

Produit scalaire I

- I.** Le plan vectoriel $(\mathcal{P})$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$.
On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} m^2 + 1 \\ m - 1 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{R}$.
- a)** Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
b) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$.
Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{u})$.
c) On choisit $m = -\frac{1}{2}$. Calculer l'angle des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- II.** On donne deux droites $(\mathcal{D}_{\vec{i}})$ et $(\mathcal{D}_{\vec{j}})$ engendrées par deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{i}$ et $\vec{b} = -2\vec{j}$. Donner la composante (mesure algébrique) de la projection orthogonale $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $(\mathcal{D}_{\vec{j}})$ et la composante de la projection orthogonale $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ sur $(\mathcal{D}_{\vec{i}})$ dans les cas suivants :
- a)** $\angle(\vec{i}; \vec{j}) = 30^\circ$;
b) $\angle(\vec{i}; \vec{j}) = -135^\circ$.
- III.** On donne un carré $ABCD$ de centre I et dont la mesure du côté est a . Calculer les produits scalaires suivants :
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- IV.** Soit ABC un triangle rectangle en A . Énoncer et démontrer le théorème d'Euclide.
- V.** Soit ABC un triangle quelconque. Établir la formule qui permet de calculer la longueur de la médiane m_b en fonction des mesures a, b, c des côtés du triangle.
N.B. m_b est la longueur de la médiane issue du sommet B .