C}^n$ et :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

   Calculer $\det(A\Omega)$ et en déduire la valeur de $\det(A)$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\Delta_n(\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cdots & \cos(n\theta) \\ \cos(n\theta) & \cos(\theta) & \cdots & \cos((n-1)\theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cdots & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

II.2.641 **CCINP TSI 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^n.

II.2.642 **CCINP MP 2022**

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. Soit F et G deux polynômes de degré $n+1$. On considère f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. L'application f est-elle un automorphisme ? (Discuter selon que F et G sont premiers entre eux ou pas.)
3. Supposons que $F \wedge G = 1$ et que G soit scindé à racines simples. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

II.2.643 **Centrale-Supélec MP 2021**

1. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence de $d = \min\{p \in \mathbb{N} \mid N^p = 0\}$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de M.
3. On suppose maintenant que $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie :

$$M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0.$$

Montrer que $|\mathrm{Tr}(M)| \leqslant n$. Étudier les cas d'égalité.

II.2.644 **Centrale PC 2022**

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

II.2.645 **CCINP MP 2023**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1; \ldots; x_n)$ et $y = (y_1; \ldots; y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Soit $F = \{x = (x_1; \ldots; x_n) \mid x_1 = x_n\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F.
3. Déterminer $F^{\perp}$.
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $\mathrm{dist}(e_1; F)$.

II.2.646 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) p est orthogonal ;

ii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

II.2.647 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & P & \longmapsto & (P(0); P'(0); P(-1); P'(-1)) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$. L'application ϕ est-elle bijective ?
3. Exprimer M, matrice de ϕ dans la base canonique.
4. (a) Montrer que M est diagonalisable.
   (b) Donner un polynôme annulateur de M.
   (c) La matrice M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $\phi(Q) = (0; 1; 0; 1)$.
   (b) Déterminer Q.
   (c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

II.2.648 **X MP MPI 2024**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$?

II.2.649 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $MM^T = M^T M$.
Montrer que $\frac{1}{2}M \in O_2(\mathbb{R})$ et en déduire M.

II.2.650 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que l'on a $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^4)$. Le résultat est-il toujours vrai en dimension infinie ?

II.2.651 **CCINP MP 2025**

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d, e, f pour que A soit diagonalisable. Dans l'hypothèse où A est diagonalisable, diagonaliser A.

II.2.652 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que toute matrice symétrique réelle admet des sous-espaces propres orthogonaux. Énoncer le théorème spectral.
   (b) Justifier que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0\,;4]$.
3. Lister les éléments de $\mathrm{Sp}(A)$.

II.2.653 **CCINP MP 2024**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit u un vecteur unitaire de E et pour a dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$f_a : x \longmapsto x + a\langle x, u\rangle u.$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique $a' \in \mathbb{R}^*$ tel que :
   $$\forall x \in E,\ \|f_{a'}(x)\| = \|x\|.$$
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{a'} + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f_{a'} + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
3. On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de f_a.

II.2.654 **CCINP MP 2024**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $M = CL$, où C une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rang}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

II.2.655 **ENS MP 2024**

Soit $n \geqslant 1$ entier et $\mathcal{I}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{I}_n$, alors pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP \in \mathcal{I}_n$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{I}_n$. Montrer que :
   $$A \text{ semblable à } B \iff \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) \text{ et } \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B).$$

II.2.656 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E.

1. Ici, $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soit

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 Px)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

   (b) Montrer que $\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

2. Soit $F = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.
3. Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ avec comme produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Soit F l'ensemble des fonctions de E qui sont nulles sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
   Montrer que $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

II.2.657 **CCINP MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. On cherche des vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ avec,
   pour tout $i \in \{2; 3; 4\}$, $|\varepsilon_i| = 1$ et $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$.
   Donner les éléments propres de A.
2. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?
3. Donner χ_A.
4. Si $a = b = c = 1$, donner π_A.
5. Si $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, donner π_A.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(\pi_A) = 4$.
7. Donner une condition sur a, b et c pour que $\deg(\pi_A) = 3$.

II.2.658 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit A et B deux matrices de $M_4(\mathbb{C})$ telles que $A^4 = B^4 = I_4$ et $AB + BA = 0$.

1. Montrer que A et B sont diagonalisables.
2. Donner $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(B)$.
3. Donner les valeurs propres de A et B avec leur ordre de multiplicité.
4. Montrer que $C = \mathrm{i}AB$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

II.2.659 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice conjuguée de A. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

Indication : on pourra, pour une des implications, prendre $\omega \in \mathbb{C}$ bien choisi et poser $S = \omega A + \overline{\omega} I_n$.

II.2.660 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'ordre p.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. On suppose que $\dim(E) = n$ et que $p = n$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0; f(x_0); \dots ; f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? On note A cette matrice.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On choisit $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Donner un exemple de f dans $L(E)$ nilpotent d'ordre n, et d'une base telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice A.
4. (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(t(I_n + A))$.
   (b) Résoudre :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) + AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

II.2.661 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $E = \{f \in C^2([0\,;1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et F l'ensemble des fonctions continues sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que $\phi : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de E dans F.
2. Soit $g \in F$. On pose :

$$\forall x \in [0\,;1],\ G(x) = \int_0^1 |x - t| g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que G est de classe C^2 et calculer G''.
3. Déterminer une fonction continue k telle que :

$$\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x;t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Étudier l'existence et la valeur de $\sup\limits_{\|g\|_\infty \leqslant 1} \|\phi^{-1}(g)\|_\infty$.

II.2.662 **CCINP PSI 2024**

Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, puis de $N = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

II.2.663 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur.
2. Déterminer $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(B)$.
3. En déduire que $BA = I_2$.

II.2.664 **Centrale-Supélec MP 2016**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il toujours $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il toujours $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?
3. Soit $P = X^3 + X + 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $P(M) = 0$.

II.2.665 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

II.2.666 **Mines-Ponts MP 2017**

Trouver dans $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ les implications entre les propositions suivantes :

i) Les matrices A et B sont diagonalisables et $AB = BA$;

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $A + \lambda B$ est diagonalisable.

II.2.667 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel. On définit un *système générateur positif* sur E par le fait qu'il génère tous les éléments de E et que tous les éléments de E peuvent être générés par ce système en utilisant uniquement des coefficients positifs. Montrer que si $\dim(E) = n$, le cardinal d'un système générateur positif est supérieur ou égal à $n + 1$.

II.2.668 **Mines-Télécom MP 2017**

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme.
2. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

II.2.669 **Centrale-Supélec MP 2017**

On note L l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. On introduit l'endomorphisme $D : L \to L$ qui réalise un décalage d'indexation : $D(u)_n = u_{n+1}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\text{Ker}(P(D))$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_d[X]$ fixé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Ker}(P(D))$. Soit $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,,2d]\!]$, $Q(D)(u)_i = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Ker}(Q(D))$.
3. Connaissant $(u_1;\ldots;u_{2d})$, proposer une méthode pour retrouver P.

II.2.670 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $a_1,\ldots,a_n$ des nombres complexes. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Attention, ce n'est pas un déterminant de Vandermonde, il n'y a pas de colonne avec des puissances $n-1$.

II.2.671 **Centrale-Supélec MP 2017**

On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que toute matrice carrée d'ordre $n > 0$ réelle inversible $A = (a_{ij})$, la matrice $A = (f(a_{ij}))$ soit également inversible.

1. Montrer que pour tous réels distincts x, y la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que f est injective.
2. On suppose que f est surjective. En considérant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ pour x, y, z réels avec $z \neq x + y$, montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
3. Montrer que f est surjective. Conclure quant à f.

II.2.672 **ENS MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit le spectre de A contient un nombre complexe de module supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ soit nilpotente.

II.2.673 **CCINP PC 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$ et $A^T = A$.

1. Montrer que $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A)$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant n\sqrt{\text{rang}(A)}$.

II.2.674 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et A sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$.

1. Donner la définition de u est diagonalisable et donner la version matricielle de cette définition.
2. Donner une caractérisation de u diagonalisable.
3. On suppose $E = \mathbb{R}^n$, u diagonalisable et $u^4 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie vectorielle.
4. On donne $\mathrm{Tr}(u) = n - 2$. Préciser le résultat précédent.

II.2.675 **Mines-Télécom PC 2019**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et u une isométrie vectorielle.

1. Définir une isométrie vectorielle.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Justifier.
3. L'isométrie u admet-elle nécessairement une ou plusieurs valeurs propres réelles ? Justifier.
4. La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Caractériser géométriquement u.

II.2.676 **ENSEA/ENSIIE MP 2013**

Soit K la matrice définie de la façon suivante : pour tout $(p;q) \in [\![1\,,n]\!]^2$, le coefficient $K_{p,q}$ vaut $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pq}$. On définit K' la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de K.

1. Calculer KK'.
2. Montrer que K est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $|\det(K)|$.

II.2.677 **Centrale-Supélec PSI 2013**

Soit A et B deux matrices non nulles de $M_3(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A est semblable à B. Est-ce vrai en dimension 4 ?

II.2.678 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent exclusivement 1 ou -1.

1. Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.
2. Calculer $\det(A)$ pour A comprenant -1 dans la diagonale et 1 partout ailleurs.

II.2.679 **CCINP PC 2014**

Soit $n \geqslant 3$ entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A - I_n$ non inversible. Quel est le spectre de A ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.680 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x;y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \iff \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

1. Montrer que f est inversible.
2. Montrer que l'image d'un plan est un plan.
3. Montrer que l'image d'une sphère est une sphère.
4. Montrer que pour tout $(x;y) \in E^2$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x, y\rangle = k\langle f(x), f(y)\rangle$.

II.2.681 **Mines-Ponts 2016 PC**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de A.

II.2.682 **CCINP PC 2014**

On considère l'ensemble

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ est semblable à un élément de A_2.

Dans tout l'exercice, on considère un élément M de $M_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

1. Démontrer la propriété attendue dans le cas où M est diagonalisable.
2. Dans cette question, on prend $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que M n'est pas diagonalisable.
   (b) Trouver un vecteur e_1 qui n'est pas dans le noyau de f.
   On pose $e_2 = f(e_1) - e_1$.
   (c) Vérifier que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (d) Trouver une matrice de A_2 semblable à M.
3. On se place dans le cas général où M n'est pas diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de $\mathbb{R}^2$ tel que le couple $(e_1; f(e_1))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que la matrice de f relativement à cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ pour un certain couple $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que le coefficient a est forcément négatif.
   (d) Si a est nul, montrer que b l'est forcément aussi. Conclure dans ce cas.
   (e) Traiter enfin le cas où a est strictement négatif.

II.2.683 **Mines-Ponts PSI 2014**

1. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que $A^q = I_n$. Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}(A^k).$$

II.2.684 **CCINP MP 2016**

Soit E un espace vectoriel, $u \in L(E)$ et P un polynôme admettant une racine simple, tel que $P(u) = 0$. Montrer de deux manières différentes que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, dont une utilisant le théorème de Bézout.

II.2.685 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $(a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = a_i a_j$ pour $i, j \in \{1; \ldots; n\}$.

1. Montrer que A est la matrice d'un projecteur orthogonal.
2. Montrer que $I_n - 2A$ est la matrice d'une symétrique orthogonale.

II.2.686 **Mines-Télécom MP 2016**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $a \in \mathbb{K}^*$ tel que :

$$f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0.$$

Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

II.2.687 **X MP 2016**

Définissons pour $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A \star B = (a_{ij} \cdot b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Montrer que si A et B appartiennent à $S_n^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient aussi à $S_n^+(\mathbb{R})$.

II.2.688 **CCINP PSI 2016**

Montrer que les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

II.2.689 **Mines-Télécom MP 2017**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? La réduire.
2. Résoudre l'équation $\exp(M) = A$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$.

II.2.690 **Mines-Télécom MP 2017**

Considérons $H = \{AB - BA \mid (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2\}$.

1. Démontrer que l'application trace Tr : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle.
2. Notons $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{ij}E_{k\ell}$.
3. Démontrer que pour tout $(A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = H$.
4. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
   $$\forall (A; B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
   Démontrer que $\{\varphi; \mathrm{Tr}\}$ est liée.
5. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

II.2.691 **Mines-Ponts PSI 2017**

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A.
2. On cherche les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ solutions de l'équation :
   $$(E) : M^2 + M = A.$$
   (a) Si M est solution de (E), montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-3; -2; 1; 2\}$ et que M est diagonalisable.
   (b) Trouver toutes les solutions de (E).

II.2.692 **Centrale-Supélec PC 2017**

Soit $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. On pose $B = AA^T$ et $C = A^TA$. Soit λ un réel non nul. Montrer que si λ est valeur propre de B, alors elle est valeur propre de C avec la même multiplicité.

II.2.693 **X ESPCI 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}(\{v_i - v_j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\})) \leqslant n - 1$.

II.2.694 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A et B des matrices symétriques réelles d'ordre n. On suppose que pour tout X appartenant à $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^TBX > 0$. Montrer que $A + \mathrm{i}B$ est inversible.

II.2.695 **ENSEA/ENSIIE MP 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset.$$

Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'équivalence est-elle conservée ?

II.2.696 **Mines-Ponts MP 2017**

On se place dans un espace préhilbertien réel. On définit, pour des vecteurs quelconques $e_1, \dots, e_n$, la matrice M des produits scalaires $\langle e_i, e_j \rangle$.

1. Montrer que :
$$\det(M) \neq 0 \iff \{e_1; \dots; e_n\} \text{ est libre.}$$
2. Montrer que :
$$0 \leqslant \det(M) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$
3. Étudier les cas d'égalité.

II.2.697 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $(a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1; \dots; b_{n-1}) \in (\mathbb{R}^*)^{n-1}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A admet n valeurs propres distinctes.

II.2.698 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u.
2. Soit F un tel sous-espace vectoriel. Que dire de la matrice de u dans une base adaptée à $E = F \oplus G$ (G étant bien évidemment un supplémentaire de F) ?

II.2.699 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit M et N deux matrices de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$. On suppose que MN est nulle et que $M + M^T$ est inversible. Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

II.2.700 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit
$$\begin{array}{rccc} M & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & t & \longmapsto & M(t) \end{array}$$

On suppose que M est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M^2(t) = M(0) = I_n$.

1. Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t.
2. Montrer que $MM' = -M'M$ et $M' = -MM'M$.
3. Montrer que l'application $\Phi : t \mapsto \mathrm{Tr}(M(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $M(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

II.2.701 **CCINP PSI 2019**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

II.2.702 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer les puissances de A.
2. Trouver B telle que $A = B^2$.

II.2.703 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit P_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0; 1\}$, telles qu'il n'y a qu'un seul 1 par ligne et un seul 1 par colonne. Montrer que les matrices de cet ensemble sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

II.2.704 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

II.2.705 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f, g \in L(E)$.

1. On suppose qu'il existe $h \in L(E)$ de rang $r \geqslant 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r.
2. La réciproque est-elle vraie ?

II.2.706 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace préhilbertien. Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E telle qu'il existe une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \langle e_i, e_j \rangle = f(|i - j|).$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

1. Montrer que M_n est inversible si, et seulement si, la famille $\{e_1; \ldots; e_n\}$ est libre.
2. On suppose M_n inversible et M_{n+1} non inversible.
   Montrer que la famille $\{e_1; \ldots; e_r\}$ est liée pour tout $r \geqslant n + 1$.
3. On suppose M_n inversible et M_{n+1} non inversible.
   Montrer que $e_r \in \mathrm{Vect}(\{e_1; \ldots; e_{r-1}\})$ pour tout $r \geqslant n + 1$.
4. On suppose $f(0) \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.
   Montrer que M_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.2.707 **CCINP MP 2019**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme associé.

1. Quel est le rang de M ?
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur l'image de f.

II.2.708 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2 + A - I_n$. On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

II.2.709 **CCINP PC 2018**

On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit un produit scalaire dans E par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Sur E on définit également :

$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X.$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) On admet que f_α est un endomorphisme de E. Pour cette question, on suppose $n = 3$. Donner la matrice A_α de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Donner le spectre de f_α. En déduire si f_α est bijectif ou non. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

   On définit l'endomorphisme g_α sur E par $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.
2. (a) Donner le rang de φ. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.
   (b) Donner le spectre de g_α. L'endomorphisme g_α est-il diagonalisable ? bijectif ?
   (c) Montrer que $\|g_\alpha(P)\| \leqslant (1 + 2|\alpha|)\|P\|$.
   (d) En déduire qu'il existe M tel que :

$$M = \sup_{P \in E, P \neq 0} \left(\frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|} \right).$$

   Donner la valeur de M.

II.2.710 **Mines-Ponts MP 2018**

On note N l'ensemble des matrices complexes nilpotentes et T l'ensemble des matrices complexes de trace nulle.

1. A-t-on $\mathrm{Vect}(N) = N$?
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(N) \subset T$.
3. A-t-on l'inclusion réciproque ?

II.2.711 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & p \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E.

1. Déterminer une condition sur p telle que l'on a :

$$\forall X \in M_3(\mathbb{R}),\ \|AX\|_2 \leqslant \|X\|_2.$$

2. Soit $x \in E$. Déterminer la limite éventuelle de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

II.2.712 **Mines-Télécom PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.713 **Mines-Ponts MP 2018**

On identifie $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$f(X) = X^T AX - 2B^T X.$$

1. Donner l'expression du gradient de f.
2. Montrer que f admet un minimum. Calculer ce minimum.

II.2.714 **Mines**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
2. Si M est inversible, calculer M^{-1}.

II.2.715 **CCINP PC 2018**

Soit une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$, $M = (C_1 \mid C_2 \mid C_3 \mid C_4)$ (C_i étant la $i^{\text{ème}}$ colonne de M). Montrer que :

$$\det((C_1 + C_3 \mid C_2 + C_4 \mid C_1 - C_3 \mid C_2 - C_4)) = 4\det(M).$$

II.2.716 **CCINP PC 2018**

On munit $M_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(x) - 1 & 4 \\ -2 & \sinh(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cosh(x) & 3 \\ 6 & -\sinh(x) \end{pmatrix}.$$

1. A-t-on $\langle A, B\rangle = 0$?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de A à l'espace vectoriel des matrices symétriques.

II.2.717 **Mines-Télécom MP 2018**

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

II.2.718 **TPE/EIVP MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté et u un vecteur unitaire de E. On définit l'application f de E dans E par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que f est symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

II.2.719 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Montrer que $\dim(E) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Quelle est la dimension maximale de E ?

II.2.720 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. On suppose que $u^3 = u^2$. Montrer que u^2 est diagonalisable et que $u - u^2$ est nilpotent.
2. On suppose $u^{k+1} = u^k$ pour $k > 0$. Montrer qu'il existe un entier p tel que u^p est diagonalisable et que $u - u^p$ est nilpotent.
3. Conclure.

II.2.721 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A = \left\{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(A)$.
2. Soit $B = \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_2\}$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(B)$.

II.2.722 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et $J = (1) \in M_n(\mathbb{R})$.

On définit $P(x) = \det(A + XJ)$.

1. Majorer « fortement » le degré de P.
2. Que vaut $\det(A)$? (On distinguera les cas $c \neq 1$ et $c = 1$.)

II.2.723 **CCINP MP 2012**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4, f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \neq \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_E)^2)$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Tr}(f) = 4$.

1. Montrer que 0 et 1 sont valeurs propres de f et que f n'est pas diagonalisable.
2. Montrer l'existence d'un vecteur $x_0 \in \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_E)^2) \setminus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ tel que $F = \mathrm{Vect}(\{x_0; f(x_0)\})$ soit un plan de E.
3. Montrer que 1 est valeur propre de multiplicité 2.
4. Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.724 **Centrale-Supélec MP 2015**

On considère l'ensemble

$$U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^T M = I_n\}.$$

1. Soit u et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que tout espace propre de l'un est stable pour l'autre.
2. Soit $M \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $M^T = M$. Montrer qu'il existe U et V symétriques réelles telles que :
   - $M = U + \mathrm{i}V$
   - $UV = VU$
   - $U^2 + V^2 = I_n$
3. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $M = \exp(\mathrm{i}S)$.
4. Montrer que $M \in U_n(\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe P orthogonale (réelle), S symétrique réelle telle que $M = P\exp(\mathrm{i}S)$.

II.2.725 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée. On note :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_A & : & S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & & S & \longmapsto & ASA^T \end{array}$$

Montrer que $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$.

II.2.726 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $\mathrm{rang}(A) = 2$ et $A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

II.2.727 **CCINP PC 2017**

Soit A une matrice réelle symétrique telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
3. En déduire que $A = 0$.

II.2.728 **CCINP PSI 2022**

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Soit encore $z \in E$.

1. Montrer que $\min\limits_{x \in E} \|f(x) - z\|$ existe et expliquer la méthode de calcul.
2. Calculer $\min\limits_{X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})} \|AX + B\|$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.729 **Mines-Ponts MP 2016**

On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, et e le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes dans la base canonique sont égales à 1. Soit M une matrice carrée symétrique de taille n telle que :

- Sur chacune de ses lignes, d coefficients sont égaux à 1 et les autres sont nuls.
- Ses coefficients diagonaux sont tous nuls.
- Pour tout $i \neq j$: si $m_{ij} = 0$, alors il existe un unique k tel que $m_{ki} = m_{kj} = 1$ et si $m_{ij} = 1$, alors il n'existe pas de tel k.

1. Quelles sont les valeurs propres de J ?
2. Écrire MJ, JM et M^2 comme combinaison linéaire de M, J et I_n.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(M - dI_n) = \mathrm{Im}(J)$. En déduire une relation entre d et n.
4. Montrer que les valeurs propres de M autres que d sont racines du polynôme $X^2 + X + 1 - d$.

II.2.730 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur le segment $[0\,;1]$, muni de la norme uniforme. Soit u l'application définie sur E par :

$$u(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer que $\sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{|u(f)|}{\|f\|} = 1$, mais que cette valeur n'est pas atteinte.

II.2.731 **ENSEA/ENSIIE MP 2016**

Soit $P_1 = X^3 - 12X - 12$ et $P_2 = X^3 + 12X - 12$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler ce que signifie « α est racine de multiplicité n de P » et donner une condition nécessaire et suffisante pour que α soit racine de multiplicité n de P.
2. (a) Combien de racines réelles admet P_1 ? Donner leur ordre de multiplicité.
   (b) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P_1(M) = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P_2(M) = 0$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M est une matrice scalaire.

II.2.732 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in S_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$ et si $M^T M = MM^T$.

II.2.733 **CCINP PC 2017**

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.

1. Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
4. Prouver que f est surjectif.
5. Trouver tous les polynômes P tels que :

$$P(X+1) - P(X) = X^2.$$

6. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

II.2.734 **X ESPCI**

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas la somme de deux carrés de $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.735 **Mines-Ponts MP**

1. Soit E_1, E_2, E_3 des espaces vectoriels de dimension finie.
   Soit $f \in L(E_1, E_2)$, $g \in L(E_1, E_3)$ tels que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
   Montrer qu'il existe $h \in L(E_2, E_3)$ tel que $g = h \circ f$.
2. On suppose ici $E = M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit ϕ une forme linéaire de E. Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que :

$$\forall M \in E,\ \phi(M) = \mathrm{Tr}(CM).$$

   (b) Soit A une matrice nilpotente de E. Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que :

$$\forall M \in E,\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(C(AM - MA)).$$

   En déduire que $A = CA - AC$.

II.2.736 **CCINP PC 2024**

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de A.

II.2.737 **Centrale-Supélec PSI 2025**

Soit E un espace euclidien, $f \in L(E)$ bijective vérifiant pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

On définit $s = f \circ f$.

1. Montrer que s est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit λ une valeur propre de s. Montrer que $\lambda < 0$. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Soit x un vecteur non nul appartenant au sous-espace propre relatif à λ. On pose $F = \mathrm{Vect}(\{x; f(x)\})$. Montrer que F est un plan vectoriel stable par f et que $F^\perp$ est stable par f.
4. Montrer alors que dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ bien choisie, $(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

II.2.738 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ et

$$\Delta : M \in M_p(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $M_p(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (M; N) \in M_p(\mathbb{R})^2,\ \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(M)\Delta^{n-k}(N).$$

2. Soit $H \in M_p(\mathbb{R})$. On suppose que $B = \Delta(H)$ commute avec A. Montrer que $\Delta^2(H) = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$.
3. Montrer que $\Delta^n(H^n) = n!B^n$.
4. En déduire que B est nilpotente.

II.2.739 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$ des matrices réelles.

1. Calculer U^2. Déterminer les éléments propres de U.
2. Déterminer les éléments propres de V et W.
3. Montrer que l'on peut trouver une base de vecteurs propres commune à U, V et W.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quels sont les éléments propres de A ? À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle inversible ?

II.2.740 **Mines-ponts MP 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = A - I_n$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec N.
2. Soit $(E) : A = X^2$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si X est solution de (E), alors il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que :
   $$X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \alpha_1 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer qu'il existe au plus deux solutions de (E).
3. (a) Donner le développement limité au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ à la précision $o(x^n)$.
   (b) Résoudre (E).

II.2.741 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

La matrice A est-elle inversible ?

II.2.742 **Mines-Ponts PSI 2013**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. Supposons que $\text{rang}(f) = 2$. Exprimer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\text{Tr}(f)$ et $\text{Tr}(f^2)$.
2. Supposons que $\text{rang}(f) = 3$. Exprimer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\text{Tr}(f)$, $\text{Tr}(f^2)$ et $\text{Tr}(f^3)$.

II.2.743 **CCINP PSI 2016**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que K est diagonalisable.
2. Montrer que M s'écrit en fonction de puissances de K.
3. Diagonaliser M.
4. En déduire M^n.

II.2.744 **Centrale-Supélec PSI 2016**

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Énoncer le théorème spectral.
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer alors qu'il existe O orthogonale et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

II.2.745 **ENS 2025**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. Montrer que :

$$u \text{ est simple } \iff \chi_u \text{ est irréductible dans } \mathbb{K}[X].$$

II.2.746 **CCINP PC 2015**

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E, A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique. On étudie la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur $x = (x_1; \dots; x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x)\rangle - 2\langle x, u\rangle$.

1. Ici $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = (5; 1)$. Vérifier que :

   $$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2.$$

   Montrer que $X_0 = (2; 1)$ est un point critique de f.
2. Avec les conditions de la question 1, soit $h = (h_1; h_2)$. Montrer que

   $$f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2,$$

   où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0.
3. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E, $\langle x, \varphi(x)\rangle > 0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ, montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

II.2.747 **CCINP PC 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \quad \text{et} \quad \rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

1. Déterminer la norme de $\|A\|$ et $\rho(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
3. (a) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrer que :

   $$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j|$$

   pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$.

   (b) En déduire que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
4. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle dans $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.
5. Montrer que $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II.2.748 **CCINP PSI 2021**

Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice H est-elle diagonalisable ?
2. Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

   $$R(a; b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix},$$

   notée plus simplement R.

   Exprimer R en fonction de H et I_3. La matrice R est-elle diagonalisable ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}(H^n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs entières et diverge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \mathrm{Tr}(R^n)$. Peut-on trouver a et b tels que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

II.2.749 **CCINP MP 2015**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Comparer $\det(A)$ et $\det(-A)$.
2. (a) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Discuter de la parité du polynôme caractéristique de B.

   (b) Retrouver le fait que si n est impair et $B \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det(B) = 0$.

II.2.750 **CCINP PSI 2021**

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_m.
2. Donner, si existence, les valeurs de m telles que A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable, déterminer la matrice de passage P.

II.2.751 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que 0 est la seule matrice qui vérifie $AM = MB$. Montrer que toute matrice s'écrit de façon unique comme $AN - NB$.
2. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que la seule matrice qui vérifie $AM = MB$ est la matrice nulle.
3. Est-ce encore le cas dans $M_n(\mathbb{R})$?

II.2.752 **Centrale-Supélec MP 2016**

1. Donner le polynôme caractéristique de $A \in M_2(\mathbb{R})$ en fonction de sa trace et de son déterminant.
2. Soit E l'ensemble des nombres premiers p tels que :

$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}),\ A^p + \cdots + A = pI_2.$$

   Montrer à l'aide de $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ que $\{2\,;3\} \subset E$.
3. Montrer que pour tout $p \in E$ et A associé, $X^{p+1} - (p+1)X + p$ annule A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que 1 est sa seule valeur propre réelle.

II.2.753 **Centrale-Supélec MP 2017**

On se donne un espace vectoriel de dimension finie E et $u \in L(E)$. On considère les deux propositions :

- (P_1) : Il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.
- (P_2) : Il existe a et b des endomorphismes de E tels que $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$.

1. Montrer que (P_1) implique (P_2).
2. On suppose ici que u est un automorphisme. Montrer que si (P_2) est vérifiée alors $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Im}(b)$.
3. Montrer que (P_2) implique (P_1) dans chacun des cas suivants :
   (a) u est un automorphisme ;
   (b) u est nilpotent.

II.2.754 **CCINP PSI 2017**

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$. On définit le produit scalaire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
3. Que vaut $\operatorname{dist}(1; E)$?

II.2.755 **CCINP MP 2017**

Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est orthogonale.
2. Étudier la nature de A et ses éléments caractéristiques.

II.2.756 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Déterminer une condition sur λ réel tel qu'il existe A une matrice antisymétrique réelle vérifiant $A^2 = \lambda I_n$.
2. Déterminer les matrices B symétriques réelles telles qu'il existe A une matrice antisymétrique réelle vérifiant $A^2 = B$.

II.2.757 **Mines-Ponts MP 2019**

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^A = I_n$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.

II.2.758 **Mines-Télécom PSI 2018**

L'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée d'un espace euclidien. Déterminer la nature de f.

II.2.759 **Centrale-Supélec PC 2022**

Pour tout $(\alpha; \beta) \in [0\,; 1]^2$, on définit la matrice

$$A(\alpha; \beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(A(\alpha; \beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
2. Dans le cas de convergence, déterminer le rang de la matrice limite.

II.2.760 **CCINP PC 2022**

Soit $(p;q) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation (E) suivante :

$$M^2 + pM + qI_n = 0$$

d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On pose $\Delta = p^2 - 4q$. Vérifier l'identité :

$$M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2}I_n\right)^2 - \frac{\Delta}{4}I_n.$$

   On suppose désormais que $\Delta > 0$.

2. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre l'équation $Y^2 = I_n$, d'inconnue $Y \in M_n(\mathbb{R})$.

3. Élever la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ au carré. En déduire une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs mais pas diagonale, solution de $Y^2 = I_n$.

   On considère une solution de (E), notée A, et on suppose que A n'est pas colinéaire à I_n.

4. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M = \alpha A + \beta I_n$.
   (a) Montrer que l'égalité $M^2 = M$ équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha(2\beta - \alpha p - 1) = 0 \\ \beta^2 - \beta - \alpha^2 q = 0 \end{cases}$$

   (b) Montrer que ce problème a exactement quatre solutions.
   Les matrices correspondantes différentes de 0 et de I_n sont notées U et V.
   (c) Calculer les produits UV et VU. Commenter.

II.2.761 **Mines-Ponts MP 2024**

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in M_n(\mathbb{R})$ pour qu'il existe $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S^2 + S + I_n$.
2. Déterminer $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une unique matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S^2 + S + I_n$.

II.2.762 **CCINP PC 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Pour quelles valeurs de a la famille $\{A; A^2\}$ est-elle liée ?
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.763 **CCINP PC 2018**

Soit E un espace vectoriel tel que $\dim(E) = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Soit encore $f \in L(E)$.

1. Si λ est une valeur propre et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?
2. Supposons $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_E$. Justifier que f admet au moins une valeur propre réelle et la donner.

II.2.764 **CCINP PC 2022**

Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b; c; d)$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

II.2.765 **CCINP PSI 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' = -x + 3y - 2z \\ y'' = -3x + 5y - 2z \\ z'' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

II.2.766 **Mines-Ponts**

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini à q éléments. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

II.2.767 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $u \in L(E)$.

1. Montrer que si u est de rang r, alors son polynôme minimal a un degré inférieur ou égal à $r + 1$.
2. Dans le cas général, peut-on améliorer cette majoration ?

II.2.768 **Mines-Ponts MP 2019**

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n}\right) & \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \cos\left(\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}^n.$$

II.2.769 **Centrale-Supélec MP 2016**

Soit $P = X^2 + \alpha X + \beta$ un polynôme n'ayant pas de racine réelle, E un espace vectoriel réel de dimension n, et $f \in L(E)$ telle que $P(f) = 0$.
On cherche à prouver qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

1. Montrer que n est pair et que f n'admet pas de valeur propre.
2. Soit $x \in E$ et $y = f(x) + \alpha x$. On pose $H_x = \mathrm{Vect}(\{x; y\})$. Montrer que H_x est stable par f.
3. Démontrer le résultat annoncé.

II.2.770 **CCINP MP 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $f \in L(E)$ de rang 1.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si f est non diagonalisable.
2. Donner un exemple concret d'une matrice à coefficients réels de taille 3×3 de rang 1 qui ne soit pas diagonalisable. Justifier par une autre méthode qu'elle n'est pas diagonalisable.

II.2.771 **Mines-Ponts PC 2019**

On considère une suite complexe $(a_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $a_2 \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique et noté χ_n.

1. Déterminer χ_2 et χ_3.
2. Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2}.
3. On pose $b_n = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$. Montrer alors que $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$.
4. Selon que b_n est nul ou non, étudier la diagonalisabilité de A_n.

II.2.772 **Mines-Télécom MP 2019**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable.

II.2.773 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver les éléments propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que A est semblable à la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Calculer T^n puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.774 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note E_T l'ensemble des suites réelles T-périodiques. On note σ l'endomorphisme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de E_T. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

II.2.775 **ENS MP 2019**

Soit $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(XYXY) \leqslant \mathrm{Tr}(X^2Y^2)$.

II.2.776 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Étudier la réciproque.

II.2.777 **ENSEA/ENSIIE PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs propres de la matrice B.

II.2.778 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A ne peut pas avoir de valeurs propres réelles.
2. Montrer que n est nécessairement pair.
3. Trouver le déterminant et la trace de A.

II.2.779 **X PC 2008**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{C})$ l'équation :
$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.780 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Rappeler la forme des solutions de $au_{n-2} + bu_{n-1} + cu_n = 0$ pour $a \neq 0$.
2. Étudier l'inversibilité de A_n.
3. Étudier la diagonalisabilité de A_n dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

II.2.781 **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $(X-1)^2(X+1)$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que M est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II.2.782 **Mines-Ponts MP 2015**

Trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

II.2.783 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit n un entier supérieur à 3 et $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer les éléments propres de A_n.

II.2.784 **CCINP MP 2015**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et p un entier naturel, avec $p \geqslant 2$. Soit $e_1,\dots,e_p$ p vecteurs de E tels que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant p$, si $i \neq j$, alors $\langle e_i, e_j\rangle < 0$.

1. Pour $1 \leqslant i,j \leqslant p$, comparer $\lambda_i\lambda_j\langle e_i,e_j\rangle$ et $|\lambda_i||\lambda_j|\langle e_i,e_j\rangle$.
2. Comparer $\left\|\sum\limits_{k=1}^{p-1}\lambda_k e_k\right\|^2$ et $\left\|\sum\limits_{k=1}^{p-1}|\lambda_k| e_k\right\|^2$.

   Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p-1}\lambda_k e_k = 0_E \implies \sum\limits_{k=1}^{p-1}|\lambda_k| e_k = 0_E$.
3. Montrer que toute sous-famille de $p-1$ vecteurs extraite de $\{e_1;\dots;e_p\}$ est libre.

II.2.785 **Mines-Ponts**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(u;v) \in L(E)^2$, on note $[u,v] = uv - vu$. Soit $f,g \in L(E)^2$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f,g] = \alpha f$.
   (a) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $[f^p, g]$ et en déduire que f est nilpotente.
   (b) Montrer que f et g sont trigonalisables dans la même base.
2. On suppose qu'il existe $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^{*2}$ tel que $[f,g] = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g sont trigonalisables dans une même base.

II.2.786 **X MP 2017**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et deux polynômes $A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$f(P) = AP'' + BP'.$$

On suppose de plus que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_2 + \beta_1 \neq 0.$$

Montrer que f est diagonalisable.

II.2.787 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1;\dots;e_n)$ une base de E.
On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1;\dots;\varepsilon_n)$ la base $\mathcal{B}$ orthonormalisée selon le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Rappeler le procédé de Schmidt ainsi que l'expression des ε_i en fonction de e_i.
2. Prouver que $(\mathrm{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \prod\limits_{i=1}^{n}\langle e_i, \varepsilon_i\rangle$.
3. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}''$ orthonormale de E, on a :

$$\left|\det((\mathrm{Id}_E))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|e_i\| \quad (*)$$

4. Prouver que $(*)$ devient une égalité si et seulement si $(\mathrm{Id}_E)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est diagonale.

II.2.788 **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs tels que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,,3]\!]^2,\ a_{ij}a_{ji} = 1.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. On suppose que A n'est pas inversible. Étudier la réduction de A.
3. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.
   Montrer que dans cette condition, A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. L'est-elle dans $\mathbb{C}$?

II.2.789 **Centrale-Supélec PSI 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -8 & \frac{13}{3} & -\frac{14}{3} \\ -4 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (u;v;w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.790 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $p \in]0\,;1[$. On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$u(f) : x \longmapsto f(p(x-1)+1).$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

II.2.791 **ENSAM PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

II.2.792 **TPE/EIVP PC 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. La matrice $M = A + I_n$ est-elle inversible ?

II.2.793 **ENSAM PSI 2015**

Soit m et p deux entiers tels que $m \geqslant p \geqslant 1$ et $\Delta(m;p)$ le déterminant suivant :

$$\Delta(m;p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+1}{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \cdots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Déterminer $\Delta(m;p+1)$.

II.2.794 **Mines-Télécom PC 2022**

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.
2. Soit $A \in M_7(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\}$.
   Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de A et le déterminant de A.

II.2.795 **Mines-Ponts PSI 2016**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, d'indice p, et telle que $M^T M = M M^T$.

1. Déterminer $M^T M$.
2. Déterminer M.

II.2.796 **CCINP PSI 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rang}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

II.2.797 **CCINP PSI 2015**

Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls et H une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(HD) \leqslant \mathrm{Tr}(D)$.

II.2.798 **CCINP PSI 2015**

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Trouver une majoration de la somme de ses coefficients meilleure que n^2.

II.2.799 **TPE/EIVP PC 2017**

Soit dans un espace vectoriel euclidien f telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple de vecteurs x, y, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que f conserve la norme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire.
3. Montrer que f est linéaire.
4. Que peut-on conclure sur f ?

II.2.800 **ENSAM PSI 2015**

Étant donné un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on note $\alpha = \|\vec{u}\|$. On considère

$$f : \vec{x} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$$

endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$. Calculer $f \circ f$.
   On rappelle que :
   $$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$
2. Déterminer la matrice A de f et A^2 dans la base canonique.
3. Déterminer f^n en fonction de α, f et f^2.
4. Déterminer l'endomorphisme suivant :
   $$\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

II.2.801 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien et $(y_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs telle qu'il existe $A, B > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice de E.
2. On considère dans cette question uniquement :
   $$E = \mathbb{R}^2 \text{ et } y_1 = (1;0),\ y_2 = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}; -\tfrac{1}{2}\right),\ y_3 = y_2.$$
   Montrer que cette famille convient.
3. On suppose ici que $A = B = 1$ et que, pour tout $j \in J$, $\|y_j\| = 1$. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est une base orthogonale de E.
4. On suppose seulement $A = B$. Montrer que :
   $$\forall x \in E,\ x = \tfrac{1}{A} \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j.$$

II.2.802 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

II.2.803 **Centrale-Supélec PSI 2022**

On note $I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $E = C(I, \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $f \in E$, on définit deux fonctions $A(f)$ et $B(f)$ sur I en posant :

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que :
$$\forall (f; g) \in E^2,\ \langle A(f), g\rangle = \langle f, B(g)\rangle.$$
En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont toutes positives.
2. Montrer que :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ (A(f)(x))^2 \leqslant x \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
En déduire l'existence d'un réel K indépendant de f tel que $\|A(f)\| \leqslant K\|f\|$.
3. Montrer que A est un endomorphisme continu de E.

II.2.804 **Central-Supélec MP 2019**

1. Montrer que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que B et B^T ont les mêmes valeurs propres. On suppose que A et B ont une valeur propre commune. Montrer qu'il existe $C \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.
   (b) On suppose maintenant que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que la seule matrice complexe C telle que $AC = CB$ est $C = 0$.

II.2.805 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit E l'ensemble des fonctions de classe infinie sur $\mathbb{R}$ et D l'opérateur de dérivation sur E. On définit les quatre fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cosh(x), \quad f_2(x) = \sinh(x), \quad f_3(x) = x\cosh(x), \quad f_4(x) = x\sinh(x).$$

Soit $B = (f_1; f_2; f_3; f_4)$ et $F = \mathrm{Vect}(B)$.

1. Montrer que B est une base de F.
2. Montrer que D induit un endomorphisme d sur F.
3. Écrire la matrice A de d dans B.
4. Calculer A^4 et trouver un polynôme annulateur de d.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

II.2.806 **CCINP MP 2019**

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que :

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n.$$

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.
   (b) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
   (c) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
   (d) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1} = \widetilde{P^{-1}}$.
2. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.
   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que si A est diagonalisable, $\widetilde{A}$ l'est aussi.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

II.2.807 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent et B est nilpotente.

1. Démontrer que $\det(I_n + B) = 1$.
2. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

II.2.808 **Mines-Ponts PC 2014**

Soit A une matrice non nulle de $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est la matrice nulle.

1. Que vaut la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$?
2. Déterminer la dimension de $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$.

II.2.809 **Mines-Ponts PC 2016**

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et A^T sont semblables.

II.2.810 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit a un nombre réel différent de 0, 1 et -1. On suppose que M et aM sont semblables.

1. Montrer que si x est une valeur propre de M, alors pour tout naturel k non nul, xa^k est une valeur propre de M.
2. En déduire que M est nilpotente.

II.2.811 **ENSEA/ENSIIE**

Trouver l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation $A^3 + A = 2I_n$.

II.2.812 **ENS MP 2018**

Soit $(A;B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = I_n$. Montrer que $BA = I_n$.

II.2.813 **Mines-Télécom MP 2016**

1. Donner le théorème du rang.

   Soit f et g des endomorphismes de E.
2. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) \leqslant n$.
3. On suppose que $g + f$ est bijective. Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) \geqslant n$.

II.2.814 **X MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A^3 = A^2$. Calculer $\exp(A)$.
2. On suppose $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Calculer $\exp(A)$.

II.2.815 **CCINP MP 2016**

1. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A(X)$ son polynôme caractéristique.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_A(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_A(x)$ et $\chi_A(0)$.
3. On suppose $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

II.2.816 **Mines-Ponts MP 2015**

Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} (A + I_n)^7 - (A^7 + I_n) = 0 \\ \mathrm{Tr}(A) = 0 \end{cases}$$

II.2.817 **CCINP PSI 2021**

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^T M$.
   La matrice M est-elle inversible ?
2. On pose $N = (M^{-1})^T M$.
   Montrer que $N \in O_{n+1}(\mathbb{R})$.

II.2.818 **Mines-Télécom PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2.
2. Calculer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

II.2.819 **TPE/EIVP PSI 2019**

Soit

$$\phi(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le déterminant de $\phi(a;b)$.
2. Déterminer, pour $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 = yz$, le déterminant de

$$M = \begin{pmatrix} 2x & z & & & & \\ y & 2x & z & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & y & 2x & z \\ & & & & y & 2x \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

II.2.820 **CCINP PSI 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in L(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

II.2.821 **CCINP PSI 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$.

1. On suppose f surjective. L'application f^2 est-elle surjective ?
2. On suppose $f^3 = f$. Montrer que si f est injective, f est surjective.

II.2.822 **Mines-Ponts PSI 2015**

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E' l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in E$, on note :

$$T(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T(f)$ appartient à E, puis que T est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres de $T|_{E'}$.
   Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?

II.2.823 **X**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$ sont des multiples de 3.

II.2.824 **X-ENS/Mines/Centrale**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On considère l'application :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM + MB \end{array}$$

Quel est le spectre de f ?

II.2.825 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit $M \in M_3(\mathbb{C})$ semblable à $\mathrm{i}M$.

1. Soit λ une valeur propre de M. Montrer que $\mathrm{i}\lambda$ est aussi une valeur propre de la matrice M.
2. Montrer que M est nilpotente (i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$).

II.2.826 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\lambda = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

1. Prouver l'existence de λ, puis le calculer.
2. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer de deux manières que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \lambda = 0$.

II.2.827 **Mines-Télécom PSI 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente telle que $AA^T = A^T A$. Montrer que $A = 0$.

II.2.828 **Mines-Télécom PSI 2016**

On considère l'endomorphisme :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' + P \end{array}$$

Déterminer $\det(f)$.

II.2.829 **CCINP PSI 2016**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ et $A \neq 0$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. On suppose que 0 appartient au spectre de A. Déterminer ce spectre.
3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

II.2.830 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle classe de A l'ensemble :

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

On suppose que la classe de A est bornée.

1. On appelle *matrice de dilatation* toute matrice de la forme $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que A est diagonale en utilisant les matrices de dilatation. Montrer que toutes les matrices appartenant à la classe de A sont diagonales.
2. En utilisant les matrices $M_i = I_n + E_{i,i+1}$, montrer que A est une matrice scalaire.

II.2.831 **TPE/EIVP PC 2015**

Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Soit les propositions suivantes :
   (P_1) $f \circ g \circ f = f$
   (P_2) $g \circ f \circ g = g$
   (P_3) $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(g)$
   (a) Montrer que (P_1) et (P_2) entraînent (P_3).
   (b) Montrer que (P_3) et (P_1) entraînent (P_2).

II.2.832 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
2. On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer que $f \circ g$ est aussi diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \backslash]0\,;4]$.

II.2.833 **ENSEA/ENSIIE PC 2014**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel normé euclidien de dimension n. Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,, p]\!]^2,\ i \neq j,\ \langle u_i, u_j \rangle = -1.$$

On considère pour tout $(u;v) \in E^2$ et pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle\langle (u;x), (v;y) \rangle\rangle = \langle u, v \rangle + xy.$$

1. Montrer que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est un produit scalaire.
2. Que peut-on dire de la famille $((u_i;1))_{1 \leqslant i \leqslant p}$? En déduire une inégalité entre p et $n+1$.

II.2.834 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Établir l'équivalence :

$$M \text{ non diagonalisable} \iff M = D + T \text{ avec } D \text{ scalaire et } T \text{ nilpotente non nulle}$$

Étudier les matrices $X \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.2.835 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit $\hat{f}$ par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\phi : f \mapsto \hat{f}$ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de ϕ.
3. L'endomorphisme ϕ_n induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

II.2.836 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \geqslant 2$ entier et α réel. On considère la matrice suivante :

$$A = \left(\alpha^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

II.2.837 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G ont même dimension si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = F \oplus H$ et $E = G \oplus H$, c'est-à-dire s'ils ont un supplémentaire commun H.

II.2.838 **Mines-Ponts PC 2016**

Soit f et g des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(g \circ f).$$

II.2.839 **Mines-Ponts Pc 2015**

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Trouver la relation entre $\dim(\mathrm{Ker}(AB))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(B))$. Étudier le cas d'égalité.

II.2.840 **Mines-Ponts PSI 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi(X;Y) = \begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

II.2.841 **Mines-Ponts PSI 2013**

On considère le déterminant suivant :

$$\det(A + xB)$$

avec A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Quel type de fonction est-ce ? (sinus, exponentielle,...)
2. Déterminer le degré de ce déterminant.

II.2.842 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée. On considère :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A & : & S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & & S & \longmapsto & ASA^T \end{array}$$

Montrer que $\det(\varphi_A) = (\det(A))^{n+1}$.

II.2.843 **ENS**

Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \geqslant n,\ A + A^k = A^T.$$

II.2.844 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_2(\mathbb{C})$.

Trouver le rayon de la convergence de la série entière $\sum \|A^n\| z^n$.

II.2.845 **Centrale-Supélec PSI 2014**

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$(f - \mathrm{Id})^3 \circ (f - 2\mathrm{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\mathrm{Id}) \neq 0.$$

L'application f est-elle diagonalisable ?

II.2.846 **Mines-Ponts MP 2014**

On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par M.

II.2.847 **X MP 2014**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé. On note :

$$\mu(E) = \sup_{(x;y)\in E^2\setminus\{(0;0)\}} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Montrer que $1 \leqslant \mu(E) \leqslant 2$.
2. Montrer que E est euclidien si et seulement si $\mu(E) = 1$.

II.2.848 **X-ENS Cachan PSI 2016**

On considère une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note :

$$p(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

1. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(A^k) = p(A)^k$.
2. Montrer que l'application $A \mapsto p(A)$ définit une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
   (a) Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$.
4. Soit $\|\cdot\|$ une norme vérifiant :

   $$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}),\ AB = BA \implies \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\| \quad (1)$$

   Montrer que, pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\| \geqslant p(A)$.
   (Autrement dit, p est la plus petite norme vérifiant la propriété (1).)

II.2.849 **Centrale-Supélec MP 2014**

Soit E un espace euclidien de dimension n. Trouver tous les vecteurs $x \in E$ tels qu'il existe une base orthonormée $(e_1; \ldots; e_n)$ de E telle que $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

II.2.850 **Mines-Ponts PSI 2015**

On se donne deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ et on considère l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi : M \longmapsto AMB.$$

1. Montrer que :

   $$\varphi = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

2. Montrer que :

   $$\varphi \text{ est nilpotente} \iff A \text{ ou } B \text{ est nilpotente.}$$

3. Montrer que :

   $$\varphi \text{ est diagonalisable} \implies A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}$$

4. Qu'en est-il de la réciproque ?

II.2.851 **Mines-Ponts PSI 2025**

Soit $\varphi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

2. Montrer que
$$(P;Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle H_n, P\rangle = \langle H_{n-1}, P'\rangle.$$
   (b) Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale.
   (c) Calculer $\|H_n\|^2$.

4. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

   Étudier la nature de cette série et sa valeur éventuelle.

II.2.852 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, M^p est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^p)$.

II.2.853 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $M \in M_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rang}(M) = 2n$ et $M^3 = 0$.

Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0 \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

II.2.854 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $S = A^T A$.

1. Quelle est la particularité de S ? Quelle(s) conséquence(s) ?
2. Montrer que les valeurs propres de S sont positives.
3. Quel est le lien entre les noyaux de A et S ? En déduire un lien sur d'autres sous-espaces particuliers.
4. On suppose $A^2 = A$. Montrer que les valeurs propres de S non nulles sont supérieures à 1.

II.2.855 **Mines-Ponts MP 2025**

Trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}),\ P(A) \in O_n(\mathbb{R}).$$

II.2.856 **CCINP PC 2016**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f_1, \ldots, f_k$ des endomorphismes non nuls de E vérifiant :

$$\text{Pour tous } i \text{ et } j \text{ distincts dans } [\![1\,,k]\!],$$
$$f_i \circ f_j = 0 \text{ et } f_1 + \cdots + f_k = \mathrm{Id}_E.$$

1. Pour tout $i \in [\![1\,,k]\!]$, calculer $f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k)$.
   En déduire que f_i est un projecteur.
2. (a) Justifier que le somme $\mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$ est directe.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_k)$.

   Dans toute la suite, $\mathcal{B}$ désigne une base de E adaptée à cette décomposition.
3. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des complexes deux à deux distincts et soit $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$.
   (a) Montrer que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de f^p en fonctions de p, des f_i et des α_i.
4. (a) Montrer que la famille $\{f_1; \ldots; f_k\}$ est libre.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1\,,k]\!]$, la famille $\{f_i; \mathrm{Id}_E; f; \ldots; f^{k-1}\}$ est liée.
   (c) Montrer que la famille $\{\mathrm{Id}_E; f; \ldots; f^{k-1}\}$ est libre.

II.2.857 **Centrale-Supélec MP 2015**

1. Soit f et g deux formes linéaires non nulles d'un espace vectoriel E. Montrer que f et g sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.

   Soit $f_1, \ldots, f_n, f$ des formes linaires d'un espace vectoriel réel E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f_1(x) \geqslant 0, \ldots, f_n(x) \geqslant 0$ implique $f(x) \geqslant 0$. On veut montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.
2. Montrer cette propriété pour $n = 1$.
3. Établir le cas général. (On pourra restreindre $f_1, \ldots, f_n$ à $\mathrm{Ker}(f_n)$).

II.2.858 **Mines-Ponts MP 2017**

On considère un espace euclidien E, ainsi qu'une base $(e_1; \ldots; e_n)$ de E orthonormale.

1. Soit f un endomorphisme de E. Vérifier que :
$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(e_k), e_k \rangle.$$
2. Soit f et g deux endomorphismes symétriques de E ayant leurs valeurs propres positives. Montrer que :
$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(f \circ g) \leqslant \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g).$$
3. On suppose de plus que f est inversible.
   Dans quel cas a-t-on $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$? Et $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g)$?

II.2.859 **X MP 2017**

Soit ρ une matrice symétrique positive. On dit que ρ est *un état* si $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. On note Π_V la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\{V\})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(\Pi_V A) = \langle V, AV \rangle$.
2. Soit ρ un état. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Pi_{V_i}$.
3. Soit ρ un état. On dit que ρ est *un état pur* si, et seulement si, tous les λ_i sont nuls sauf un. Montrer qu'un état ρ est pur si, et seulement s'il existe P un projecteur orthogonal de rang 1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Tr}(\rho P) = 1$.
4. Montrer qu'un état ρ est pur si et seulement si $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$.
5. Dans le cas $n = 2$, montrer que les états purs sont exactement les matrices

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 1-\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

II.2.860 **Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et

$$A_n = \left(\omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n}.$$

Calculer $A_n \overline{A_n}$. En déduire $|\det(A_n)|$, puis l'inversibilité de A_n et A_n^{-1}.

2. Quels sont les $\theta \in \mathbb{C}$ tels que

$$A_n(\theta) = \left(\theta^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$$

soit inversible ?

II.2.861 **X ESPCI 2017**

Soit p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.
2. Montrer que $p_1 + p_2$ est une symétrie si et seulement si $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.

II.2.862 **Mines-Ponts MP 2018**

On considère un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit f et g deux endomorphismes symétriques tels que :

$$\forall x \in E,\ |\langle x, f(x) \rangle| \leqslant \langle x, g(x) \rangle.$$

Montrer que $|\det(f)| \leqslant \det(g)$.

II.2.863 **TPE/EIVP MP 2017**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ a_{ij} \in]0\,;1[\text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que $|\det(A)| \leqslant 1$.
2. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp}(A)$.
3. Montrer que
$$b \in \operatorname{Sp}(A) \implies |b| \leqslant 1$$
puis que
$$|b| = 1 \implies b = 1.$$

II.2.864 **CCINP PSI 2017**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulles. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\Phi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$$

et

$$\Psi(M) = M + \operatorname{Tr}(AM)B.$$

1. Montrer que Φ est linéaire et donner la dimension de son noyau et de son image.
2. Montrer que si λ est valeur propre de Ψ différente de 1, alors toute matrice propre associée M est colinéaire à B.
3. Trouver les autres valeurs propres de Ψ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Ψ soit diagonalisable.

II.2.865 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On suppose que pour tout X dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T BX > 0$. Montrer que $A + \mathrm{i}B$ est inversible.

II.2.866 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f_A \in L(M_n(\mathbb{R}))$ définie par $f_A(M) = AM$.
Montrer que $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(f_A)$.

II.2.867 **Mines-Ponts PC 2015**

Soit

$$H = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax + by + cz + dt = 0\}$$

et

$$H' = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid a'x + b'y + c'z + d't = 0\}.$$

1. Montrer que $H \cap H'$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de l'intersection.

II.2.868 **CCINP PC 2018**

Soit $E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum x_n^2 \text{ converge}\}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

1. Calculer $(|a| - |b|)^2$ et montrer que $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geqslant |ab|$.
2. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \end{array}$$
   Montrer que φ est bien définie sur $E \times E$ et que φ est un produit scalaire sur E. En déduire que
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$$
   est une norme sur E.
4. On suppose que E est muni de cette norme. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, alors la suite $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi dans E.
5. Soit $g : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; ((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E \times E$:
$$\|g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) - g((y_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \leqslant k\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|.$$

II.2.869 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice H dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = H^3 + H$.

II.2.870 **CCINP PC 2018**

Soit $M \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne $n+1$ et de la colonne $n+1$ qui valent tous 1. Montrer que M est diagonalisable, puis trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

II.2.871 **Mines-Télécom PSI 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler les propriétés du déterminant, en particulier $\det(M^T)$ et $\det(\lambda M)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que M est antisymétrique.
   (a) Montrer que, si n est impair, M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que, si $n = 2$ et $M \neq 0$, alors M est inversible.
   (c) Peut-on affirmer que M est inversible ou non inversible si $n = 4$ et $M \neq 0$?

II.2.872 **ENS MP 2018**

Soit A et B dans $S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \leqslant \mathrm{Tr}((B-A)^2).$$

II.2.873 **Centrale-Supélec MP 2018**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de E. On pose $s_k = \sum_{i=1}^{k} e_k$ et $s_0 = 0$. Soit $u \in L(E)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1\,, n]\!],\ u(e_k) = 2s_n - s_k - e_k.$$

1. Justifier que l'on définit une unique application linéaire et donner la matrice $A = (u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Déterminer le spectre complexe de A et montrer qu'il est contenu dans un cercle.

II.2.874 **X MP 2018**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Caractériser les formes bilinéaires B sur E vérifiant :

$$\forall (x; y) \in E^2, \quad B(x; y) = 0 \implies B(y; x) = 0.$$

II.2.875 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et φ un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\forall (A; B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

1. Déterminer $\varphi(I_n)$.
2. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\varphi(E_{ii})$ est un projecteur de rang 1.
3. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit A_i un élément non nul de $\mathrm{Im}(\varphi(E_{ii}))$. Montrer que $\{A_1; \ldots; A_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

II.2.876 **CCINP MP 2021**

Soit $M \in M_p(\mathbb{C})$ et λ, μ deux nombres complexes distincts non nuls. On suppose trouvées deux matrices non nulles $A, B \in M_p(\mathbb{C})$ vérifiant $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse. (On pourra utiliser l'égalité $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).)
2. (a) Exprimer A en fonction de I_p et M.
   (b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

II.2.877 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et I un intervalle non vide et non réduit à un singleton. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall t \in I,\ \mathrm{e}^{tA} \in O_n(\mathbb{R}) \iff A \in A_n(\mathbb{R}).$$

II.2.878 **CCINP MP 2021**

Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension n, u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier naturel impair.
   (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme de symétrique v tel que $v^p = u$. (On pensera à la matrice représentative de u.)
   (b) Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que u.
   (c) Montrer que v est l'unique endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$.
2. Soit p un entier naturel pair et non nul.
   (a) A-t-on les mêmes résultats ?
   (b) Que peut-on dire si u est positif ? (C'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.)
   (c) Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

II.2.879 **CCINP MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. On suppose que $\det(f^2) \neq 0$ et que f^2 est diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
2. On suppose que $\det(f^2) = 0$ et que f^2 est diagonalisable. On suppose de plus que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

II.2.880 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$, et $\alpha \geqslant 0$.

1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?
2. Montrer que $I_n + \alpha A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$ est symétrique.

II.2.881 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0_n\}$.

1. L'ensemble A est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$, contenu dans A ?
3. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}$? On s'intéressera surtout au cas $n = 2$.

II.2.882 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace préhilbertien et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive, non nécessairement définie positive, et telle que :

$$\exists C > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,\ |\phi(x;y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

On note $(*)$ la proposition :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ |\phi(x;x)| \geqslant \|\alpha\|^2.$$

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors :

$$(*) \iff \phi \text{ est définie positive.}$$

2. On suppose que E est de dimension infinie et qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale totale de E.
   (a) Construire ϕ bilinéaire symétrique définie positive telle que :

$$\exists C > 0,\ \forall (x;y) \in E^2,\ |\phi(x;y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$$

   mais qui ne vérifie pas $(*)$.
   (b) Conclure que la boule unité fermée n'est pas compacte.

II.2.883 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère u un endomorphisme de E. On note χ le polynôme caractéristique de u.

1. Soit V et W deux sous-espaces de E stables par u et tels que $E = V \oplus W$. En notant χ' (respectivement χ'') le polynôme caractéristique de $u|_V$ (respectivement $u|_W$), montrer que $\chi = \chi'\chi''$.
2. On note $\chi = \prod_i P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de χ. Montrer que pour tout i, $\dim(\operatorname{Ker}(P_i^{\alpha_i})(u)) = \alpha_i \deg(P_i)$.
3. Si le polynôme minimal de u est χ, montrer que :

$$\forall k \leqslant \alpha_i,\ \dim(\operatorname{Ker}(P_i^k(u))) = k\deg(P_i).$$

II.2.884 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A est inversible et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que A^N soit symétrique réelle. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. On suppose que $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que A^N soit symétrique réelle. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. Que se passe-t-il si $\dim(\operatorname{Ker}(A)) > 1$?

II.2.885 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des *endomorphismes antisymétriques*, c'est-à-dire :

$$u \in \mathcal{A}(E) \iff \forall (x;y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle.$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0 \iff u \in \mathcal{A}(E).$$
   Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

   On suppose maintenant que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.
4. (a) Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique.

   Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\{x; u(x)\})$ est un sous-espace vectoriel stable par u.

   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$(u)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & \Large 0 & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & \Large 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix},$$

   avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ réels non nuls.

II.2.886 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $1, \dots, n$. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $DM = MD$.

II.2.887 **Mines-Télécom PSI 2018**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. La fonction f est-elle une symétrie vectorielle ?
2. La fonction f est-elle une isométrie vectorielle ?

II.2.888 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit A une matrice complexe carrée de taille n à coefficients complexes. Montrer l'équivalence entre :

i) $A\overline{A} = I_n$;

ii) il existe une matrice S complexe inversible telle que $A = S\overline{S}^{-1}$.

II.2.889 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme symétrique de E tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ soient égaux.

II.2.890 **Mines 2015**

On considère deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$, deux applications linéaires, $u \in L(E, F)$, $v \in L(F, E)$ telles que $v \circ u \in GL(E)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) = F$.

II.2.891 **Mines 2012**

Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

II.2.892 **CCINP 2016**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et pour tout $i \leqslant p$, U_i un endomorphisme symétrique de E tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rang}(U_i) = \dim(E)$ et tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle U_i(x), x\rangle = \|x\|^2$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} U_i = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que U_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(U_i)$.

II.2.893 **CCP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
2. Donner un élément de $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $g \in L(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.
   Que peut-on en déduire ?

II.2.894 **CCP 2017**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. On suppose que $a > 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a < 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Il sera essentiel au cours de la discussion de préciser le corps de référence, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.2.895 **Mines-Ponts MP 2022**

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ qui à la matrice de terme $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ associe la matrice de terme $(a_{n+1-j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Vérifier que u est linéaire.
2. Déterminer son spectre et les dimensions des sous-espaces propres.
3. L'application u est-elle diagonalisable ?

II.2.896 **CCINP MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. On suppose que f^2 est diagonalisable et que f est inversible.
   (a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2. Montrer que le polynôme
   $$\prod_{i=1}^{p} (X^2 - \lambda_p)$$
   est un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

II.2.897 **Centrale-Supélec MP 2018**

Pour tout j entier compris entre 0 et $2n$, on note :

$$f_j : t \longmapsto (\sinh(t))^j (\cosh(t))^{2n-j}.$$

On pose :

$$\mathcal{F} = \{f_0; \dots; f_{2n}\} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de F.
2. Soit d l'application de F dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à f associe f'.
   (a) Montrer que d définit un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer ses espaces propres.

II.2.898 **Mines 2016**

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un nombre réel α racine à la fois de χ_A et de son dérivé χ'_A. Montrer que pour tout $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, la famille $\{v; Av; A^2v; \dots; A^{n-1}v\}$ est liée.

II.2.899 **CCINP MP 2023**

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

II.2.900 **Mines-Ponts PC 2024**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que leur spectre soient disjoints.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A évalué en B est inversible.
2. Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB$ si et seulement si $X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

II.2.901 **Mines-Ponts MP 202**

Soit E l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $[0\,;1]$ que l'on munit du produit scalaire :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f;g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Soit v l'application de E dans lui-même qui à toute fonction $f \in E$ associe sa primitive nulle en 0.

1. Montrer que v est un endomorphisme.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme w tel que pour tout couple $(f; g)$ d'éléments de E, $\langle v(f), g\rangle = \langle f, w(g)\rangle$.
3. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de $v \circ w$?

II.2.902 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
Soit T défini pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres.

II.2.903 **X MP 2019**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$. Quelle est l'image par f d'un cercle de centre 0 et de rayon 1 ?

II.2.904 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $(a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique et le déterminant de la matrice M.

II.2.905 **Mines-Ponts PSI 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Soit x_0 un vecteur de E tel que $\mathcal{B} = \{x_0; f(x_0); f^2(x_0); \dots; f^{n-1}(x_0)\}$ soit une famille libre de E.

1. Minorer le rang de f.
2. Déterminer $C(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

II.2.906 **CCINP MP 2022**

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alos p est un endomorphisme symétrique.
2. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux.
   (a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.
   (b) Montrer que $(\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^{\perp} = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.
   (c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

II.2.907 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}^*, \phi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \phi(f)(0) = f(0).$$

1. Démontrer que la fonction ϕ ainsi définie est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ et les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ et déterminer les sous-espaces propres induits. (On confondra ici fonctions polynomiales et polynômes.)

II.2.908 **CCINP PC 2022**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$x + y + t = 0 \quad \text{et} \quad z = 0 \quad \text{où } (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4.$$

Déterminer une base orthonormée de F.

II.2.909 **TPE/EIVP MP 2016**

Soit A et B deux matrices carrées de dimension n telles que AB admette n valeurs propres deux à deux distinctes. La matrice BA est-elle diagonalisable ?

II.2.910 **Centrale-Supélec MP 2025**

1. Donner une caractérisation des applications linéaires injectives et la démontrer.
2. Soit $x \in [0\,;1[$. On note :
$$K_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i.$$
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de $[0\,;1[$ à valeurs réelles. Pour $x \in [0\,;1[$ et $f \in E$, on note :
$$\phi(x) = \int_0^1 K_n(xt)f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que 0 est une valeur propre de ϕ.

II.2.911 **X MP 2017**

Soit S l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{N}^2,\ \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty.$$
Soit $\ell : S \to S$ une application linéaire telle que :
$$\forall f \in S,\ \ell(f') = (\ell(f))'$$
et en notant $h : x \to x$:
$$\ell(hf) = h\ell(f).$$
Montrer que $\ell = \lambda \mathrm{Id}_S$ pour un λ réel.

II.2.912 **ENS MP 2013**

Soit $\sigma \in S_n$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui à $x = (x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{C}^n$ associe $a_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)};\ldots;x_{\sigma(n)})$.

1. Quel est le spectre de a_σ ?
2. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les a_σ ?

II.2.913 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit A un polynôme de degré au plus n. On considère l'application :
$$\phi : P \longmapsto (AP)^{(n)}$$
pour tout polynôme P de degré inférieur à n.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit bijective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable.

II.2.914 **CCINP PC 2013**

Soit $(M_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de $M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout j, $M_j^2 = -I_n$ et pour $j \neq k$, $M_jM_k = -M_kM_j$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M_j. En déduire que la matrice est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(M_j)$ est inclus dans $\{-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.
   (b) Montrer que M_j est inversible et que n est pair.
   (c) Montrer que i et $-$i sont effectivement valeurs propres.
3. Montrer que les dimensions des sous-espaces propres de M_j sont égales et donner $\det(M_j)$.
4. Trouver un tel couple de matrices pour $n = 2$, puis pour $n = 4$.

II.2.915 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.916 **CCINP MP 2024**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est trigonalisable mais non diagonalisable.
2. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   (a) Justifier que M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont $-1, 0$ et 1.
   (c) Montrer que la dimension des sous-espaces propres de M est égale à 1.
3. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

II.2.917 **Mines-Ponts PSI 2024**

Soit $n \geqslant 2$ entier.

1. Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{Tr}(A^TA) > 0$. Pourquoi a-t-on l'inégalité $\mathrm{Tr}(A^TA) \neq 0$?
2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe A inversible telle que $S = A^TA$.
3. Montrer que :
$$\forall (S; S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathrm{Tr}(SS') > 0.$$

II.2.918 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, f et g dans $L(E)$ tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f.$$

1. Calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que f est nilpotent.
   Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : h \mapsto h \circ g - g \circ h$.

II.2.919 **Centrale-Supélec PSI 2021**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ possédant $p \geqslant 2$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On suppose que :

$$\forall i \in [\![2\,,p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1| \quad (*)$$

1. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Tr}(A^k) \neq 0$, $t_k = \dfrac{\mathrm{Tr}(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}(A^k)}$.

   Montrer que la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.
2. Justifier que si l'hypothèse $(*)$ n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut-être faux.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer la limite de $\frac{A^k}{k}$ quand k tend vers $+\infty$.

II.2.920 **Centrale-Supélec PC 2023**

1. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$d_P \ :\ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{array}$$

   Déterminer la matrice de d_P en fonction de P^T dans une base bien choisie.
2. Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$g_Q \ :\ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & QA \end{array}$$

   Déterminer la matrice de g_Q en fonction de Q dans une base bien choisie.
3. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme :

$$\varphi \ :\ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & P^{-1}AP \end{array}$$

   Déterminer $\det(\varphi)$ et $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

II.2.921 **X MP 2021**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

II.2.922 **Centrale-Supélec PSI 2023**

On définit $G = \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\}$.
Soit A et B dans G, de même trace α.

1. (a) Donner une condition suffisante sur α pour que A soit diagonalisable. Cette condition est-elle nécessaire ?
   (b) Donner une condition suffisante sur α pour que A et B soient semblables. Cette condition est-elle nécessaire ?

   Soit
$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}) \\ & & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \end{array}$$
   On a donc, pour tout t réel, $\phi'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $t \mapsto M\phi(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

3. Soit $A \in G$ de trace nulle. Montrer l'existence de ϕ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G vérifiant :
$$\begin{cases} \forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t) \\ \phi(0) = I_2 \quad \text{et} \quad \phi'(0) = A \end{cases}$$

II.2.923 **Mines-Ponts PSI 2023**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A)$.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ R_A(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}.$$

Soit $k \in [\![1\,,n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k.
On note $(e_1; \ldots; e_n)$ une base orthonormée telle que :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ Ae_i = \lambda_i(A)e_i.$$

1. Montrer que :
$$\forall X \in \mathrm{Vect}(\{e_1; \ldots; e_k\}) \setminus \{0\},\ R_A(X) \in [\lambda_1(A); \lambda_k(A)].$$

2. Montrer que :
$$\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k} \left(\max_{X \in V\setminus\{0\}} R_A(X) \right).$$

3. Soit A et B deux matrices symétriques réelles.
   En déduire que :
$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

II.2.924 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1. Soit H un hyperplan de E.
   Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $H = (\mathrm{Vect}(\{a\}))^\perp$.
2. Soit $(x_1; \ldots; x_{n+1}) \in E^{n+1}$ une famille de vecteurs unitaires tels que :
   $$\exists \alpha < 0, \text{ tel que } \forall i, j \in \{1; \ldots; n+1\}, \, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = \alpha.$$
   Déterminer α.
3. Montrer qu'une telle famille existe.

II.2.925 **Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier l'existence d'un réel d tel que $A^3 + dA = 0$.
2. Déterminer d.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.
4. Montrer que $\exp(A) = I_3 + \alpha A + \beta A^2$, où α et β sont deux réels à expliciter.

II.2.926 **CCINP PC 2021**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour $a \in E$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_α défini par :

$$f_\alpha \; : \; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \alpha \langle a, x \rangle a \end{array}$$

1. Soit $(e_2; \ldots; e_n)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(\{a\}))^\perp$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (a; e_2; \ldots; e_n)$ est une base orthonormée de E et trouver la matrice associée à f_α dans $\mathcal{B}$.
2. (a) Calculer $(f_\beta \circ f_\alpha)(x)$ et déterminer γ tel que $f_\gamma = f_\beta \circ f_\alpha$ en fonction de α et β.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f_α soit bijectif.
   (c) Préciser alors f_α^{-1}.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $s_a(V) = V$, où s_a est l'endomorphisme défini par $s_a(x) = x - 2\langle a, x \rangle a$.
   (a) Montrer que $s_a \in O(E)$.
   (b) Montrer que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$, puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.
4. Soit $g \in O(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

II.2.927 **CCINP PC 2018**

Soit E un espace euclidien et a, b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux.

1. Soit $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.
2. On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ avec $a \in \mathrm{Vect}(\{e_1\})$ et $b \in \mathrm{Vect}(\{e_2\})$. Préciser la matrice M de φ dans cette base.
3. Préciser les éléments propres de φ et déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
4. Généraliser l'étude à un espace vectoriel de dimension n.

II.2.928 **CCINP PSI 2018**

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Soit U et V deux matrices semblables et R un polynôme. Montrer que $R(U)$ est semblable à $R(V)$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P(A')$ et B.
3. Supposons que $B = 0$ et que A est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
4. Supposons que M est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable et que $B = 0$.

II.2.929 **ENS Lyon PC 2018**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\forall (i; j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $a_{ij} \in \{0; 1\}$;
- $\forall i \in [\![1\,,n]\!]$, $a_{ii} = 0$;
- il existe un entier k strictement positif tel que chaque colonne de A contienne exactement k termes non nuls ;
- $\forall (i; j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $i \neq j \implies \exists!\, l \in [\![1\,,n]\!]$, $a_{il} = a_{jl} = 1$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A^2.
2. Montrer que $n = k^2 - k + 1$.

II.2.930 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps.
Soit $\mathcal{D} = \{M \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid \forall (i; j) \in [\![1\,,2n]\!]^2,\ i \not\equiv j \mod n \implies M_{ij} = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $M_{2n}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, pour $M \in \mathcal{D} \cap GL_{2n}(\mathbb{K})$, on a $M^{-1} \in \mathcal{D}$.

II.2.931 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (z; z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \quad f(zz') = f(z)f(z').$$

1. (a) Calculer $f(1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et ω un racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, calculer $f(\omega)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
   (b) On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $\ln(\widetilde{f})$.
   (c) Calculer $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une application de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (A; B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \varphi(zI_n) = |z|^{n\alpha}.$$

   (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même image par φ.
   (c) Montrer par récurrence que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(A) = |\det(A)|^\alpha.$$

   Indication : on pourra commencer par s'intéresser aux matrices diagonalisables.
3. Soit ψ une fonction continue de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, et vérifiant :

$$\forall (A; B) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2, \quad \psi(AB) = \psi(A)\psi(B).$$

   (a) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad |\psi(A)| = |\det(A)|^\beta.$$

   (b) Montrer que si l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par ψ est réelle, alors ψ vérifie l'une des deux propriétés suivantes :
   - $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = |\det(A)|^\beta$;
   - $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = \mathrm{sgn}(\det(A))|\det(A)|^\beta$.

II.2.932 **TPE/EIVP MP 2015**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Calculer $\exp(A)$.

II.2.933 **X ESPCI 2016**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Déterminer leur noyau et image en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$.

II.2.934 **Centrale-Supélec MP 2013**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $a \in L(E)$ tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id}_E)) = 1$.

1. Traiter le cas où a est nilpotente.
2. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de a de multiplicités respectives $n_1, \ldots, n_q$. Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$ et tout $m \in \{1, \ldots, n_j\}$, on a :
$$\dim(\mathrm{Ker}(a - \lambda_j \mathrm{Id})^m) = m.$$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par a. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(Q(a))$, où Q est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par a sur F.
4. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires du polynôme caractéristique de a et $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces stables par a. Déduire de la question précédente que l'application $Q \in \mathcal{D} \mapsto \mathrm{Ker}(Q(A)) \in \mathcal{F}$ est une bijection.
5. Conclure quant aux espaces propres de a.

II.2.935 **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique qui s'écrit :
$$A = \begin{pmatrix} B_p & C_p \\ C_p^T & D_p \end{pmatrix}$$
avec $B_p \in M_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est définie positive (i.e. $\forall x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

   On suppose dans la suite que A est définie positive.
2. Montrer que $\det(B_p) > 0$.
3. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(B_p)\det(D_p)$, puis que $\det(A) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

II.2.936 **CCINP PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et
$$\begin{array}{rccc} f & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & B & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)B - \mathrm{Tr}(B)A \end{array}$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\{A\})$.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?

II.2.937 **Mines-Ponts MP 2015**

Soit E un espace euclidien de dimension n, v un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1; \dots; e_n)$ de E choisie.
2. Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1; \dots; e_n)$ et $(f_1; \dots; f_n)$ choisies. Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

II.2.938 **Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.
2. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(\{M^n \mid n \geqslant 1\})$.
3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

II.2.939 **Centrale-Supélec MPI**

On considère $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

1. Donner une caractérisation des matrices de rang inférieur ou égal à k avec les mineurs.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à k est un fermé.

   On considère pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$T_A : M \longmapsto AM - MA.$$

3. On suppose pour cette question que A est diagonalisable. Donner le spectre de T_A.
4. La matrice A n'est plus nécessairement diagonalisable. Donner le rang maximal de T_A.
5. Montrer que T_A possède une unique valeur propre si et seulement si A possède une unique valeur propre.

II.2.940 **Mines-Télécom PSI 2023**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2,\ a_{ij} = ij^2.$$

1. Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

II.2.941 **Mines-Télécom MP 2022**

Dans tout l'exercice, on considère A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :
$$\forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ X^T A X = 0.$$
2. Qu'en déduire des valeurs propres réelles de A ? À quelle condition A est-elle diagonalisable ?
3. On pose $M = A + I_n$.
   (a) Montrer que M est inversible.
   (b) La matrice M st-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $K = M^{-1}M^T$ est orthogonale.
5. Soit B une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que $A + B$ est inversible.

II.2.942 **X MP 2016**

Soit E et F des espaces vectoriels réels de dimensions finies (a priori différentes). Soit $p \geqslant 2$ et f une application p-linéaire de E^p dans F. On dira que f est *antisymétrique* si

$$\forall \sigma \in S_p,\ \forall (x_1; x_2; \ldots; x_p) \in E^p,\ f(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1; x_2; \ldots; x_p).$$

1. Montrer qu'il existe un espace vectoriel $\Lambda^p(E)$ et une application p-linéaire alternée Λ de E^p dans $\Lambda^p(E)$ telle que, pour toute application f p-linéaire antisymétrique de E^p dans F :
$$\exists! \varphi : \Lambda^p \longrightarrow F,\ f = \varphi \circ \Lambda.$$
2. Montrer que $\Lambda^p(E)$ est défini à isomorphisme près.
3. Montrer que $(x_1; \ldots; x_p) \in E^p$ est lié si, et seulement si, $\Lambda(x_1; \ldots; x_p) = 0$.

II.2.943 **X MP 2019**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On suppose que $\mathrm{Vect}(\{x \mapsto f(x+k) \mid k \in \mathbb{Z}\})$ est de dimension finie. Que dire de f ?

II.2.944 **CCINP MP 2017**

Soit A une matrice complexe d'ordre n telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que $A^n = 0$.
3. Prouver que $\det(A + I_n) = 1$.
4. Soit M une matrice complexe inversible d'ordre n qui commute avec A.
   (a) Que peut-on dire de AM^{-1} ?
   (b) Démontrer que $\det(A + I_n) = \det(M)$.
   (c) L'égalité reste-t-elle valable si M est seulement inversible ?
   (d) L'égalité reste-t-elle valable si seulement M commute avec A ?

II.2.945 **Centrale-Supélec PSI 2026**

1. Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de $L(E, F)$?
2. Soit p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) La famille $\{f_1; \dots; f_p\}$ est libre.
   ii) L'application
   $$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ & & x & \longmapsto & (f_1(x); \dots; f_p(x)) \end{array}$$
   est surjective.
   iii) Il existe une famille $\{x_1; \dots; x_p\}$ d'éléments de E telle que :
   $$\det((f_j(x_i))_{i,j}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$$
3. Montrer que :
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f) \iff f \in \mathrm{Vect}(\{f_1; \dots; f_p\}).$$

II.2.946 **X MP 2017**

Donner toutes les formes linéaires de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$ invariantes par conjugaison par le groupe orthogonal, i.e. toutes les formes linéaires ℓ telles que, pour toute matrice A et toute matrice orthogonale P, on a $\ell(P^{-1}AP) = \ell(A)$.

II.2.947 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et on note E^* son *dual*, i.e. l'espace des formes linéaires sur E. On se donne $A \subseteq L(E)$. On dit que A est *trigonalisable* s'il existe une base de trigonalisation commune à tous ses éléments. On suppose dans tout l'exercice que les éléments de A commutent deux à deux.

1. On définit, pour $u \in L(E)$, l'application suivante :
$$\begin{array}{rcccc} T_u & : & E^* & \longrightarrow & E^* \\ & & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array}$$
   Montrer que $T_u \in L(E^*)$.
2. Donner un condition sur u et v de $L(E)$ pour que T_u et T_v commutent.
3. Montrer que les endomorphismes de A admettent un vecteur propre commun.
4. En déduire que A est trigonalisable.

II.2.948 **CCINP MP 2021**

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $(M - I_3)^3$ et en déduire le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^2} M^n\right)_{n \geqslant 1}$ converge. On note A sa limite.
5. Soit $X_0 \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ par $X_n = M^n X_0$.

   On notera $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si $X_0 \neq 0$, alors $X_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que si $x_0 - y_0 + 3z_0 \neq 0$, alors la série de terme général

   $$\frac{n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

   diverge.

II.2.949 **Centrale-Supélec PC 2015**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, avec $n > p$. Soit $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, E)$, tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur, puis déterminer son noyau, son image et son rang.

II.2.950 **X MP 2017**

On considère l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[X]$ qui à une matrice M associe $\varphi(M)$ le polynôme minimal (en degré) tel que $\varphi(M)(M) = \mathrm{e}^M$.

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Quels sont les points de continuité de φ ?

II.2.951 **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^3 - A^2 - A - 2I_n = 0$.

1. Montrer que n est un multiple de 5.
2. *Cas particulier* : $n = 5$.

   Montrer que A est semblable à $\mathrm{diag}(2, m, m)$, où $m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. *Cas général* : réduire A.

II.2.952 **X MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda < 0$ une valeur propre de $A\overline{A}$. Montrer que λ est de multiplicité paire. En déduire que $\det(I_n + A\overline{A}) \geqslant 0$.

II.2.953 **CCINP PSI 2019**

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_3[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P;Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. À l'aide de la méthode de Schmidt, trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$, notée $(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$.
3. Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\|P\| = 1$. Montrer que :

$$\sup\{|P(x)| \mid x \in [-1\,;1]\} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

   Indication : calculer, pour $i \in [\![0\,,3]\!]$, $M_i = \sup\{|Q_i(x)| \mid x \in [-1\,;1]\}$.
4. Peut-il y avoir égalité ?

II.2.954 **TPE/EIVP PSI 2015**

Soit A une matrice telle que $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit l'endomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

On définit le produit scalaire classique sur les matrices.

1. Montrer qu'il existe une famille $(X_1; \ldots; X_n)$ de vecteurs de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ propres pour A telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ X_i^T X_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } X_i^T X_j = 1 \text{ si } i = j.$$

2. Soit (M_{ij}) telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ M_{ij} = X_i X_j^T.$$

   Montrer que la famille des M_{ij} est une base orthonormale de vecteurs propres pour φ.
3. Quel est le rang de φ ?

II.2.955 **CCINP PC 2022**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 4\}$.
2. Montrer que A est diagonalisable.

II.2.956 **X MP 2013**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$. Montrer qu'il existe h et g des endomorphismes de E tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

II.2.957 **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit m, n deux entiers naturels non nuls.
Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A^* = \overline{A}^T$.
On dit que A vérifie la propriété (P) si, et seulement si,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (A^*)^k A^{m-k} = 0.$$

1. Montrer que, si A est nilpotente d'indice p tel que $2p \leqslant m+1$, alors A vérifie la propriété (P).
2. Déterminer les matrices réelles vérifiant (P) telles que $AA^* = A^*A$.
3. Pour X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$, on pose $\langle X, Y \rangle = \overline{X}^T Y$. Soit X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$. En s'aidant de la fonction définie par $\phi(t) = \langle \mathrm{e}^{tA} X, \mathrm{e}^{tA} Y \rangle$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{tA^*} \mathrm{e}^{tA}$ est à coefficients polynomiaux.

II.2.958 **Centrale-Supélec MP 2017**

On pose $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$ et T de E dans E tel que :

$$\forall f \in E,\, \forall x \in [0\,;1],\, T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E et que pour tout f dans E, on a :
$$\int_0^1 T(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Pour tout entier naturel d, on pose $E_d = \mathbb{R}_d[X]$. On note T_d la bi-restriction de T à E_d. Montrer que T_d est diagonalisable, en donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
3. Montrer que pour tout élément f de E, la suite de fonctions $(T^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante égale à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

II.2.959 **ENSEA/ENSIIE MP 2019**

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer $A^2 + 4A - 12I_3$.
   (b) En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, la diagonaliser.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.960 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = Ax(t) \text{ et } \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'on a $\ell(x(t)) = 0$.

II.2.961 **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique, à valeurs propres λ_k strictement positives. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_{ii}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
2. Soit A une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$|\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$
   On supposera par la suite que ce résultat est aussi valable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. On note D la boule fermée de $\mathbb{C}$, de rayon 1. Déterminer :
$$\sup_{(z_1;\ldots;z_n)\in D^n} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_j - z_i|.$$

II.2.962 **Mines-Télécom PSI 2022**

Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose $A^{-1} = (b_{ij})$. Soit encore $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner les coefficients de $M = JA^{-1}$. Déterminer le rang de M.
2. Montrer que :
$$\det(A - J) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\right)\det(A).$$

II.2.963 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $E = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ est un vecteur propre de } M\}$$
   est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Même question avec une autre colonne $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ non nulle.

II.2.964 **CCINP PC 2023**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls de E, a et b deux complexes (a non nul) tels que :

$$f \circ g - g \circ f = af + bg.$$

On note ϕ_g l'endomorphisme de $L(E)$ qui à u associe :

$$\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u.$$

Pour les quatre premières questions, on suppose que $b = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\phi_g(f^n) = anf^n$.
3. Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $f^k = 0$.
4. Soit u l'endomorphisme induit de g sur $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que u admet un vecteur propre et que f et g ont un vecteur propre commun.
5. On suppose que $b \neq 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

II.2.965 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in L(E)$ nilpotente d'indice $r \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{F} = \{x_0; u(x_0); \dots; u^{r-1}(x_0)\}$ soit libre.
2. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^{r-1}(x_0)) = 1$ et $\varphi(u^k(x_0)) = 0$ pour tout $k \in [\![0\,, r-2]\!]$.

   On pose, pour tout $y \in E$, $v(y) = \varphi(y)x_0$ et $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} u^k \circ v \circ u^{r-1-k}$.
3. Calculer $p(x)$ pour $x \in V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, puis montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ est un supplémentaire de V stable par p.
4. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \text{\huge 0} & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.966 **Mines-Ponts PSI 2024**

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, le *commutant* de A est défini par :

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\dim(C(A)) \geqslant n$, et chercher les cas d'égalité.

II.2.967 **X MP 2013**

Soit $t \in \mathbb{R}_-^*$ et $M = (\exp(t|j-i|))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2.968 **Mines-Ponts MP 2024**

Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$ tel que son polynôme caractéristique vérifie :

$$\chi_u(X^2) = \chi_u(X) \cdot \chi_u(X-1).$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ stables par u.

II.2.969 **Mines-Ponts MP 2019**

1. Pour A, B dans $M_{n\times p}(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{rang}(A+B) \leqslant \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B)$.
2. Soit $V_1, \ldots, V_k$ des matrices colonnes telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} V_i V_i^T = I_n$.

   Montrer que $k \geqslant n$.

II.2.970 **Mines-Ponts MP**

Trouver les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

II.2.971 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n > 1$ et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\mathrm{rang}(AB - BA + I_n) = 1.$$

1. On pose $X = AB - BA$. Montrer que :

$$\mathrm{Tr}(X^2) = 2\mathrm{Tr}(ABAB) - 2\mathrm{Tr}(A^2B^2).$$

2. En déduire que :

$$\mathrm{Tr}(ABAB) - \mathrm{Tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

   On pourra déterminer les valeurs propres de X.

II.2.972 **Mines-Ponts MP 2016**

On considère deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$\forall k \in [\![0\,, 2n]\!],\ \det(A + kB) \in \{-1; 1\}.$$

1. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.
2. Montrer que A^{-1} est à coefficients entiers.

II.2.973 **Mines-Ponts MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. Montrer que si A est inversible, alors $\mathrm{rang}(A)$ est pair.
3. Montrer que pour tout $A \in A_n(\mathbb{R})$, $P = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
4. On considère l'application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} A_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \end{array}$$

   Montrer que f est une application bijective.
5. Dans cette question on considère $n = 2$.
   Pour $A \in SO_2(\mathbb{R})$, trouver $B \in A_2(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = A$.

II.2.974 **CCINP MP 2018**

Soit H la matrice dont tous les coefficients valent 1, A la matrice avec que des 1 sauf sur la diagonale où il n'y a que des b, où $b \in \mathbb{R}$.

1. Les matrices H et A sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de H.
3. Calculer $\det(A)$.

II.2.975 **ENS MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prenons aussi une famille $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ de réels distincts. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall i \in [\![1\,, n+1]\!]$, $\det(A + t_i B) = 0$;

ii) il existe W et V, deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, tels que $A(V) \subset W$ et $B(V) \subset W$, avec $\dim(W) < \dim(V)$.

II.2.976 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1; \dots; x_n) \in [0\,; \pi]^n$.
On définit $M_n = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ par $m_{ij} = \cos\left((j-1)x_i\right)$ pour tout $(i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2$.
On pose :

$$p_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\cos(x_i) - \cos(x_j)\right).$$

1. Montrer que, pour tout $(i; j) \in [\![1\,, n]\!]^2$, $\cos\left((j-1)x_i\right)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ dont on précisera le terme dominant.
2. Calculer $\det(M_n)$ en fonction de p_n.

II.2.977 **Centrale-Supélec PC 2019**

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ ainsi qu'un vecteur colonne $B = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$, admette une unique solution.
2. On suppose que cette condition est vérifiée et on note $X = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ l'unique solution de cette équation. Montrer alors l'égalité
$$x_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)},$$
où A_0 est la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de A par B.
3. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. On considère un élément $(a_1; \dots; a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne des entiers $b_1, \dots, b_n$ strictement positifs et tous distincts. On suppose qu'il existe un polynôme P tel que :
$$(1-X)^n P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{b_k}.$$
Exprimer $P(1)$ en fonction des b_k seulement.

II.2.978 **Mines-Télécom MP 2021**

1. Soit $\mathbb{K}$ le corps réels ou des complexes, et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Donner la définition d'une valeur propre de A et du polynôme caractéristique de A. Quel est le lien entre ces deux notions ? La matrice A admet-elle toujours une valeur propre ?
2. Soit λ une valeur propre de A. Soit P un polynôme annulateur de A. Que peut-on dire de $P(\lambda)$? Justifier.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Que peut-on dire des valeurs propres réelles de A ? Et des valeurs propres complexes ?

II.2.979 **Mines-Télécom MPI 2023**

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in L(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_p\}$ avec les λ_k deux à deux distincts, et
$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que u soit diagonalisable. Prouver-le.
2. Existe-t-il dans $\mathbb{R}^7$ un endomorphisme u tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u et $\mathrm{Tr}(u) = 0$?
3. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u. Déterminer $\det(u)$.

II.2.980 **Mines-Télécom MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^TX = -I_n$.

1. Montrer que X est symétrique.
2. Déterminer X.

II.2.981 **CCINP MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de A^2 (de degré $p \in \mathbb{N}^*$) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines de P comptées avec leur multiplicité. On pose $Q(X) = P(X^2)$. Que peut-on dire de Q ? Exprimer Q sous forme d'un produit d'irréductibles.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

II.2.982 **CCINP MP 2016**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $E = C([0\,;a], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ de classe } C^2,\ f(0) = f(a) = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit
$$\begin{array}{rccc} D : & F & \longrightarrow & F \\ & f & \longmapsto & f'' \end{array}$$
Déterminer $\operatorname{Ker}(D)$ et $\operatorname{Im}(D)$.

II.2.983 **X MP 2015**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal si et seulement s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\{x; Ax; A^2x; \ldots; A^{n-1}x\}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

II.2.984 **X MP 2015**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et p_k le nombre de partitions de $\{1; 2; \ldots; k\}$. Exprimer, en fonction des p_k, le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de polynôme caractéristique P fixé.

II.2.985 **CCINP PSI 2019**

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Montrer que $\operatorname{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.
2. On suppose $n \geqslant 3$. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$
Déterminer les valeurs propres et le noyau de A.

II.2.986 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie impaire qui vérifie $u^3 + u = 0$. L'endomorphisme u est-il bijectif ?

II.2.987 **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, telle que 1 n'est pas valeur propre de A.

1. Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A^k\right)_{m\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$.

II.2.988 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel quelconque et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$. Qu'en déduit-on pour p ?

II.2.989 **Mines-Ponts MP 2018**

1. Soit $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et C commutent. Montrer que :
$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC).$$
2. Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer l'équivalence suivante :
$$\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(N) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(N) = \mathbb{R}^n.$$

II.2.990 **Mines-Télécom PSI 2019**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i;j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

II.2.991 **X ESPCI 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = 0$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$, que $\det(A) \geqslant 0$, et que $\det(A) = 0$ si n est impair.

II.2.992 **Mines-Ponts PSI 2014**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M(a;b) \in M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale définie comme suit :

- $m_{i,i} = a + b$
- $m_{i,i+1} = ab$
- $m_{i+1,i} = 1$

Calculer $\det(M(a;b))$.

II.2.993 **CCINP MP 2016**

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Un endomorphisme u de E est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$. Soit u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Montrer que $\chi_u(X) = X^n$.
2. Soit v un automorphisme de E commutant avec u. On définit $f = u + v$. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(v)$.
3. Montrer que $w = v^{-1} \circ u$ est nilpotent.
4. En déduire que $\det(f) = \det(v)$.

II.2.994 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale définie comme suit :

- tous les éléments au-dessus de la diagonale sont égaux à un réel a ;
- ceux au-dessous de la diagonale sont égaux à un réel b ;
- sur la diagonale on trouve les réels $r_1, \ldots, r_n$.

Calculer $\det(M)$.

II.2.995 **Mines-Ponts PC 2019**

Soit a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M(a;b)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et les autres b. Calculer $\det(M(a;b))$.

II.2.996 **X MP 2022**

Soit X un ensemble, soit $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X,\ \det\left((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \det\left((g_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

Que peut-on dire sur f et g ?

II.2.997 **CCINP MP 2025**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $Q \in E$.
On note u l'application définie par $u(P) = Q$.
2. Montrer que $u \in L(E)$, puis que u est bijective.
3. Pour tous $i, j \in \{0; \ldots; n\}$, $i \neq j$, calculer $\langle X^i, u(X^j) \rangle$. Que peut-on en déduire concernant u ?
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0; P_1; \ldots; P_n)$ de E dans laquelle on exprimera $u(P_k)$.
5. Exprimer la trace de u en utilisant les P_k.
6. En déduire la trace de u.

II.2.998 **CCINP MP 2015**

Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canonique a vérifie :

$$a(e_1) = e_1 + e_{2n+1} \text{ et } \forall i \in [\![2\,, 2n+1]\!],\ a(e_i) = e_{i-1} + e_i.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est inversible.
3. Écrire A^{-1} sous la forme d'un polynôme en A.
4. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
   Calculer $\displaystyle\prod_{i=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

II.2.999 **ENSAM PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec a et b complexes.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Déterminer ses sous-espaces propres.

II.2.1000 **Mines-Ponts MP 2013**

Pour $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$, on définit :

$$G(a_1; \dots; a_p) = \det\left((\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \right).$$

Montrer que cette quantité est positive, qu'elle est nulle si et seulement si la famille $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est liée, et enfin montrer que l'on a :

$$G(a_1; \dots; a_p) \leqslant \|a_1\|^2 \cdots \|a_p\|^2.$$

II.2.1001 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'égalité polynomiale :

$$\det(AM + B - XI_n) = \det(AM - XI_n).$$

   (a) Montrer que B est nilpotente.
   (b) Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(AMB) = 0$ et en déduire que $BA = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que B est nilpotente et que $BA = 0$. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, les polynômes caractéristiques de $AM + B$ et de AM sont égaux.

II.2.1002 **Mines-Télécom MP 2016**

Énoncer et démontrer le théorème du rang.

II.2.1003 **X MP 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ non inversible.

1. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(A^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(A))$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) $\dim(\operatorname{Ker}(A^2)) = 2\dim(\operatorname{Ker}(A))$;
   ii) $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Im}(A)$;
   iii) $A(\operatorname{Ker}(A^2)) = \operatorname{Ker}(A)$;
   iv) $\operatorname{rang}\left(\begin{pmatrix} A & \mathrm{Id} \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$.

II.2.1004 **Mines-Télécom MP 2017**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u.
2. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$. Montrer que v est un isomorphisme et déterminer v^{-1}.
3. En déduire que le rang de u est pair.

II.2.1005 **X ESPCI 2015**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n > 0$ tel que A^{2^n} soit égal à I_2.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe un entier naturel k tel que $A^{2^k} = -I_2$.

II.2.1006 **CCINP PC 2014**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. On considère f_3 l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f_3(P) = f(P)$. Écrire la matrice de f_3 dans la base canonique.
2. Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
   (b) En déduire que $R(X) = P(X) - P(0)$ est constamment nul.
   (c) En déduire le noyau de f.
3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = f(P)$.
   (a) Calculer le noyau et l'image de f_n.
   (b) En déduire que f_n est surjective.
4. Trouver l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
5. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}[X]$.

II.2.1007 **Mines-Ponts MP 2023**

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = O^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O,$$

   où B est une matrice antisymétrique réelle inversible.
2. En déduire que le rang de A est pair.

II.2.1008 **X PC 2025**

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

II.2.1009 **Centrale-Supélec PC 2019**

1. Montrer que toute matrice de $M_p(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. Pour toute matrice A de $M_p(\mathbb{C})$, prouver l'égalité $\chi_A(A) = 0$.

II.2.1010 **Mines-Télécom MP 2019**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{C})$ et m le polynôme minimal de M, de degré d.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathbb{C}_{d-1}[M]$, où

$$\mathbb{C}_{d-1}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) \leqslant d-1\}.$$

2. En déduire $\exp(M)$.

II.2.1011 **X ESPCI 2013**

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n.

II.2.1012 **X MP 2017**

Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$. Calculer, sous réserve d'existence et sans utiliser de récurrence, le déterminant de la matrice $M = \left(\dfrac{1}{a_i - b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

II.2.1013 **ENSEA/ENSIIE PSI 2021**

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

II.2.1014 **CCINP MP 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Que penser de l'information :

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0\,?$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)^2 = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer A dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   (c) La matrice A est-elle forcément diagonalisable ?

II.2.1015 **CCINP MP 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$.

1. On suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u et que $E = F \oplus G$. On note $v = u|_F$ et $w = u|_G$. Si f est un endomorphisme, π_f désigne son polynôme minimal.
   (a) i. Justifier que χ_v et χ_w divisent χ_u.
   ii. Justifier que π_u et π_w divisent π_u.
   (b) Montrer que $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

II.2.1016 **CCINP PSI 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec $A^\perp$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\perp)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

II.2.1017 **X MP 2019**

Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante :

$$X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

II.2.1018 **ENS MP 2018**

Soit $n > 1$, $A \in SL_n(\mathbb{C})$ et $Z(A)$ son *centralisateur* défini par :

$$Z(A) = \{M \in SL_n(\mathbb{C}) \mid MA = AM\}.$$

Montrer que $Z(A)$ est infini.

II.2.1019 **X MP 2019**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim(\mathrm{Ker}(u^k))$.
Montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est *concave*, i.e. la suite $(d_{k+1} - d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

II.2.1020 **ENS MP 2019**

Exhiber une famille libre d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ commutative, et de cardinal $\left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.

II.2.1021 **CCINP PC 2013**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

II.2.1022 **X MP 2017**

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On appelle *support* de S et on note $s(S)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles.

1. Montrer qu'il existe S^+ et S^- dans $S_n(\mathbb{R})$ à supports orthogonaux telles que $S = S^+ - S^-$.
2. Montrer l'existence et l'unicité de $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = S^T S = S^2$.
   Montrer que $C = S^+ + S^-$.
   On notera alors $C = |S|$.
   Indication : pour l'unicité, on montrera que C et S^2 commutent.
3. Soit $E = \{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(S) = 1\}$.
   (a) Dans le cas $n = 2$, montrer que $S \in E$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 \leqslant 1$ et $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$.
   (b) Dans ce cas, que devient $\mathrm{dist}(S; T)$ pour $T \in E$?
   Donner une interprétation (en remarquant que E s'identifie au disque unité dans $\mathbb{R}^2$).
4. Dans le cas général, montrer que :

$$\mathrm{dist}(S; T) = \max_{\substack{R \text{ projecteur} \\ \text{orthogonal}}} \mathrm{Tr}(R(T - S)).$$

II.2.1023 **CCINP MP 2018**

Soit E un espace euclidien. On dit que f est un *endomorphisme antisymétrique* de E si :

$$\forall (x; y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1. Que dire de f^2 ? Montrer que $\langle f^2(x), x \rangle \leqslant 0$ et que $\langle f(x), x \rangle = 0$.
2. Que dire de A, matrice de f dans une base orthonormée ?
3. Calculer $\det(A^T)$ de deux manières différentes. En déduire que si f est inversible, alors $\dim(E)$ est paire.
4. Montrer que les valeurs propres de f^2 sont réelles et négatives.

II.2.1024 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de $\exp(A)$.
2. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

II.2.1025 **Centrale-Supélec MP 2024**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_p(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose :

$$\forall A \in E,\ \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

1. (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur E.
   (b) Donner la définition de e^A ainsi que le type de convergence.
   (c) Montrer qu'on a alors $\|\mathrm{e}^A\| \leqslant \mathrm{e}^{\|A\|}$.
2. Montrer que :

$$\forall A, B \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|A^n - B^n\| \leqslant nK^{n-1}\|A - B\|,$$

   où $K = \max(\|A\|; \|B\|)$.
3. Étudier l'existence de :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n.$$

   Si cette limite existe, calculer-la.

II.2.1026 **X MP 2013**

Soit V un espace vectoriel et $s \in L(V)$ tel que $\operatorname{rang}(\mathrm{Id} - s) = 1$.

1. Donner une expression simple de s.
2. Soit G un sous-groupe de $GL(V)$ contenant s et tel que les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les éléments de G sont $\{0\}$ et V. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de G est constitué des homothéties de V.

II.2.1027 **Mines-Ponts MP 2019**

On note $E = C^\infty((\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit $D = \{d \in E^* \mid \forall (f; g) \in E^2,\ d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$.

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que $a \in \mathbb{R}^n \mapsto d_0[\cdot](a)$ est injective sachant que $d_0[\cdot](a) : f \mapsto d_0 f(a)$.
3. Donner une base de D.
   Indication : on pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour l'application $t \mapsto f(tx)$.

II.2.1028 **CCINP MP 2022**

Soit

$$u : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -X + \operatorname{Tr}(X) I_n \end{array}$$

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de u.
2. En déduire que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

II.2.1029 **X-ENS Cachan PSI 2021**

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $x_1, \dots, x_k \in E$ tels que pour tous $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que k ne peut pas être trop grand et déterminer cette limite.

II.2.1030 **CCINP MP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) Donner les éléments propres de A et leur sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 + X = A$.

II.2.1031 **ENS PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?
2. Donner un exemple d'une telle matrice A avec toutes les valeurs propres trouvées en 1.

II.2.1032 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$F = \{\varphi \in L(E, \mathbb{R}) \mid \forall (f; g) \in E^2,\ \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}.$$

Montrer que F est un espace vectoriel de dimension 1.

II.2.1033 **Centrale Supélec MP 2021**

Soit n et p des entiers naturels non nuls. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire canonique : pour X et Y dans $\mathbb{R}^m$ notés $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Soit $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$ et en déduire que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T A)$.
   On note r ce rang commun.
2. Montrer l'existence de $\{y_1; \dots; y_r\}$ système orthonormé de $\mathbb{R}^p$ et D matrice diagonale d'ordre r à coefficients strictement positifs vérifiant :
$$Y^T A^T A Y = D \text{ avec } Y = (y_1 | \cdots | y_r).$$
3. Montrer l'existence de réels positifs $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ tels que la famille $(\alpha_i A y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ soit orthonormée.

   On pose, pour i dans $\{1; 2; \dots; r\}$, $x_i = \alpha_i A y_i$ et $X = (x_1 | \cdots | x_r)$.
4. Montrer l'existence de Λ diagonale d'ordre r vérifiant $A = X \Lambda Y^T$.

II.2.1034 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On définit $f : x \mapsto \langle x, a\rangle b$, où $(a;b) \in E^2$.
Les espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

II.2.1035 **X MP**

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. On pose :

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|^2 - \langle u(x), x\rangle^2 \end{array}$$

1. La fonction f est-elle minorée ?
2. À quelle condition la fonction f est-elle majorée ? Calculer alors son supremum.

II.2.1036 **ENS MP Cachan/Rennes 2018**

Soit $E = C([0\,;1], \mathbb{R})$.
On définit :

$$\forall (f;g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $h \in E$:

$$h \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies h = 0.$$

2. Montrer que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

   Soit $a \in]0\,;1[$, $p \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\ell \;:\; \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^a x^p f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

3. Montrer que ℓ est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple $|||\ell||| = \sup\limits_{\|f\|=1} |\ell(f)|$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que, pour tout $f \in E$, $\langle g, f\rangle = \ell(f)$.

   Soit $F = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$, $h \in F$ et

$$\ell_1 \;:\; \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^a h(x)f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

5. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur h pour qu'il existe $g \in F$ tel que pour tout $f \in F$, $\ell_1(f) = \langle g, f\rangle$.

   Soit le produit scalaire défini sur F par :

$$\langle f, g\rangle_1 = \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))\,\mathrm{d}x.$$

6. L'ensemble F est-il fermé au sens de la norme dérivant de ce produit scalaire ?

II.2.1037 **Mines-Télécom MP 2021**

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$L_k \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a_k) \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, L_k est une forme linéaire.
2. Déterminer le rang de $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

II.2.1038 **Centrale-Supélec PSI 2016**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $E_A = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$.

1. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que la dimension de E_A est égale à celle de E_D où D est à préciser.
   (b) Déterminer $\dim(E_A)$ en fonction du rang de A.
2. Montrer que la relation précédente est aussi vraie sans l'hypothèse de diagonalisabilité.

II.2.1039 **Centrale-Supélec PC 2016**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Soit g l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$g(M) = AM + MA.$$

Déterminer la trace de g.

II.2.1040 **X ESPCI 2016**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E, non égaux à E. Montrer que l'on ne peut pas avoir $E = F \cup G$.

II.2.1041 **Centrale-Supélec PC 2022**

On munit $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel, défini par $\langle X, Y\rangle = X^T Y$. On note B_n l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2$.

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $B_2 \cap \mathrm{Vect}(\{I_2; J\})$.

   Pour le reste de l'exercice, on fixe un élément A de B_n.
2. Simplifier $A^4 - A$.
3. Montrer que A^3 est une matrice de projection.
4. Vérifier que A^3 est symétrique.
5. Prouver les égalités $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^3) = \mathrm{Im}(A)$.
6. Étant donné un sous-espace vectoriel F de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ stable par A, montrer que $F^\perp$ est stable par A.

II.2.1042 **X ESPCI 2018**

Soit $M \in O_3^+(\mathbb{R})$. Montrer que M admet 1 pour valeur propre.

II.2.1043 **Mines-Télécom MP 2016**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+t-t=0 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. Soit $P(1;1;3;3)$. Déterminer $\mathrm{dist}(P;F)$.

II.2.1044 **Centrale-Supélec MP 2017**

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ subdivision de $[0\,;1]$ tels que pour tout $i \in [\![0\,, n-1]\!]$, il existe $(m_i;p_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in [a_i\,;a_{i+1}]$, $f(x) = m_i x + p_i$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C([0\,;1], \mathbb{R})$.
2. Pour $a \in [0\,;1]$, on note $f_a : x \mapsto |x-a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in[0;1]}$ est libre.
3. Déterminer une base de $\mathcal{E}$.

II.2.1045 **X-ENS**

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(\exp(A)\exp(B)) > 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(\exp(A+B)) \leqslant \mathrm{Tr}(\exp(A)\exp(B))$.
   Étudier le cas d'égalité.

II.2.1046 **ENS PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice X qui satisfait l'équation

$$X + AX + XA^2 = A.$$

2. Exprimer X en fonction de A.

II.2.1047 **ENS PC 2024**

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $s_1, \ldots, s_n$ ses valeurs propres. Pour $p \in \{1;2\}$, on pose :

$$N_p(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} |s_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que N_2 est une norme.
   Indication : montrer que l'application $(A;B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire (sur l'espace vectoriel des matrices symétriques).
2. On cherche à montrer que N_1 est une norme.
   (a) Montrer que $N_1(M) = \sup\{|\mathrm{Tr}(MU)| \mid U \in O_n(\mathbb{R})\}$.
   (b) Conclure.

II.2.1048 **ENS PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients dans $\{0; 1\}$. Supposons A inversible. Combien au maximum est-ce que A peut avoir de coefficients égaux à 1 ?

II.2.1049 **ENS PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que A^m est diagonalisable. Montrer que A^{m+1} est diagonalisable.

II.2.1050 **ENS PC 2024**

Soit $A_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$ pour tout $n \geqslant 0$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \det(A_n)$.

II.2.1051 **X MP**

Soit $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$. On note $S' = (s_{ij})_{(i;j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

1. Montrer que :
$$\prod_{i=1}^{n} s_{ii} \geqslant \det(S').$$
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\mathcal{S} = \{M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \geqslant \alpha\}$.
Montrer que :
$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \operatorname{Tr}(AS) = n\,(\alpha \det(A))^{\frac{1}{n}}\,.$$

II.2.1052 **ENS PC 2024**

Soit a un endomorphisme autoadjoint et u un vecteur non nul.
On pose $V = \operatorname{Vect}(\{a^k(u) \mid k \in \mathbb{N}\})$.
Montrer que les valeurs propres de la restriction de a à V sont simples.

II.2.1053 **ENS PC 2024**

Soit
$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
deux matrices réelles.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :
$$M(t) = \lim_{n \to +\infty} \left(I_2 + \frac{t}{n}A\right)^n.$$
2. Montrer que $\{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe.

II.2.1054 **ENS PC 2024**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A = 0$.
2. Même question pour $\operatorname{Tr}((A + B)^2) = (\operatorname{Tr}(A + B))^2$.
3. Que dire de A si pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{Tr}(P(A)) = P(\operatorname{Tr}(A))$?

II.2.1055 **Mines**

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1.
Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$ si et seulement si $MAM = 0$.

II.2.1056 **X MP 2019**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{C}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ sa classe de conjugaison.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $\mathcal{C}(A)$ est connexe par arcs.

II.2.1057 **Centrale MP**

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$. On pose

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit

$$u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{Tr}(A^n)|}.$$

1. On suppose que $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\rho(A)$.
2. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{C})$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1.
   (a) Montrer que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 1 comme valeur d'adhérence.
   (b) Montrer que $\rho(A)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

II.2.1058 **CCINP MPI 2023**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et $f \in L(E)$ symétrique.

1. Montrer que :
   (a) $f \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$
   (b) $f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Soit f symétrique positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme g symétrique et positif tel que $f = g^2$. Que dire si f est défini positif ?
3. Soit f défini positif et g positif. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

II.2.1059 **CCINP PSI 2025**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_3$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
Que dire de A ?

II.2.1060 **Mines-Ponts**

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(AO) \leqslant \mathrm{Tr}(A)$.

II.2.1061 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B).$$

II.2.1062 **Mines-Télécom PSI 2025**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $(e_1; \dots; e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Montrer que si $f \in L(E)$, alors

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(e_k), e_k\rangle.$$

2. Soit f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E. Montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(f \circ g) \leqslant \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g).$$

3. On suppose de plus que f est définie positive. Trouver tous les endomorphismes symétriques positifs g de E tels que :

$$\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g).$$

II.2.1063 **Centrale**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et L_A l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini par $L_A(M) = AM$.
Calculer $\det(L_A)$.

II.2.1064 **Mines-Ponts MP 2013**

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$. On suppose que les valeurs propres de $u + u^\star$ sont positives. Comparer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^\star)$.

II.2.1065 **Centrale PC 2025**

Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

II.2.1066 **X-ENS**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $H_A = (\mathrm{Tr}\,(A^{i+j-2}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ unitaire de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On rappelle que :

$$\Delta(P) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2.$$

1. Montrer que $\Delta(\chi_A) = \det(H_A)$.
2. On assimile $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ par la base canonique.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(H_A) = \{P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mid P(\lambda) = 0,\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

II.2.1067 **CCINP PC 2013**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de M ?
2. Déterminer les valeurs propres de M.
3. Donner une condition suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

II.2.1068 **Centrale**

Soit $u \in L(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $\text{rang}(u^2) = n$ et $u^3 = 0$.
Calculer $\dim(\text{com}(u))$.

II.2.1069 **Mines**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $H \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{rang}(H) = 1$.
Trouver tous les λ réels tels que $I_n + \lambda H$ est inversible, puis le cas échéant donner l'expression de son inverse.

II.2.1070 **ENS PC 2025**

Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}(M) = k$ et $\text{rang}(N) = \ell$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\text{rang}(MN)$?

II.2.1071 **ENS PC 2025**

Soit $M, N \in M_2(\mathbb{C})$ deux matrices non nulles telles que :

$$M^2 = N^2 \quad \text{et} \quad MN + NM = I_2.$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible A telle que :

$$M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{et} \quad N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

II.2.1072 **ENS PC 2025**

Montrer que pour tous $M, N \in M_2(\mathbb{R})$ on a :

$$MN + NM - \text{Tr}(M)N - \text{Tr}(N)M + (\text{Tr}(N)\text{Tr}(M) - \text{Tr}(NM))I_2 = 0.$$

II.2.1073 **ENS PC 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.
Montrer que l'application $M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

II.2.1074 **ENS PC 2025**

Soit $A \in S_4(\mathbb{R})$ de rang 2 et dont le polynôme minimal est $\pi(X) = X(X-1)(X+1)$.
Soit $B \in S_4(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\inf_{P \in \mathbb{R}[X]} \|P(A) - B\|_2$$

est atteint pour un polynôme $P_{\text{inf}} \in \mathbb{R}_2[X]$ dont on pourra expliciter les coefficients en fonction de $\text{Tr}(B), \text{Tr}(AB)$ et $\text{Tr}(A^2B)$.

II.2.1075 **ENS PC 2025**

Soit $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ est inversible. Montrer que P est constant.

$\boxed{\textbf{II.2.1076}}$ **ENS PC 2025**

Soit D une matrice diagonale réelle et E la matrice réelle contenant un 1 en haut à droite et des 0 partout ailleurs.

1. Calculer $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $(D+E)^n = D^n + a_n E$.
2. Déterminer un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{II.2.1077}}$ **ENS PC 2025**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, telle que la famille $\{f; g : x \mapsto f(x+1); h : x \mapsto f(x+2)\}$ est liée. Montrer que f est nulle.

$\boxed{\textbf{II.2.1078}}$ **ENS PC 2025**

Trouver l'ensemble des matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n x\| = +\infty$.

$\boxed{\textbf{II.2.1079}}$ **ENS PC 2025**

Soit $m \geqslant 2$ un nombre entier.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$B^2 = mB, \quad \mathrm{Tr}(B) = 0.$$
Montrer que $B = 0$.
2. Soit $A_1, \ldots, A_m$ des matrices différentes, inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall (j;k) \in [\![1\,,m]\!]^2,\ A_j A_k \in \{A_1, \ldots, A_m\}.$$
On suppose que :
$$\mathrm{Tr}(A_1 + \cdots + A_m) = 0.$$
Montrer que :
$$A_1 + \cdots + A_m = 0.$$

$\boxed{\textbf{II.2.1080}}$ **ENS PC 2025**

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que s'ils commutent, alors pq est aussi un projecteur orthogonal.
2. Montrer que dans tous les cas, les valeurs propres de pq sont réelles et dans $[0\,;1]$.
3. Soit $\lambda \in [0\,;1]$. Déterminer deux projecteurs orthogonaux tels que λ soit valeur propre de pq.

$\boxed{\textbf{II.2.1081}}$ **Centrale**

Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ et H un hyperplan affine avec $0 \notin H$. On suppose que $u(H) \subset H$. Montrer que 1 est valeur propre de u.

II.2.1082 **ENS MP 2025**

Soit $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ avec $n > p$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la propriété

$$(P): \text{ Trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \|Ax - b\| = \min_{y\in\mathbb{R}^p} \|Ay - b\|.$$

1. Donner l'ensemble $S_{(P)}$ des solutions de (P).
2. Montrer qu'il existe un unique $\overline{x} \in S_{(P)}$ de norme minimale, c'est-à-dire $\|\overline{x}\| = \inf_{y\in S_{(P)}} \|y\|$.
3. Bonus : montrer que $x \in \mathbb{R}^p$ est solution de (P) si et seulement si $A^TAx = A^Tb$ et que $\mathrm{Ker}(A^TA) = \mathrm{Ker}(A)$.

II.2.1083 **ENS PC 2025**

1. Soit ABC un triangle non dégénéré dans le plan. On suppose que $\widehat{ACB}$ est aigu. Montrer que :
$$AC^2 + BC^2 > AB^2.$$
2. Soit $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$. On définit les demi-droites $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{R}^3$ comme suit :
$$l_1 = \{te_1 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_2 = \{te_2 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_3 = \{te_3 \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}.$$
On suppose que e_1, e_2, e_3 sont deux à deux orthogonaux. Montrer que pour tout $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_2$, $A_3 \in l_3$ le triangle $A_1A_2A_3$ est aigu.
3. Avec les notations de la question précédente, on suppose que pour tout $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_2$, $A_3 \in l_3$ le triangle $A_1A_2A_3$ est aigu. Montrer que e_1, e_2, e_3 sont deux à deux orthogonaux.

II.2.1084 **ENS PC 2025**

Soit $A_1, \dots, A_m$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ appartenant à $\{-1; 1\}$ tels que :

$$\mathrm{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_m A_m)^2) \geqslant \mathrm{Tr}(A_1^2) + \dots + \mathrm{Tr}(A_m^2).$$

II.2.1085 **ENS PC 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $[A, B] = AB - BA$, $f_0(A; B) = B$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_{k+1}(A; B) = [A, f_k(A; B)].$$

1. Montrer qu'il est possible d'écrire
$$f_k(A; B) = \sum_{j=0}^{k} c_{k,j} A^j B A^{k-j}$$
et calculer les $c_{k,j}$.
2. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, on note $|||A||| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. À quelle condition sur $|||A|||$ a-t-on que pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, $f_k(A; B) \to 0$ quand $k \to +\infty$?
3. Trouver un contre-exemple si $|||A||| = \frac{1}{2}$.

II.2.1086 **ENS PC 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ ses valeurs propres. On considère des matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & a \end{pmatrix}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \mu_{n+1}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe x, a tels que $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ soient les valeurs propres de M.

II.2.1087 **ENS PC 2025**

Déterminer une famille de polynômes P_k de taille minimale telle qu'aucun d'entre eux n'est un monôme, et pour tout matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un polynôme P_k dans cette famille tel que $P_k(A)$ est inversible.

II.2.1088 **ENS PC 2024**

Soit $A(t)$ et $B(t)$ des matrices symétriques définies positives dont les coefficients sont de classe C^1.

1. Montrer que si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = B(t)A(t)$, alors :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A(t)) = \det(A(t))\mathrm{Tr}(B(t)).$$
2. Montrer que si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = B(t)A(t) + A(t)B(t)$, alors :
$$2\min\{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)\}\mathrm{Tr}(A(t)) \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}(A(t)) \leqslant 2\max\{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)\}\mathrm{Tr}(A(t)).$$

II.2.1089 **ENS PC 2025**

Quelles sont les valeurs de $\alpha > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de vecteurs $(X_k)_{k \in [\![1,p]\!]} \in (\mathbb{R}^n)^p$ telle que $\|X_k\| = \alpha k$ et $\|X_i - X_j\| = |i - j|$ pour tout $(i; j; k) \in [\![1\,, p]\!]^3$?

II.2.1090 **ENS PC 2025**

Soit $(A; B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On dit que $A \geqslant B$ si $A - B \in S_n^+(\mathbb{R})$. On note $\Phi : A \mapsto A^T A$. Montrer que pour tous $(A; B) \in S_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in [0\,; 1]$:

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B).$$

II.2.1091 **Mines-Ponts PC 2025**

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par dérivation.

II.2.1092 **X**

Soit $A_1, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A_1 + \cdots + A_k = I_n \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k,\ A_i^2 = A_i.$$

Montrer que :

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant k,\ A_i A_j = 0_n.$$

II.2.1093 **X MP**

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et $\phi : A \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre. On appelle ϕ-*dérivation* de A toute forme linéaire δ sur A qui vérifie :

$$\forall (a; b) \in A^2,\ \delta(ab) = \phi(a)\delta(b) + \phi(b)\delta(a).$$

Déterminer tous les morphismes d'algèbre $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, puis toutes les ϕ-dérivations de $\mathbb{R}[X]$.

II.2.1094 **ENS PC 2025**

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $E_A = \{AM \mid M \in M_n(\mathbb{R})\}$. Que vaut $\dim(E_A)$?

II.2.1095 **Mines**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si x est un vecteur propre de A, montrer que x est aussi un vecteur propre de $(\mathrm{com}(A))^T$.

II.2.1096 **Mines-Ponts MP 2022**

Soit

$$\begin{array}{rccc} D & : & R[X] & \longrightarrow & R[X] \\ & & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Montrer que D n'est pas un carré dans $L(\mathbb{R}[X])$.

II.2.1097 **ENS PC 2025**

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^x) + \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-x}) + G \text{ où } G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ et } G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

   Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

2. On suppose de plus la propriété suivante :

$$E = F_1 + F_2 \text{ avec } \dim(F_1) = \dim(F_2) = 2,$$
$$F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \text{ et } F_2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

   Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

II.2.1098 **ENS ULSR 2025**

Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$C(M) = |||A||| |||A^{-1}|||$$

où $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne.

1. Calculer $C(M)$ lorsque $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $C(M) \geqslant 1$.
2. Montrer que $C(M) = C(M^T)$.
3. Que dire de M lorsque $C(M) = 1$?
4. Montrer que si $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $C(A + B) \leqslant \max(C(A); C(B))$.

II.2.1099 **Mines 2024**

Soit $\alpha > 0$ et $u \in L(\mathbb{C}^n)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle tous les coefficients de la matrice de u (sauf ceux situés sur la diagonale) appartiennent à l'intervalle $]-\alpha\,;\alpha[$.

II.2.1100 **Mines-Télécom MP 2025**

Soit

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de T pour que cette matrice soit diagonalisable.

II.2.1101 **Mines 2024**

On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ et la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}.$$

Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

II.2.1102 **PT 2013**

Soit la matrice réelle $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
On note $M = C^T C$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

II.2.1103 **PT 2015**

Soit E l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$ vu comme espace vectoriel réel.

1. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\overline{z} \mid (a;b) \in \mathbb{C}^2\}$.
2. Calculer $\det(f_{a,b})$ et $\mathrm{Tr}(f_{a,b})$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

II.2.1104 **PT 2015**

Soit Q un polynôme de degré $d \leqslant n$.
Soit f_Q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f_Q(P) = (PQ)^{(n)}$.

1. Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.

II.2.1105 **PT 2016**

Soit E un espace vectoriel réel, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, toute valeur propre de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$.
   Montrer que f et g sont des endomorphismes de E. Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. Le nombre 0 est-il valeur propre de $g \circ f$?
   Conclure.

II.2.1106 **X ESPCI 2013**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

i) $\det(A) = 0$;

ii) Il existe une matrice B non nulle telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a
$(A+B)^k = A^k + B^k$.

II.2.1107 **Mines-Ponts PC 2014**

Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^2 = Q$ et $\operatorname{rang}(Q) = r$.
On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_n & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & QM + MQ \end{array}$$

Montrer que Φ_n est un endomorphisme et calculer sa trace.

II.2.1108 **C.C.E. Mines PC 2015**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
   On admet la relation $A^2 + A - 2I_3 = 0$.
   (a) Montrer que A est inversible, et donner A^{-1}.
   (b) Donner les valeurs propres de A.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de A.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Trouver les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

II.2.1109 **Mines-Ponts PSI 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
3. Si M est inversible, calculer M^{-1}.

II.2.1110 **C.C.E. Mines PC 2015**

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \longmapsto & (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner ses éléments propres.

II.2.1111 **C.C.E. Mines PC 2015**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires sauf si $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

II.2.1112 **Navale MP 2024**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

i) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(MBA)$;

ii) M est une homothétie.

II.2.1113 **Navale MP 2023**

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$.

1. Montrer que si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$, alors $u + u^\star$ est inversible.
2. Montrer la réciproque si $u \circ u = 0$.

II.2.1114 **Navale MP 2019**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.
2. Montrer l'existence de $(X_1; \ldots; X_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $(AX_1; \ldots; AX_n)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

II.2.1115 **Navale MP 2019**

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté et $u \in E \setminus \{0_E\}$. On pose $f(x) = u \wedge x$ pour $x \in E$. Décrire l'endomorphisme $\exp(f)$.

II.2.1116 **Navale MP 2019**

Soit A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

i) A appartient à un groupe multiplicatif G de $M_n(\mathbb{R})$;

ii) $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^2)$;

iii) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$;

iv) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$;

v) $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$;

vi) il existe $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AX = XA$, $A^2X = A$, $X^2A = X$.

II.2.1117 **Navale PSI 2017**

Soit les deux matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Que dire des matrices A et B ?

II.2.1118 **Navale MP 2016**

Soit E l'ensemble des endomorphismes u de $M_n(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $u(M^T) = (u(M))^T$.
Quelle est la structure de E ? Donner sa dimension.

II.2.1119 **CCINP MP 2025**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in L(E)$. On suppose que les deux seuls sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{O_E\}$ et E.

1. Que dire du spectre de u ?
2. Soit $x \in E \setminus \{O_E\}$. Montrer que $(x; u(x); \ldots ; u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Écrire la forme de la matrice de u dans cette base.
4. Montrer que la matrice ne dépend pas de x.

II.2.1120 **X PSI 2025**

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda^2 I_n)).$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

II.2.1121 **X FUF 2024**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que :

$$(\dim(F))^2 + (\dim(g))^2 \leqslant (\dim(F+G))^2 + (\dim(F \cap G))^2.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

II.2.1122 **Mines-Ponts MP 2013**

1. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n. Montrer que N est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\ C)$ telle que $\mathrm{e}^B = \lambda I_n + J$.
   Indication : utiliser la matrice $\lambda(\mathrm{e}^J - I_n)$.

II.2.1123 **Centrale-Supélec MP 2014**

On munit l'ensemble des matrices de la norme euclidienne canonique.
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ (où $(m;n) \in \mathbb{N}^2$). On veut résoudre :

$$(E) : AX = B.$$

1. Montrer qu'il existe $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \|AX - B\| \leqslant \|AZ - B\|.$$

   On appelle un tel vecteur une *pseudo-solution* de l'équation (E) (PSE).
2. Montrer que X est PSE si et seulement si $A^T AX = A^T B$. À quelle condition sur A une PSE est-elle unique ?
3. Montrer qu'une PSE S est de norme minimale sur l'ensemble des PSE si et seulement si $S \in \left(\mathrm{Ker}(A^T A)\right)^{\perp}$. Montrer qu'il existe une unique PSE de norme minimale. On note alors $S(B)$ cette PSE.
   Montrer que l'application qui à $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ associe $S(B)$ est linéaire.

II.2.1124 **X FUF 2025**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que pour tout $\alpha \geqslant 1$ on a :

$$(\dim(F))^\alpha + (\dim(G))^\alpha \leqslant (\dim(F+G))^\alpha + (\dim(F \cap G))^\alpha$$

2. Étudier le cas d'égalité.

II.2.1125 **X MP 2025**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B).$$

Montrer que A et B sont semblables.

II.2.1126 **ENS Lyon MP 2025**

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ tel que χ_A est irréductible et soit $B \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $B^{-1}AB$ commute avec A mais B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est une matrice scalaire.

II.2.1127 **X MP 2025**

Soit E un espace vectoriel normé et $f \in L(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\operatorname{rang}(f - \mathrm{Id}) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(f - \mathrm{Id}) = 0$;

ii) $\exists a \in E \setminus \{0\}$, $\exists \ell \in E^* \setminus \{0\}$ tels que :

$$\ell(a) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ f(x) = x + \ell(x)a.$$

II.2.1128 **X MP 2025**

Soit M une matrice symétrique réelle et N une matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que MN est diagonalisable.

II.2.1129 **X MP 2025**

Soit E un espace euclidien muni d'une norme euclidienne, et soit $p \in L(E)$ une projection orthogonale.

1. Résoudre dans $L(E)$ l'équation :

$$ph - hp = h.$$

2. On considère G l'ensemble des projections orthogonales de $L(E)$ de rang r. Trouver l'espace tangent à G au point p et déterminer sa dimension.

II.2.1130 **X MP 2025**

On considère une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ X^T A X > 0.$$

On définit la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle X, Y \rangle_A = X^T A^{-1} Y, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est bien un produit scalaire.
2. Soit $N \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que AN est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   Indication : si F est un sous-espace vectoriel stable par AN, montrer que $F^\perp$ est stable par AN.

II.2.1131 **X MP 2025**

Soit $G_n = \{V \mid V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n\}$.
Soit $\phi : G_n \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall U, V \in G_n, \quad \phi(U \cap V) + \phi(U + V) \leqslant \phi(U) + \phi(V).$$

Montrer qu'il existe un unique sous-espace vectoriel V_0 de dimension maximale tel que :

$$\inf_{V \in G_n \setminus \{0\}} \frac{\phi(V)}{\dim(V)} = \frac{\phi(V_0)}{\dim(V_0)}.$$

II.2.1132 **Mines-Télécom 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'application φ sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P' - nXP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Calculer $\varphi(P_k)$ pour $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$ avec $k \in [\![0\,, n]\!]$.
4. En déduire les valeurs propres de φ.
   L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

II.2.1133 **Mines-Télécom 2023**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   (a) Montrer que $AM = MA$, puis en déduire qu'un vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de M.
   (b) En déduire que M est diagonalisable.

II.2.1134 **Mines-Télécom 2022**

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.
Montrer que $A \in SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A^T A) = 2$.

II.2.1135 **X MP 2025**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\deg(f) = n \quad \text{et} \quad \deg(g) \leqslant n.$$

On définit

$$B(f,g) = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C}),$$

par la relation, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(\lambda)g(\mu) - f(\mu)g(\lambda)}{\lambda - \mu} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij} \lambda^{i-1} \mu^{j-1}.$$

1. *Cas f scindé simple*

   Montrer que :

   $$\dim(\mathrm{Ker}(B(f,g))) = \text{ nombre de racines communes de } f \text{ et } g.$$

2. *Cas général*

   Montrer que :

   $\dim(\mathrm{Ker}(B(f,g))) \geqslant$ nombre de racines communes de f et g comptées avec leur multiplicité (minimale entre f et g).

II.2.1136 **PT 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et on définit l'endomorphisme $T \in L(\mathbb{R}^{2n+1})$ par

$$T(e_{n+1}) = \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\}, \quad T(e_k) = e_1.$$

1. Écrire la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 1$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ? bijectif ?
3. Montrer que l'on peut définir un endomorphisme $\tilde{T}$ de $\mathrm{Im}(T)$ par $\tilde{T}(x) = T(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(T)$.
4. Montrer que $\left(e_1\,; \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$ et écrire la matrice de $\tilde{T}$ dans cette base.

II.2.1137 **PT 2018**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$ l'inégalité $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$.

1. Les matrices complexes $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 2+\mathrm{i} & 1\\1 & 0 & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ vérifient-elles la condition ci-dessus ?
2. On suppose que $n = 2$. Montrer que A est inversible.
3. Soit $Z = \begin{pmatrix}z_1 & \cdots & z_n\end{pmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ telle que $AZ = 0$ et on note $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|z_i|$. Montrer que :
$$\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad |a_{ii}||z_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|.$$
4. Conclure que la matrice A est inversible.

II.2.1138 **CCINP TSI 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\0 & 2 & \ddots & \vdots & 2\\\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1\\1 & 2 & \cdots & n-1 & n\end{vmatrix}.$$

II.2.1139 **CCINP PC 2017**

Soit $(a_1;\ldots;a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\1 & a_2 & \ddots & \vdots & 0\\0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\0 & \cdots & 0 & 1 & a_n\end{vmatrix}.$$

II.2.1140 **X ESPCI 2018**

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$ positive. Montrer que M admet 1 comme valeur propre.

II.2.1141 **X ESPCI 2014**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente.
Déterminer L'ensemble $E_M = \{X^T M X \mid X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\}$.

II.2.1142 **X ESPCI 2017**

On considère
$$A = \begin{pmatrix} A' & \omega \\ \omega^T & x \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R}),$$
où $A' \in S_{n-1}(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que si A possède une valeur propre de multiplicité strictement plus grande que 1, alors ω est orthogonal à un vecteur propre de A'.

II.2.1143 **Mines-Ponts PSI 2012**

On considère la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, avec $a_{ij} = \min(i; j)$.

1. Trouver U une matrice triangulaire supérieure telle que $A = LU$, avec
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

2. On note
$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$
Exprimer A^{-1} en fonction de V.