

Produit scalaire III

I. On donne les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que

$$\|\vec{i}\| = 1, \quad \|\vec{j}\| = 2 \quad \text{et} \quad \angle(\vec{i}; \vec{j}) = \frac{\pi}{3}.$$

Soient $\vec{u} = -\vec{i} + m\vec{j}$ et $\vec{v} = m\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$, où $m \in \mathbb{R}$.

- a) Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- b) Déterminer m pour que l'on ait $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- c) On choisit $m = 1$. Calculer l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

II. On donne un carré $ABCD$ de côté a .

Déterminer le lieu des points M tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Discuter selon les valeurs de k .

Déterminer k pour que ce lieu contienne le point A .

III. On donne un tétraèdre régulier $SABC$ (les 4 faces sont des triangles équilatéraux) d'arête a . On désigne par M le milieu du côté AB , par N celui du côté BC . Enfin, on note H le pied de la normale au plan ABC issue de S (centre de gravité du triangle ABC).

Calculer :

- a) les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SH}, \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN}, \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} \text{ et } \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{MN};$$

- b) les angles suivants :

$$\angle(\overrightarrow{MS}; \overrightarrow{MC}) \text{ et } \angle(\overrightarrow{SH}; \overrightarrow{SM}).$$