

QUESTIONS D'ORAUX DE
MATHÉMATIQUES
DE CONCOURS D'ENTRÉE
À DE GRANDES ÉCOLES FRANÇAISES

Partie I

Analyse
Topologie

1720 exercices



Laurent Schwartz (1915-2002)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 7 septembre 2026

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Suites et séries	6
2 Continuité et dérivabilité	169
3 Calcul intégral	199
4 Équations différentielles	289
5 Fonctions de plusieurs variables	320
6 Topologie	344

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)

X (École Polytechnique (Paris))

Centrale

Centrale-Supélec

Mines

Mines-Ponts

Mines-Télécom

ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)

EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)

ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)

ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)

ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)

CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté !

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$\llbracket a, b \rrbracket$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leq k \leq b$ (a, b entiers)
$\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \dots, a_n$
$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\sigma(n)$	somme des diviseurs de n
$\text{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$ E $	cardinal de l'ensemble E
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\text{sgn}(x)$	signe de x
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\deg(P)$	degré du polynôme P
$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$	ensemble des polynômes en $X_1, \dots, X_n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$a \equiv b \pmod n$	a et b congrus modulo n

$\bar{x}$	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo p (p premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\text{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A
$\text{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $\llbracket 1, n \rrbracket$
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\text{Ker}(u)$	noyau de u
$\text{Im}(u)$	image de u
$\text{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$ A $	déterminant de la matrice A
$[x_1; \dots; x_n]$	produit mixte de $x_1, \dots, x_n$
$\text{com}(A)$	comatrice de A
$C(A)$	commutant de A
$\text{Tr}(u)$	trace de u
$\text{Sp}(u)$	spectre de u
$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de u sur $\mathbb{K}$
$\text{Vect}(v)$	espace vectoriel engendré par le vecteur v
$\text{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$\text{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S sur A
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$ -vectoriel E
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
$GL(E)$	groupe linéaire général de l'espace vectoriel E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E, F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$
$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$
$f^\star$	adjoint de f
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\ A\ $	norme subordonnée (à la norme $\ \cdot\ $) de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de x et y
$x \wedge y$	produit vectoriel de x et y ($x, y \in \mathbb{R}^3$)
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1; 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E
$\mathcal{A}_n(E)$	ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .
ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\ \cdot\ _p$
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie
$\ \cdot\ _p$	p -norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R
$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p -adique de n ($p \in \mathcal{P}$)
$ \cdot _p$	valeur absolue p -adique
$ x - y _p$	distance p -adique entre x et y
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance p -adique
F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f _A$	restriction de la fonction f à A ($A \subset E$)
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E , à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F

$L^1(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles Lebesgue-intégrables sur E
$L^2(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles de carré Lebesgue-intégrable sur E
$L^\infty(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles bornées et Lebesgue-mesurables sur E
$\cosh$	cosinus hyperbolique
$\sinh$	sinus hyperbolique
$\tanh$	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\overset{\circ}{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\operatorname{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\operatorname{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$\operatorname{dist}(A; B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E
$\mathbb{P}(E \mid F)$	probabilité conditionnelle de E sachant F
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\operatorname{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$

1 Suites et séries

I.1.1 Centrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Trouver un développement asymptotique à trois termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire des nombres réels α, β, γ tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

I.1.2 X-ENS MP

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers vérifiant $a_1 \geq 1$. Étudier la nature de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)}.$$

I.1.3 Mines-Ponts MP 2022

Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

I.1.4 Mines

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $0 < u_0 < 1$.

Trouver un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Indication : on pourra considérer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{u_n}$.

I.1.5 Mines-Ponts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

I.1.6 ENS

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Trouver un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.7 X-ENS

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2} \ln^2(n)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

I.1.8 X-ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{m+n} \leq u_m + u_n$.
Montrer que si la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée, elle converge.

I.1.9 X ESPCI 2013

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n^2}$ converge.
2. Soit $S = \sum_{n \geq 0} 2^{-n^2}$. Montrer que le nombre S est irrationnel.

I.1.10 X ESPCI 2022

Pour tout nombre réel x , on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Trouver un équivalent de $\{n!e\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

I.1.11 Mines-Télécom

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

I.1.12 Mines-Ponts PC 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n w_n$ converge et calculer sa limite.

I.1.13 CCINP PC 2002

La série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$ est-elle convergente? Le cas échéant, calculer sa limite.

I.1.14 Mines

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n^2} \sqrt{k(n-k)}\right)$.

I.1.15 Mines-Ponts PC 2016

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de termes positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ converge.
Trouver la nature de la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

I.1.16 X PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{2n^2 + 4n + 2}{3^n}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa limite.

I.1.17 Mines-Ponts MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I.1.18 X-ENS MP

Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

I.1.19 CCINP/Mines-Télécom MP

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos \left(\pi n^2 \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.1.20 X-ENS

Soit $u_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.21 Mines-Ponts MP

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la série $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{\sqrt{n^2+1}}$.

Donner un équivalent simple de $F(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.

I.1.22 Mines-Ponts PC 2018

1. Montrer que si $a, b > 0$, alors

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan \left(\frac{a-b}{1+ab} \right).$$

2. Calculer :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \arctan \left(\frac{2}{n^2} \right).$$

I.1.23 Mines-Télécom MP 2024

Donner la nature des séries de terme général u_n avec :

1. $u_n = n^a \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. $u_n = \sqrt[n^2]{n} - 1$.

I.1.24 Mines-Ponts PC 2015

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ grâce à la règle suivante :

$$u_1 = \sqrt{1}, \quad u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{1}}, \quad u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}, \dots$$

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que u_n est négligeable devant n .
5. Donner un équivalent simple de u_n .

I.1.25 Mines-Télécom PSI 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

I.1.26 X-ENS MP

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right).$$

1. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En notant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, trouver un équivalent de $a_n - \ell$.

I.1.27 Centrale 2010

Soit $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner un équivalent.

I.1.28 ENS Ulm Lyon PC 2022

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Montrer que la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

I.1.29 Mines-Ponts PSI

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln(x^2 - 2 \cosh(\alpha)x + 1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_α .
2. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de zéro.

I.1.30 X PC 2008

Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = n + \ln(n) - \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}.$$

I.1.31 Mines-Ponts PSI 2019

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$$

selon les valeurs de a et b .

I.1.32 CCINP

Montrer que la série de terme général

$$a_n = \frac{n^3 + 2n^2 + n + 1}{n!}$$

est convergente et calculer sa somme.

I.1.33 Centrale

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0; 1[$ tel que $P'_n(\alpha_n) = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; \dots; n\}$, exprimer $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$ sous forme de somme.
3. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Trouver un équivalent de α_n .

I.1.34 Centrale PC 2015

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de n . Étudier la convergence, puis la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

I.1.35 Centrale PC 2023

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. Soit encore $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

1. Calculer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence de J et calculer cette intégrale.

On pourra utiliser l'égalité : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α et β sont deux nombres réels.

I.1.36 Mines-Ponts PC 2013

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} ?$$

I.1.37 X MP 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \{(1 + \sqrt{2})^{2n}\}$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

I.1.38 Centrale PC 2004

Soit $a > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^n (a^{2^k} + 1)}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ selon les valeurs de a et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

I.1.39 CCINP PSI 2013

On considère la série de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$

3. Calculer la somme de la série.

I.1.40 Mines-Ponts PSI 2019

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Trouver D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. La fonction f est-elle intégrable sur $[1; +\infty[$?
4. Trouver un équivalent de f en zéro.
5. La fonction f est-elle intégrable sur $]0; 1]$?

I.1.41 CCP MP

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0; 1]$ tel que :

$$\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n.$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n - \ln(u_n)$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite à partir d'une intégrale.

4. Trouver un équivalent simple de u_n .

I.1.42 Mines-Télécom PSI 2019

Soit f une fonction continue, croissante et positive de $]0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(e^{-n})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que les séries de terme général u_n et v_n ont même nature.

I.1.43 Mines-Ponts

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme.

I.1.44 Mines

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

I.1.45 Mines-Ponts

Pour a et b réels, trouver la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + a \tan\left(\frac{1}{n}\right) + b \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

I.1.46 CCINP

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, l'équation

$$e^x + x = n,$$

d'inconnue $x \in [0; +\infty[$, admet une unique solution notée x_n .

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est équivalente à $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général x_n^α .

I.1.47 X PC 2013

Soit $x > 0$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$?

I.1.48 CCINP PC

Quelle est la nature de la série de terme général défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right) ?$$

I.1.49 Centrale PC 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que $u_n > \frac{1}{n}$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?
2. On suppose que $u_n > \frac{1}{n}$ pour un nombre infini d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum u_n$ est-elle divergente ?

I.1.50 Centrale

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=1}^n k u_k = o(n)$.

I.1.51 X-ENS

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \sum_{k=0}^n a_k^2 = 1.$$

Trouver un équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.52 Mines-Ponts/Centrale PC 2010

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
2. Soit $\alpha > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} ?$$

I.1.53 CCINP

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

I.1.54 X-ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un intervalle.

I.1.55 X

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de naturels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq n - 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!}$ converge.

2. On suppose que $a_n = n - 1$ à partir d'un certain rang.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!}$ est rationnel.

3. Soit $t \in [-1; 1]$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n! \alpha) = t$.

I.1.56 X-ENS

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^n$.

I.1.57 X-ENS

Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

I.1.58 X

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[0; 1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

I.1.59 X

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \cos \left(\frac{2k\pi}{2n+1} \right)$.

I.1.60 ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver un équivalent de u_n .

I.1.61 X-ENS

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $B_0 = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

En déduire la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

I.1.62 Mines/CCP

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$.

I.1.63 Centrale

Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n! \pi \alpha)}.$$

1. Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

Dans la suite, on pose $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ et on admet que α est irrationnel.

3. Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$

4. Démontrer que $R_\alpha = 0$.
5. Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.

I.1.64 ENS

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0; 1[$. Montrer que la suite

$$(x_n(1 - x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$$

admet une valeur d'adhérence inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.

2. On suppose que $(x_n(1 - x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence inférieure à $\frac{1}{4}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

I.1.65 CCP MP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1} - \ln(n)$.

- Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
- Proposer un équivalent simple de $u_n - \ell$.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n (u_n - \ell)$.

I.1.66 Centrale

Considérons la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$.

1. Soit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Montrer que ces deux suites convergent.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.
- Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $\ln(I_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1)$.
- Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n$.

I.1.67 Mines-Ponts

Soit $f \in C^1([1; +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

- Étudier la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$.
- Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ en $+\infty$.

I.1.68 Mines-Télécom MP

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Montrer que :

$$(a) \ell < 1 \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge ;}$$

$$(b) \ell > 1 \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}$$

2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

I.1.69 X MP

Soit $\lambda \in]0; 1]$. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in]0; 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \end{cases}$$

I.1.70 Centrale MP

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \mapsto tq(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int_a^{+\infty} |tq(t)| dt \leq \frac{1}{2}$.

On définit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, y_{n+1} = 1 - \int_0^{+\infty} (t-x)q(t)y_n(t) dt \end{cases}$$

2. Justifier la définition de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[a; +\infty[$.
3. Montrer la convergence uniforme de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a; +\infty[$.

I.1.71 Mines-Télécom MP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_n = (-1)^n \frac{\cos(u_{n-1})}{n} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n .

I.1.72 ENS ESPCI 2015

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.
3. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$.

Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1-4x})$ pour tout $x \in]-R; R[\setminus \{0\}$.

I.1.73 CCP MP

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
2. On note $N = \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$. Que représente N ?
3. Déterminer N .
4. Soit u_0, v_0 et w_0 trois nombres réels et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M X_n$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Le cas échéant, quelle est sa limite ?

I.1.74 CCP MP

Soit $\delta \in]0; \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(\delta) = \sum_{k=1}^n \cos(k\delta)$.

1. Donner une expression simplifiée de $S_n(\delta)$. Exhiber $M(\delta) \in \mathbb{R}$, indépendant de n , tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n(\delta)| \leq M(\delta).$$

2. Pour tout $n \geq 2$ entier, on pose $u_n(\delta) = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\delta)$.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n(\delta)$ converge simplement sur $[2; +\infty[$.

On pourra écrire $\cos(n\delta) = S_n(\delta) - S_{n-1}(\delta)$.

3. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} u_n(\delta)$ sur tout segment inclus dans $]0; \pi]$.

I.1.75 Mines-Ponts MP 2023

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$. On la note x_n .

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
 3. Donner un équivalent de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
 4. Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

I.1.76 X ESPCI

Étudier le comportement en l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, avec pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

I.1.77 Mines-Télécom MP 2023

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto [x] + (x - [x])^2.$$

On définit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f et esquisser le graphe de cette fonction.
 2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer sa limite en fonction de u_0 .

I.1.78 Mines-Ponts MP 2023

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'équation

$$\sin(x) = \frac{x}{n}$$

admet une unique solution dans l'intervalle $]0; \pi[$. On la note x_n .

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge. Calculer sa limite.
 3. Donner un développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ avec la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

I.1.79 X-ENS

Soit p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge.

I.1.80 CCP MP 2007

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \exp(-x\sqrt{n})$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$.

Lorsque $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge, on note S sa somme.

2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x)$ est équivalent à e^{-x} en l'infini.

I.1.81 X-ENS

Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n!\pi e)$?

I.1.82 Mines-Ponts MP 2023

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose :

$$\|A\| = \sup_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Étudier la convergence de $\sum A^k$ si $\|A\| < 1$. Cette condition est-elle nécessaire pour la convergence de la série ?
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_p = \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p.$$

Étudier la convergence de la suite $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.83 Mines-Ponts PC 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n^n$.

I.1.84 X-ENS

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Étudier la convergence et calculer explicitement la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}.$$

I.1.85 CCP MP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{p=0}^n u_p u_{n-p} \end{cases}$$

On souhaite obtenir une expression de u_n en fonction de n . On suppose qu'il existe un nombre réel R strictement positif tel que la série entière $\sum u_n x^n$ converge sur $] -R; R[$. Pour tout $x \in] -R; R[$, on pose $S(x) = \sum u_n x^n$.

1. Pour tout $x \in] -R; R[\setminus \{0\}$, calculer $S^2(x)$.

En déduire que pour tout $x \in] -R; R[\setminus \{0\}$:

$$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0.$$

2. Montrer que $S(0) = 1$, et qu'au voisinage de 0, $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

3. Montrer qu'au voisinage de 0, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$.

4. Conclure.

I.1.86 X MP

Pour $|t| < 1$, on pose $f(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - t^k}$.

1. Montrer que f est bien définie.

2. Montrer, pour $|t| < 1$, que $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p(n)t^n$, où $p(n)$ est le nombre de suites $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels telles que $\sum_{k=1}^{+\infty} ky_k = n$.

I.1.87 X-ENS

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que,

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad P_n(\cot^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.
3. En observant que

$$\cot^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \cot^2(t)$$

pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

I.1.88 Mines-Ponts

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $p > 1$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.
2. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ , appelé la *constante d'Euler*. Dédurre que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis de t_n . Dédurre que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Avec un raisonnement similaire, montrer que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.1.89 Centrale PC 2023

1. Soit n et p deux naturels. Calculer :

$$I_{n,p} = \int_0^1 (\ln(x))^p x^n dx.$$

2. On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$. Montrer que I converge et que

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

3. En majorant les restes de la série précédente, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I .

I.1.90 Mines-Ponts MP 2024

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}.$$

I.1.91 X PC 2021

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $x_0 \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_0 + x_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{n+1} + x_n.$$

Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.92 Mines-Ponts PSI 2024

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Sous réserve de sens, étudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. Quelle est la nature des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?
4. Bonus : trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.93 CCP

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. On suppose encore que $u_n \sim v_n$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}.$$

I.1.94 CCP

1. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de

$$u_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

I.1.95 CCINP

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
4. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0; +\infty[$?

I.1.96 X-ENS

Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n .

I.1.97 X-ENS

Pour tout entier $n \geq 4$, on considère la fonction réelle f_n définie par :

$$f_n(x) = x^{3n} - \sqrt{n} \cdot x + 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1; 2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de $\varepsilon_n = x_n - 1$ et en déduire un équivalent de x_n .
3. Donner un équivalent asymptotique à trois termes de x_n .

I.1.98 Mines-Ponts PC 2013

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.99 Centrale PC 2015

On pose, pour tout x réel,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = f(n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Étudier la nature de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}.$$

I.1.100 Mines-Ponts

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

Donner un équivalent de x_n .

I.1.101 ENSAE 2013

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

I.1.102 x MP

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $(x; y) \in [0; 1]^2$.
 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_0 \in [0; 1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe a .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

I.1.103 x PC 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par :

$$P_n(X) = X^{2n} + X^2 - 1.$$

1. Montrer que P_n possède deux racines réelles de signes opposés.
2. On note r_n la racine positive de P_n . Démontrer que la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est bornée et convergente. Déterminer sa limite.

I.1.104 Mines

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \arctan(x_n)$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.1.105 CCP 2015

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3 + x} dx.$$

1. Prouver l'existence de J_n .
2. Étudier les limites des suites $(J_n)_{n \geq 1}$ et $(nJ_n)_{n \geq 1}$.

I.1.106 Mines 2015

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$.

I.1.107 CCP 2015

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln(n)$.

1. Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer α pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et calculer alors sa limite.

I.1.108 CCP 2105

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n} \cdot x = 1$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. On note a_n cette solution. Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ et la convergence de la série $\sum a_n$.

I.1.109 Centrale 2015

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0; 1[$ tel que $P'_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k - u_n} = 0$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.110 CCP 2015

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} dt$.

Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ et en calculer un équivalent.

I.1.111 Mines 2015

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{arcosh}\left(\frac{n+1}{n}\right)$?

I.1.112 CCP 2015

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $P_n(X) = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que P_n admet deux racines positives, a_n et b_n .
2. Étudier les suites $(a_n)_{n \geq 3}$ et $(b_n)_{n \geq 3}$ et leur rapidité de convergence.

I.1.113 CCP 2015

On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^e (\ln(t))^n dt$.

1. Pour quels n , u_n est-il défini ?
2. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$.
5. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
6. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.114 Centrale 2015

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $2^{(2^n)}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

I.1.115 Centrale 2015

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On note $J = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum u_n^x \text{ converge}\}$.

1. Montrer que J est vide ou alors un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. (Illustrer par des exemples concrets.)
2. On suppose que $J \neq \emptyset$, et on note :

$$\begin{aligned} f &: J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^x \end{aligned}$$

Étudier la continuité de f et ses limites aux bornes.

I.1.116 CCP MP

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) On suppose $\alpha \leq 0$.
En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
 - (b) On suppose $\alpha > 0$.
Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

I.1.117 X PC 2019

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}.$$

On pourra commencer par regarder le comportement de $u_n + u_{n+1}$.

I.1.118 CCP MP

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], \quad u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0; 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

I.1.119 CCP 2015

Donner un développement en série entière de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

I.1.120 Mines-Télécom MP 2023

Étudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

I.1.121 Mines-Ponts

1. Montrer que l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer les réels a et b tels que la série $\sum_{n \geq 1} x_n - n\pi - a + \frac{b}{n}$ converge.

I.1.122 CCP MP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

I.1.123 CCP MP

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

I.1.124 Mines 2016

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2015}\right) x^n$ et calculer sa somme.

I.1.125 CCP MP

Soit E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. On pose :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

- (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
- (b) Prouver que pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
- (c) On pose, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que f est continue sur E .

I.1.126 CCP MP

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

I.1.127 CCP MP

On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $] -r ; r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in] -R ; R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

- (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

I.1.128 CCP MP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe z .
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$(a) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$$

$$(b) \sum n^{(-1)^n} z^n$$

$$(c) \sum \cos(n) z^n$$

I.1.129 CCP MP

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R .
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur l'intervalle $] -R; R[$.

I.1.130 CCP MP

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ avec $a_{2n} = 4^n$ et $a_{2n+1} = 5^{n+1}$.

I.1.131 CCP MP

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

I.1.132 X-ENS 2015

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée des réels $x_0 > 0$ et $a > 0$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}.$$

Étudier la limite de cette suite, et donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.133 CCP 2016

On considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et la série entière $\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n$, de somme $S(x)$.

Déterminer son rayon de convergence, et calculer sa somme sur son disque de convergence.

I.1.134 CCP MP

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que, pour tout $(u; v) \in A^2$, $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
2. (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
 (b) Démontrer que $e - u$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
3. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

I.1.135 Mines 2016

Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - n + 1}$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série $S(x)$.
2. Calculer $S(x)$ lorsque $x > 0$.

I.1.136 CCP MP

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.

I.1.137 CCP MP

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
 (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.1.138 CCP 2016

On rappelle que la série harmonique alternée converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c tels que $\frac{1}{4X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{2X - 1} + \frac{c}{2X + 1}$.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right)$ convergent, calculer leur somme.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$ converge, calculer sa somme.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^3 - x} dx$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer.

I.1.139 CCP 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = 1$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n . Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.140 Mines 2016

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{k=0}^n (2k+1)}.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n (2k+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)}.$$

Indication : on pourra utiliser une équation différentielle.

I.1.141 X-ENS 2016

1. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right)$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.142 ENSAM 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^n} dt$ et la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$.
3. Montrer que $R = 1$.

I.1.143 ENAC 2016

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction ζ .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ .
3. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx$ est définie et est égale à la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

I.1.144 Mines PSI 2016

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
2. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.
4. Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

I.1.145 Mines 2016

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n}{n!} x^n.$$

2. Trouver une relation entre S, S' et U' .
3. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)e^{-x} = 0$.
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)e^{-x}$.
5. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)e^{-x}$ en fonction de $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

I.1.146 Mines 2016

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs, convergente.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+2}}$ converge aussi.

I.1.147 Mines 2016

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers une limite ℓ . On définit alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

I.1.148 Mines 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\text{la somme harmonique } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et la fonction } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la somme $f(x)$.
2. Déterminer le comportement de $f(x)$ aux bornes du domaine de convergence.

I.1.149 CCP 2016

On considère, pour $n \geq 2$ entier, l'équation $(E_n) : x^n = x + n$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution u_n de (E_n) dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a $1 < u_n < 2$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ et sa limite ℓ .
4. Calculer un équivalent de $u_n - \ell$.

I.1.150 Mines 2016

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \end{cases}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière f n'est pas nul.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f .
En déduire la fonction f et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.151 ENSIIE 2015

À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b, c , la série de terme général

$$u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$$

converge-t-elle ?

I.1.152 CCP PSI 2019

1. Quel est le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$?
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur D .
3. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
Montrer que, pour tout $x \in D$, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que la somme S associée à cette série est continue sur D .
5. Montrer que S est intégrable sur D .

I.1.153 ENSEA/ENSIIE 2024

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

1. Démontrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Démontrer que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
3. Déterminer, par majoration ou minoration, la nature de $\sum u_n$ avec :

- (a) $u_n = n^4 e^{\sin(n)}$
- (b) $u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n^4}\right)}{2^n}$

I.1.154 Mines-Ponts 2015

Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point de la parabole $\mathfrak{P}$ d'équation $y^2 = 2px$. ($p > 0$)

On note M_n la deuxième intersection entre la normale à la parabole en M_{n-1} et la parabole.

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $\frac{1}{y_n}$.

I.1.155 TPE/EIVP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Pour quels nombres réels α la série $\sum u_n^\alpha$ est-elle convergente ?

I.1.156 Centrale 2017

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1 + \sqrt{0}}}}}$.

1. Établir une relation simple entre u_n et u_{n-1} .
2. Donner un équivalent puis un développement à deux, puis à trois termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.157 ENSEA/ENSIIE PSI 2017

1. Montrer que $P_n = \sum_{k=1}^n x^k - 1$ admet une unique racine $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.158 Mines 2012

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\exp(x^2) - 1}{x}$ est prolongeable en une fonction développable en série entière.
2. Montrer que f est strictement croissante, et réalise une bijection entre deux intervalles que l'on précisera.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction réciproque $g = f^{-1}$ en 0.

I.1.159 Mines 2012

On considère deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels positifs.

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, alors la série $\sum \frac{1}{n^{b_n}}$ converge.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, la série $\sum \frac{1}{a_n^{b_n}}$ converge-t-elle ?

I.1.160 CCP 2012

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}^2}{u_n}.$$

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n .

I.1.161 X PSI

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$.

I.1.162 X PC

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Montrer que la suite de terme général $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ converge et déterminer sa limite.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

I.1.163 x PC

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

I.1.164 ENSEA/ENSIIE 2012

On considère une série réelle convergente $\sum_{n \geq 1} u_n$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs ou nuls, de limite nulle.

1. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n u_n$ converge.
2. Trouver un contre-exemple si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas absolument.

I.1.165 CCP 2012

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Calculer a_0 et a_1 .
2. Étudier les variations et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} u_n$, et que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.
4. Montrer que la suite $((n+1)(n+2)(n+3)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire un équivalent de u_n et la nature de la série $\sum u_n$.
5. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$ et calculer cette somme.

I.1.166 CCP 2012

Étudier le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

I.1.167 Centrale 2012

On considère la série entière $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f .
2. Calculer $(1-4x)f'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire $f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

I.1.168 ENS Rennes 2017

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

Indication : on pourra développer en série entière $\frac{1}{1+t^b}$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

I.1.169 CCP 2017

Déterminer le rayon de convergence de la série $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$ et calculer sa somme.

I.1.170 CCP

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

I.1.171 CCP PC

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. Étudier la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n^3 .

3. En étudiant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

I.1.172 Mines-Ponts MP 2023

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx.$$

1. Donner une relation de récurrence sur I_n .

2. Trouver un équivalent simple de I_n en $+\infty$.

3. (a) Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(b) Exprimer I_{2n+1} à l'aide d'une série.

I.1.173 Mines-Ponts PSI

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Étudier la limite de cette suite.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2 .

4. Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n .

I.1.174 Mines-Ponts PC 2023

1. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

2. Montrer que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$$

converge uniformément sur $[0; 1]$ et calculer sa somme.

3. La série de fonctions précédentes converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

I.1.175 Mines-Ponts MP

Soit $n \geq 2$ entier et $P_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. Montrer que P'_n admet une unique racine dans $]0; 1[$, notée λ_n .

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$.

3. Trouver un équivalent de λ_n pour $n \rightarrow +\infty$.

I.1.176 Mines-Télécom MP 2023

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.1.177 Mines-Télécom MP 2023

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$.

I.1.178 CCP PC

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

I.1.179 CCP PSI

Soit, pour tout réel $t \geq 1$,

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}$$

et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt.$$

Étudier le sens de variation de la fonction f , préciser le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la nature de la série $\sum u_n$.

I.1.180 ENSAM PSI

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes positifs, avec $a_1 \geq 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x^k$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0; 1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.
2. Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ .

I.1.181 X ESPCI

Soit $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ vaut 1.
2. Pour tout $x \in]-1; 1[$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $] -1; 1[$.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

I.1.182 CCP PSI

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n^a) x^n$.

I.1.183 Centrale PSI

Soit $(d_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$d_0 = 1, d_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n).$$

1. Calculer d_2 et d_3 . Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.
2. Pour tout $x \in]-R; R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
3. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n .

I.1.184 Mines-Ponts PC 2011

On pose, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right).$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.185 CCP MP 2018

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; +\infty[, \quad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}.$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

- (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.1.186 CCP MP 2018

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}.$$

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- (b) Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a; b]$? sur $[a; +\infty[$?

- (c) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0; +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

I.1.187 x

Soit $\theta \in [0; 2\pi]$ et $t \in [0; 1[$. On pose :

$$S_n(t) = \sum_{p=1}^n t^{p-1} \sin(p\theta).$$

1. Calculer $S(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t)$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

I.1.188 X MP 2019

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , telle que $\int_0^{+\infty} |f'(x)| \, dx < +\infty$.

Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

sont de même nature.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(\ln(n))}{\ln(n)}$?

I.1.189 Centrale

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx+1)}$.

- Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis un équivalent de S en $+\infty$.
- Déterminer la limite de S en 0^+ .

I.1.190 TPE/EIVP PC 2018

Posons, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right).$$

Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général u_n .

Indication : utiliser l'identité $n^2 + 3n + 3 = 1 + (n+1)(n+2)$.

I.1.191 ENSAE MPI 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

- Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
- Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.192 Mines-Télécom MP 2024

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

- Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.193 CCINP MP 2024

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a :

$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

2. Montrer que

$$\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}(\ln^2(n) - \ln^2(n-1))$.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

I.1.194 Mines-Télécom MP 2025

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n).$$

I.1.195 CCINP PSI 2024

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

I.1.196 CCINP PSI 2014

Résoudre l'équation

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 5$.

I.1.197 Mines-Ponts PC 2018

On note $F = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Préciser la dimension de F .
2. Pour tout entier $p \geq 3$, on note v_p le nombre de parties de $\{0; 1; \dots; p\}$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques d'une de ces parties soit supérieur ou égal à 3. Montrer que la suite $(v_{n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de F .

I.1.198 TPE/EIVP PC 2019

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et discuter la convergence de celle-ci en fonction de la valeur de u_0 .

I.1.199 CCINP PSI 2024

On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de cette série.
2. Calculer $\alpha_n = \int_0^1 (1-t)t^{3n} dt$.
3. Calculer la somme $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{N-1}$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2} dt$.
5. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.
6. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

I.1.200 ENSAE MP 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation :

$$(E_n) : \sum_{k=1}^n x^k = 1.$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une unique solution x_n de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.201 CCINP TSI 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (n\pi + t)^2 \sin^2(t)} dt \quad \text{et} \quad a_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (n\pi)^2 \sin^2(t)} dt.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0; \pi]$, $\sin(t) \leq t$.
2. Montrer que $a_n \geq \frac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que $a_{n+1} \leq u_n \leq a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

I.1.202 Mines-Télécom PSI 2021

Développer en série entière la fonction f définie par :

$$f(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

I.1.203 Centrale-Supélec PC 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = -4 + \sum_{k=1}^n X^k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0; +\infty[$. Cette racine est notée x_n .
2. Calculer x_1 et x_2 . Montrer que $x_5 < 1$.
3. Quel est le signe de $P_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est monotone puis qu'elle converge. Sa limite est notée ℓ .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
5. Montrer que x_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de ℓ .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n = x_n - \ell$.
Vérifier l'égalité $\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $n\delta_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
7. Trouver une constante K telle que δ_n soit équivalent à $K \cdot \ell^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.204 TPE/EIVP MP 2017

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \exp\left(-\frac{k}{n}\right)$.

I.1.205 Mines-Ponts MP 2017

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^p \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.
2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ d|k}} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{d} \int_0^1 f(t) dt.$$

I.1.206 Mines-Ponts MP 2019

Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

I.1.207 Mines-Ponts MP 2021

Soit x réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1 + x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k.$$

I.1.208 Centrale-Supélec PSI 2018

Dans tout l'exercice, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $p_n = \prod_{k=0}^n a_k$. On dira que $\prod a_k$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie non nulle. On pose pour tout n , $u_n = a_n - 1$.

1. Prouver que, si $\prod a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. On suppose dans toute la suite que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Montrer que la suite $(\ln(1 + u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge.
3. On suppose maintenant que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang. Montrer que $\prod a_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
4. En étudiant directement la convergence de

$$\prod \left(1 + \frac{1}{1+n}\right),$$

démontrer la divergence de la série harmonique.

I.1.209 Mines-Télécom MPI 2025

Soit $k \geq 2$ un entier. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

I.1.210 Mines-Télécom MP 2024

On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
2. Montrer par récurrence que la suite est majorée par 2.
3. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

I.1.211 Mines-Télécom MP 2025

Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 + 2n + 1.$$

Indication : il pourra être utile d'introduire l'endomorphisme $S - 2\text{Id}$, où S est l'application suivante :

$$\begin{aligned} S : \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

I.1.212 Mines-Télécom PSI 2023

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation

$$1 + \ln(x + n) = x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On note u_n cette solution.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
 3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n) < u_n < n$$

et en déduire un équivalent de u_n .

I.1.213 CCINP TSI 2022

On considère $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. (a) Vérifier que $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$.
 (b) En déduire la valeur de I_1 .
 (c) Interpréter géométriquement ce calcul.
2. Proposer une méthode numérique permettant un calcul approché de I_n .
3. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
 (b) En déduire que $(n+1)I_n \leq e$.
 (c) En déduire la limite de I_n .

I.1.214 TPE/EIVP MP 2018

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Montrer que $|u_n|$ et v_n tendent forcément vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.215 ENSEA/ENSIIE MP 2019

On considère, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

I.1.216 Centrale-Supélec PC 2016

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x_0; y_0) = (0; 0)$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Calculer les premiers termes de chaque suite et conjecturer leur comportement.
3. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).
4. Montrer que $(x_{2n} - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1} - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$, où ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent vers 0. (On pourra pour cela majorer $x_{n+1} - \ell$.)
5. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$, l'écart entre y_n et sa limite et celui entre x_n et sa limite est inférieur à ε . Déterminer ce rang pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

I.1.217 CCINP MP 2025

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot S_n = 1$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge (raisonner par l'absurde), puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$.
3. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

I.1.218 Mines-Télécom MP 2017

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs tels que $\sum u_n$ converge. Démontrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

I.1.219 ENSEA/ENSIIE MPI 2025

Soit la série de terme général $(n^2 + n + 1)x^n$.

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

I.1.220 Mines-Télécom MP 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^k) x^k$.

I.1.221 CCINP PC 2021

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} \right).$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

I.1.222 CCINP PC 2019

Pour tout entier $n \geq 2$, soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + a_n)$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^n (1 + a_k)$.

I.1.223 Mines-Ponts MP 2019

1. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = k ?$$

2. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2} ?$$

I.1.224 Mines-Ponts MP 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période d . Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n^\alpha}$.

I.1.225 Mines-Ponts PC 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n \ln(n)}$.

I.1.226 Mines-Ponts MP 2025

Montrer la convergence de la somme suivante et en calculer la valeur :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right).$$

I.1.227 ENSAE MP 2024

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{n+1}{2} z^{2n}$.

I.1.228 CCINP MP 2017

On définit la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) dx.$$

1. Justifier la définition de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2} J_{n-1}.$$

3. En utilisant le résultat de la question 2, trouver la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.229 Mines-Télécom MP 2019

On considère la suite de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer l'existence de $c > 0$ tel que $u_n \sim \frac{c}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$?
4. Étudier la convergence en R et en $-R$.

I.1.230 Mines-Ponts MP 2019

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, où $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^n$.

1. Étudier la nature de cette suite.
2. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{u_n - 1}{n}$.

I.1.231 Mines-Ponts PSI 2013

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{arcosh}(n) - \operatorname{arsinh}(n).$$

I.1.232 Mines-Télécom MP 2022

Soit trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, déterminées par leur premier terme x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{4} \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4} \\ z_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les trois suites sont toujours convergentes.

I.1.233 Mines-Télécom MP 2018

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx = 2.$$

I.1.234 CCINP PSI 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \text{Tr}(A^n)$.

1. Trouver une relation vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

I.1.235 CCINP MP 2022

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

Montrer que la série $\sum w_n$ converge.

4. En déduire qu'il existe deux réels a et C tels que $u_n \sim \frac{C}{n^a}$.

I.1.236 Mines-Ponts MP 2014

On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n-3}{2n+1} u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
2. Étudier la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

I.1.237 CCINP PC 2024

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum u_n$.

I.1.238 CCINP MP 2022

1. Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0; 1]$.
2. On pose $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et qu'elle est de limite nulle.
3. Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties.
4. (a) Exprimer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n .
(b) Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n \sin(2\pi n!e)$.

I.1.239 Mines-Télécom MP 2025

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}$.

I.1.240 Mines-Ponts MP 2025

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ et calculer sa somme.

I.1.241 Mines-Ponts MP 2022

Soit u la suite réelle définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt[n]{n!}.$$

Trouver une suite v d'éléments de la forme $n^\alpha (\ln(n))^\beta$, avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $u - v$ soit convergente.

I.1.242 CCINP PSI 2019

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) e^t$. Montrer que :

$$\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n} \quad \text{et} \quad \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1 \right| \leq \frac{t}{n} e^t.$$

2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où :

$$I_n : x \in [0; 1] \mapsto \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right) e^t dt.$$

I.1.243 Centrale-Supélec PC 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n \exp(-t) t^n dt.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .
2. Montrer que $\ell \leq \frac{1}{2}$.

I.1.244 Mines-Télécom MP 2023

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}.$$

1. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

I.1.245 CCINP TSI 2024

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}.$$

Donner une condition sur a et b afin que le premier terme du développement limité de f en 0 soit de degré maximal.

I.1.246 Mines-Télécom MP 2024

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Déterminer l'intervalle de définition de f .
2. Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

I.1.247 Mines-Télécom MP 2022

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x \in \mathbb{R}_+, \quad \cos(x) = nx.$$

2. On note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

I.1.248 CCINP PC 2021

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = a_{n+1} - a_n.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} D_n$ converge.

I.1.249 Mines-Télécom MP 2022

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)} \right).$$

I.1.250 CCINP MP 2023

On considère :

- $\sum a_n x^n$ série entière de rayon R , de somme $f(x)$,
- $\sum b_n x^n$ série entière de rayon R' , de somme $g(x)$,
- $\sum c_n x^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$.

1. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$?
Que dire de la somme de la série ? (Aucune démonstration n'est exigée.)
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

I.1.251 Mines-Ponts MP 2022

Pour $n \geq 1$ entier et $x > 0$, on pose :

$$u_n(x) = x^{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$, puis étudier la continuité de sa somme.

I.1.252 Mines 2022

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine entière.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(\left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right| \right)$.

I.1.253 Mines 2023

Calculer $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 n + n^2 m + 2mn}$.

I.1.254 Mines 2023

Soit $b \geq 2$. On note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base b de n . On pose $u_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = n u_{c(n)}$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

I.1.255 Mines 2023

Soit f une fonction continue sur $[0; \pi]$. Pour $n \geq 1$ entier, on pose

$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| f(t) dt.$$

1. Montrer que $I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \sin(t) dt$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Indication : on pourra étudier $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin(t) dt$.

I.1.256 Mines 2022

On fixe $\alpha \geq 0$ et on pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx.$$

1. Déterminer la limite et un équivalent de u_n lorsque $\alpha = 0$.
2. Faire de même lorsque $\alpha > 1$.
3. À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$, faire de même lorsque $\alpha = 1$.
4. En déduire la limite de u_n lorsque $\alpha \in]0; 1[$.

I.1.257 Mines 2024

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donner un équivalent de :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k}}.$$

I.1.258 Mines 2024

On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi^4}{48} - a_n b_n \right).$$

I.1.259 X 2022

Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, et on note R le rayon de convergence de f .

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- i) $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |a_n| \leq (C + \varepsilon)^n$;
- ii) $R = +\infty$ et $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq r_0 \implies |f(z)| \leq e^{(C+\varepsilon)|z|}$.

I.1.260 CCP 2023

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) = 0$.
3. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. À l'aide de la continuité uniforme de f , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} \right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

I.1.261 CCP 2024

Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + \lambda n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ en fonction de λ .
2. Même question pour la convergence uniforme.
3. On définit à présent :

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + 2^n x^2) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$

- (a) Donner le domaine de définition de G .
- (b) Donner le domaine de continuité de G .
- (c) Donner le domaine de dérivabilité de G .

I.1.262 Mines 2024

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + (n+1)u_n}{n+2}.$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.263 Mines 2024

Étudier la série entière :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^2 + 1} dt.$$

I.1.264 Centrale 2023

Pour tout $n \geq 1$ entier, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Soit encore :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que $H_n = \ln(n) + O(1)$. En déduire les rayons de convergence de f et g .
2. Donner une expression de g et en déduire un équivalent de f en 1^- .
3. En calculant $(1-x)f(x)$, montrer que f admet une limite finie en -1 et la calculer.

I.1.265 Mines 2022

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Donner le domaine de continuité de f .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0^+ .

I.1.266 Mines 2024

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On définit la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 et α pour que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$.

Trouver la constante optimale $C > 0$ telle que $\|e_{n+1}\| \leq C \|e_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.1.267 Mines-Télécom MP 2021

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$?

I.1.268 Centrale 2023

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

1. Montrer qu'une série (réelle ou complexe) absolument convergente est convergente.
2. (a) On note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et on suppose que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k) + S_n b_n.$$

- (b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.
3. (a) On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que si $\sum b_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
(b) Montrer la réciproque.

I.1.269 Centrale 2023

On fixe $a > 0$ et on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx) \exp(-n^a).$$

1. (a) Rappeler le théorème de dérivation des séries de fonctions.
(b) Donner le domaine de définition de f . Montrer que f est de classe C^∞ .
2. On suppose $a > 0$. Montrer que $\tau_x : t \mapsto f(x+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Qu'en est-il lorsque $a \leq 1$?

I.1.270 Mines 2022

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Discuter de la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en fonction de α .

I.1.271 Mines 2023

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto f(nx)$.
(a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
(b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur tout compact ?
2. Mêmes questions avec $f_n : x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right)$.

I.1.272 Mines 2023

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son rayon de convergence.
2. Exprimer les coefficients a_n de cette série entière sous forme d'une somme.
3. Donner une relation de récurrence entre les a_n .
4. Effectuer un développement asymptotique de $\ln(a_n)$ à la précision $O(\ln(n))$.

I.1.273 Mines-Ponts MPI 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $[0; 1]$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$b_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^n (1 - a_k t) dt.$$

1. Dans cette partie, on suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
 - (a) Démontrer que $b_n \geq \frac{1}{n+1}$.
 - (b) En utilisant $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_k$, démontrer que $b_n \leq \frac{1 - e^{-\sigma_n}}{\sigma_n}$.
 - (c) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.
2. Dans cette partie, on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel de l'intervalle $]0; 1[$. Soit $\alpha \in]-1; 0[$.
 - (a) Démontrer que pour tout $x \in [0; \alpha]$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$x - Cx^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- (b) En déduire un équivalent de b_n en $+\infty$.

I.1.274 Mines-Ponts MP 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : t \mapsto \frac{2t}{t^2 + n^2}.$$

1. Étudier les modes de convergence de $\sum u_n$.
2. On note g la fonction somme. Montrer sa continuité.
3. La fonction g est-elle de classe C^1 ?
4. Étudier la limite de g en $+\infty$.

I.1.275 Mines-Télécom MP 2025

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+n^2x^4} dx.$$

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.276 CCINP MP 2021

On pose, pour tout réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = r^n(e^{inx} + e^{-inx})$$

avec r un nombre réel fixé tel que $|r| < 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $P_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

3. Calculer $\int_0^{2\pi} P_r(x) dx$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

I.1.277 Mines-Télécom MP 2021

1. Donner une condition nécessaire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la série numérique $\sum u_n$ converge.
2. Cette condition est-elle suffisante ? Justifier.
3. Déterminer la nature de la série de terme général

$$v_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

en fonction des réels a et b .

I.1.278 Mines-Ponts MP 2021

Soit $\alpha \in]0; \pi[$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2 \cot(\alpha)x - 1} \end{aligned}$$

Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.

I.1.279 Mines-Ponts MP 2021

Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor}{k(k+1)}.$

I.1.280 Mines-Télécom 2021

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \cos^n(x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité et la périodicité de f .
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$. Exprimer f' .
4. En déduire une expression de f .

I.1.281 CCINP MP 2021

À l'aide de séries entières, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser 1.)

I.1.282 Mines-Télécom MP 2018

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, on pose $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

Étudier les convergences simple, absolue, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0; +\infty[$.

I.1.283 ENSEA/ENSIIE MP 2018

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général

$$u_n = \sqrt{P(n)} - n^2 - n + 1$$

converge.

I.1.284 Mines-Télécom MP 2023

1. Montrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. On pose :

$$u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

- (a) Étudier la convergence simple, puis la convergence normale de S .
- (b) Montrer que S est de classe C^1 et calculer S' .

I.1.285 Mines-Télécom 2025

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

1. Montrer que f existe.
2. Trouver $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

I.1.286 CCINP PSI 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0; +\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x) dx$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

I.1.287 CCINP TSI 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

I.1.288 CCINP MP 2024

Soit $p \geq 2$ entier et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{p} \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de la série $f(x)$, et l'écrire sous une forme simplifiée.
3. La série converge-t-elle uniformément sur $] -R; R[$?
4. Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$, écrire les coefficients sous forme trigonométrique.

I.1.289 Mines-Ponts MP 2022

1. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers avec $p_n \geq 2$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_1 \cdots p_n}$ converge et que sa somme appartient à $]0; 1]$.
2. Soit $x \in]0; 1]$. Montrer qu'il existe une unique suite croissante $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_1 \cdots p_n}$.
3. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

I.1.290 Mines-Ponts MP 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{\rho; z; \bar{z}\}$ avec $\rho > 1$ et $|z| < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \rho^n + z^n + \bar{z}^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \sin(\alpha u_n)$ et $\sum \sin(\alpha \rho^n)$ sont de même nature.

I.1.291 TPE/EIVP MP 2015

1. Montrer que la série double de terme général $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^2}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, diverge.
2. Étudier la convergence de la série double de terme général $v_{p,q} = \frac{1}{p^2 + q^2}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

I.1.292 Mines-Télécom PSI 2022

On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$.

1. Soit $f \in C^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \frac{1}{2}]$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(2kt) = \frac{(-1)^n \cos((2n+1)t) - \cos(t)}{2 \cos(t)}.$$

3. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2kt) dt$, puis en déduire que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.

I.1.293 ENSEA/ENSIIE MP 2023

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $e^{\cos(x)}$.

I.1.294 Mines-Ponts MP 2021

1. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S .
2. Proposer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que S est irrationnel.

I.1.295 Mines-Ponts PSI 2019

Soit f définie par $f(t) = \cos\left(\frac{\arcsin(t)}{2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f .
2. En déduire un développement en série entière de f .

I.1.296 Mines-Ponts MP 2018

Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt$?

I.1.297 CCINP PC 2022

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose :

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité

$$v_{n+p-1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right)$$

et en déduire l'encadrement

$$0 \leq v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

3. Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \exp(2^n \ell)$ et $s_n = t_n - u_n$.
4. Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer une relation entre s_{n+1} , s_n et u_n .
6. En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

I.1.298 CCINP MP 2024

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $\arcsin$.
2. Justifier que la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = (\arcsin(x))^2$$

admet un développement en série entière.

3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.
4. En déduire le développement en série entière de f .

I.1.299 Mines-Ponts MP 2021

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1, \forall n \geq 2, \quad a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie, puis que la série $\sum a_n^{-2}$ converge.

I.1.300 Mines-Ponts MP 2021

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

2. Soit $a > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0; a] \rightarrow [0; a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha).$$

- (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0; \varepsilon]$.
- (b) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- (c) Trouver un équivalent en 0 de $(f(x))^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand $x \rightarrow 0$.
- (d) En déduire un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
- (e) Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

I.1.301 Mines-Télécom MP 2018

Déterminer si la série de terme général

$$\frac{1}{\ln(n) \ln(\cosh(n))}$$

converge.

I.1.302 Mines-Ponts MP 2023

On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$.

On pose $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que G est définie pour $|t| < 1$ et qu'on a :

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$

2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

I.1.303 Mines-Ponts PC 2023

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 + 10^{-2^k})$.

I.1.304 Mines-Télécom MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation :

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}.$$

1. Montrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que u_n et v_n vérifient (E_n) , et pour n assez grand, $0 < u_n < e < v_n$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? On note ℓ sa limite.
3. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

I.1.305 CCINP PC 2021

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = a_{n+1} - a_n.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} D_n$ converge.

I.1.306 CCINP PC 2021

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Montrer que la suite est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

I.1.307 Mines-Télécom MP 2021

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{(n+2)n!} x^n.$$

I.1.308 Mines-Ponts MP 2016

1. Montrer qu'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Soit $f \in C^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

I.1.309 Mines-Télécom MP 2017

Soit $S = \sum_{n \geq 0} \tan\left(\frac{n\pi}{5}\right) z^n$.

- Donner le rayon de convergence R de cette série.
- Soit $a = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Exprimer $\tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ en fonction de a , pour $n \in \{2; 3; 4\}$.
- Simplifier $S_{5N}(z)$ pour $|z| < R$.
- Calculer S sur l'intervalle $] -R; R[$.

I.1.310 Mines-Ponts MP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}} dt.$$

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.
- Trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

I.1.311 X MP 2017

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) et $u_{n+1} = \tanh(u_n)$.

- Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Trouver un équivalent de u_n .

I.1.312 Mines-Ponts MP 2017

Étudier la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) et $u_{n+1} = \frac{1 - u_n^2}{1 + u_n^2}$.

I.1.313 CCINP PSI 2019

1. Soit $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Montrer que :

$$|\ln(1+t) - t| \leq 2t^2.$$

2. Montrer la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n x}{n^2(1+x^2)} \right) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

I.1.314 CCINP PSI 2019

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh^n(t)} dt.$$

- Montrer que I_n est bien définie.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?
- Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
 - Utiliser cette relation pour calculer :

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^3(t)} dt.$$

I.1.315 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 - u_n) = 0$.

Que peut-on dire des affirmations suivantes ?

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^3 - u_n) = 0$

I.1.316 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 = a$, $x_1 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \min(3 - x_{n+1}; 2x_n - 2).$$

- Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins un terme négatif.
- En déduire le caractère non borné de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.317 Mines-Ponts MP 2019

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+m)!}$.

I.1.318 Mines-Ponts MP 2012

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{n \sin(n)} z^n$.

I.1.319 Mines-Ponts MP 2014

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^3}} \right) ?$$

I.1.320 Mines-Ponts MP 2014

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) - \ln(n)}{k - n}.$$

I.1.321 Mines-Ponts MP 2015

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_{1,1}; \dots; a_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n a_{k,n} z^k.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

I.1.322 Mines-Ponts MP 2016

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = U_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = U_{n+1} + (n+1)U_n.$$

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \frac{x^n}{n!}.$$

1. Expliciter f et en déduire U_n pour tout n .
2. Comparer U_n et $V_n = \text{Card}(\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = \text{Id}\})$, où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1; \dots; n\}$.

I.1.323 Mines-Ponts PSI 2016

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante telles que $u = v + w$.

I.1.324 Mines-Ponts MP 2016

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

I.1.325 Mines-Ponts MP 2016

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

I.1.326 Mines-Ponts MP

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive, strictement croissante et non bornée. Montrer que si la suite $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, alors (*théorème de Stolz*) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

2. Dédurre, à partir du théorème de Stolz, le lemme de Cesàro.
3. En utilisant le théorème de Stolz, établir que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

4. (a) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 0.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

- (b) Soit $\lambda \in]-1; 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - \lambda a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$.

I.1.327 Mines-Ponts MP 2022

Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions :

$$(u_1; v_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) v_n \\ v_{n+1} = v_n - \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

I.1.328 X MP 2018

Soit $x \in [-\pi; \pi]$. Montrer que

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

vaut x^2 .

I.1.329 Mines-Ponts MP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On pose $\omega(n) = \min(\{p \in \mathbb{N}^* \mid H_p \geq n\})$.
Donner un équivalent de $\omega(n)$.

I.1.330 X ESPCI 2017

1. Trouver la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, avec $x_0 \in]0; 1[$.
2. Donner un équivalent de $x_n - 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

I.1.331 Mines-Télécom PSI 2023

1. Soit $\theta \in]0; \pi[$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta)x^k$.
Montrer par l'absurde que la suite $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.

I.1.332 X PC 2019

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs réelles, et convergeant uniformément sur I . On pose :

$$g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .

I.1.333 CCP MP

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

I.1.334 ENSEA/ENSIIE MPI 2024

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$, puis calculer sa somme pour $x \geq 0$.

I.1.335 CCP MP

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f . On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a; +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0; +\infty[$.

I.1.336 CCP MP

1. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est bornée et que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers g . Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

I.1.337 CCP MP

1. Soit a et b deux nombres réels donnés avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a; b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

I.1.338 CCINP MP 2025

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)$, où x est un nombre réel.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f avec la condition $f(0) = 0$.
3. Déterminer le développement en série entière de f .

I.1.339 CCP MP

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A

$\Downarrow$

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

(b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

I.1.340 CCINP MP 2025

On pose $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 2$ entier :

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer d_2 et d_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$(n+1)d_n = nd_{n-1} - d_{n-2}.$$

3. En déduire une information sur le rayon de convergence de $\sum d_n x^n$.

4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. On admet que f vérifie l'équation :

$$(E) : (1-x)f'(x) - xf(x) = 1.$$

Montrer que $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1-x}$. En déduire une expression de d_n en fonction de n .

I.1.341 Mines-Ponts MP 2025

1. Décomposer $X^4 + 1$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que $X^4 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2$.

2. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^4 + 1}$.

3. Justifier l'existence puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

I.1.342 CCINP MP 2025

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4^{n+1}n!$

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Montrer que f est solution de l'équation $f' = f^2$ sur un intervalle à préciser.

3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

4. Exprimer u_n en fonction de n .

I.1.343 CCINP MP 2025

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et on suppose que $\sum a_n$ converge.

Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k).$$

3. En déduire que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

I.1.344 Mines-Télécom MP 2025

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^2 \cos(x) \sin^n(x).$$

I.1.345 CCINP MP 2025

On pose $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$ entier, $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k}$.

On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et on note $R > 0$ son rayon de convergence.

1. Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$, $f^2(x) = f(x) - x$. Déterminer $f(0)$.

2. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$. Préciser R .

3. Développer $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

I.1.346 CCINP PSI 2017

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
4. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

I.1.347 Centrale-Supélec MP 2017

1. Rappeler le théorème d'interversion de $\lim$ et $\sum$ pour les séries de fonctions (ou théorème de la double limite).
2. On admet que :

$$\frac{\pi x}{\tan(\pi x)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, où $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.1.348 X MPI 2023

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ continue strictement croissante. Montrer que :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \text{ converge} \iff \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \text{ converge}.$$

I.1.349 Mines-Télécom MPI 2023

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ .

Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x)$.

I.1.350 CCINP PSI 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\begin{aligned} f_n &:]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(nx) e^{-n^2 x^2} \end{aligned}$$

1. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. Étudier la convergence uniforme de f sur $[\alpha; 1]$, où $\alpha \in]0; 1[$, puis sur $[0; 1]$.

I.1.351 X MP 2017

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Que dire de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

I.1.352 Mines-Ponts PSI 2022

On pose :

$$\forall x > 0, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis déterminer un équivalent.
3. Déterminer la limite de S en 0.

I.1.353 CCINP PSI 2022

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

I.1.354 TPE/EIVP PC 2018

Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$.

I.1.355 CCINP PC 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) : x \sqrt{1 + \frac{x}{n}} = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution strictement positive, notée x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

I.1.356 Mines-Télécom MP 2024

1. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
2. Donner une valeur approchée de π à 10^{-10} près.

I.1.357 Mines-Ponts MP 2022

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \sqrt{k} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

I.1.358 CCINP MP 2022

1. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe C^{n+1} .
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite notée ℓ .

3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

I.1.359 Mines-Télécom MP 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.

1. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

I.1.360 ENS MP 2021

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

I.1.361 Mines-Ponts MP 2021

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^n u_k\right)^2}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! \theta_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta_n)},$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}.$$

2. Déterminer θ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis trouver un équivalent de u_n .

I.1.362 Mines-Télécom MP 2022

Étudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

I.1.363 CCINP PC 2024

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{k^2}{k^2 + 1} x \exp(-kx).$$

1. Montrer que la série de $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

I.1.364 CCINP MP 2017

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers 0.

1. Déterminer la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{n \sqrt{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt{n}}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On admet que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln \left(1 + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k} \sqrt{2k+1}} \right).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2}.$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0.$$

3. La série $\sum_{n \geq 2} \ln(U_n)$ est-elle alternée ? Satisfait-elle les conditions permettant de dire que la série converge ?
4. Donner le développement en série entière de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \ln(U_n)$.

I.1.365 Centrale-Supélec TSI 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

1. Étudier la nature de la série $\sum v_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de $n!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Déterminer la valeur de c , en utilisant $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

I.1.366 x

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

I.1.367 x MP MPI 2024

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle majorée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

I.1.368 Mines-Télécom MP 2018

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle bornée.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$. On pose :

$$\forall x \in]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

2. Montrer que $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}$.

I.1.369 Mines-Télécom MP 2017

On note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, et on s'intéresse à $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$.

Montrer l'existence de cette somme puis la calculer.

Indication : on pourra introduire une série entière.

I.1.370 Mines-Ponts MP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \exp(\sqrt{k})$.

Donner un développement asymptotique à 2 termes de S_n .

I.1.371 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{2} u_{n+1} = 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

I.1.372 Centrale

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=0}^n k u_k \underset{+\infty}{=} o(n)$.

I.1.373 CCINP PC 2014

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose $\theta(t) = \frac{\ln(1-t)}{t}$ qu'on prolonge par $\theta(0) = 0$.

1. Montrer que θ est continue sur $] -\infty ; 1]$.
2. Soit $x \in [-1 ; 1]$.

(a) Montrer que $\theta(t) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$.

(b) On note $L(x) = \int_0^x \theta(t) dt$. Montrer que $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3. (a) Montrer que $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

(b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4. (a) Montrer que :

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x).$$

(b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

I.1.374 Mines-Télécom MP 2017

Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$, pour θ réel fixé.

1. Démontrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer f' , en déduire f .

I.1.375 ENS MP 2017

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$X_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}.$$

1. Si f est convexe, admet un unique zéro et f' ne s'annule jamais, étudier la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Si $f(x) = x^2 - a^2$ où $a \in \mathbb{R}$, étudier la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon X_0 .
3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $X_0 = 0$, étudier la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Toujours pour la fonction f de la question 3, montrer l'existence de deux intervalles tels que si X_0 appartient à l'un de ces deux intervalles, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

I.1.376 ENS

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge.

I.1.377 ENSEA/ENSIIE MP 2017

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ n \sin\left(\frac{x}{n}\right) & \text{sinon} \\ \frac{x}{x(1+x^2)} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur tout segment inclus dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle ?
3. Utiliser une autre méthode pour montrer la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ et calculer sa limite.

I.1.378 CCINP MP 2018

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + n}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_S de S .
2. Montrer que S est de classe C^1 sur D_S .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$\ln(1+x^2) - \ln(x^2) \leq S(x) \leq \ln(1+x^2) - \ln(x^2) + \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0^+ .

I.1.379 Mines-Ponts MP 2018

Soit $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\sin(\sqrt{n}\pi)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{t}\pi)}{t^\alpha} dt.$$

1. Montrer que $\sum v_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

I.1.380 CCINP PC 2019

Soit E_λ l'ensemble des suites de réels strictement positifs, vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Notons :

- si $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $v_0 = 1$,
- si $n \geq 2$, $w_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$ et $w_0 = w_1 = 1$.

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E_\beta$.
2. (a) Montrer que :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right).$$

(b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 2} \in E_\lambda$ pour un certain λ à préciser.

3. (a) Donner la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^2} dt$.

(b) Donner la nature de $\sum w_n$.

4. Soit $\lambda > -1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\lambda$. On pose $\beta = \frac{1-\lambda}{2}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire la nature de $\sum u_n$.

5. Soit $\lambda < -1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\lambda$. Déterminer la nature de $(u_n)_{n \geq 1}$.
6. Que se passe-t-il pour $\lambda = -1$?

I.1.381 Mines-Ponts MP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\langle n \rangle$ l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}.$$

I.1.382 Mines-Ponts MP 2018

On note $a_n = \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

I.1.383 Mines-Ponts MP 2018

Étudier la nature de la série $\sum u_n$, où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n).$$

I.1.384 CCINP PC 2018

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-x^n) dx$.

1. Soit $n > 0$. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge.

I.1.385 CCINP PC 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx.$$

1. Montrer par une intégration par parties que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. (a) Montrer que :

$$v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du.$$

- (b) Montrer que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{2\pi}$.
4. On définit la fonction f par :

$$f : x \in]0; \frac{1}{2}[\mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0; \frac{1}{2}]$.

5. Donner un équivalent de u_n .

I.1.386 Mines-Télécom PC 2018

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n.$$

I.1.387 Mines-Ponts PC 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan(x) dx.$$

Déterminer la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

I.1.388 Mines-Ponts MP 2018

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt[n]{n}}.$$

I.1.389 Mines

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t) \cos^n(t) dt.$$

1. Étudier la nature de $\sum u_n(\alpha)$ en fonction de α .
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

I.1.390 Mines-Ponts MP 2015

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 t^2}$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \phi_n(t) dt.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment.

I.1.391 Mines-Ponts MP 2014

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) - \ln(n)}{k - n}.$$

I.1.392 CCINP PC 2016

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$$

et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que

$$\sum_{k \geq 0} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$$

converge. Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $\frac{u_0(b-1)}{b-1-a}$.

I.1.393 Mines-Ponts MP 2015

Soit f_0 une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

Montrer que $g = \sum_{n \geq 0} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la calculer en fonction de f_0 .

I.1.394 CCINP MP 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}.$$

1. Montrer que :

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}.$$

2. En déduire que $u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}$.

3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$.

Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.

5. Trouver la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$.

I.1.395 Centrale-Supélec MP 2023

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Définir la continuité par morceaux de f sur I .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Dessiner le graphe de f_n pour un n choisi. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une certaine fonction g , mais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \neq \int_{\mathbb{R}_+} g.$$

3. Énoncer le théorème de la convergence dominée et le prouver avec l'hypothèse supplémentaire de convergence uniforme sur tout segment de I .

I.1.396 Mines-Télécom MP 2017

Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\cosh \left(\frac{1}{n} \right) \right) x^n$$

et la limite de sa somme aux bornes de l'ensemble de définition.

I.1.397 Mines-Ponts PC 2022

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$, à valeurs réelles en prenant $f_0 : x \mapsto 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$, prouver l'encadrement :

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n.$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers la fonction f .

I.1.398 CCINP MP 2023

1. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1]$, puis démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3} dt = 0.$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt.$$

3. Calculer $\int_0^1 \frac{2t-1}{1+t+t^2} dt$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

I.1.399 Mines-Ponts PSI 2015

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) - \frac{\pi}{6}.$$

I.1.400 ENS MP 2019

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supérieure à toute série entière réelle en $+\infty$?

I.1.401 Centrale-Supélec PSI 2013

Soit $n \geq 2$ un entier. On définit :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)^{n \ln(n)}}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

I.1.402 Mines-PSI 2016

On pose $f_n(x) = x |\ln(x)|^n$ pour $x \in]1; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme.

I.1.403 Mines-Ponts PC 2017

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive de limite nulle. On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}^a$.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s; +\infty[$ ou $]s; +\infty[$.
2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s; +\infty[$.

I.1.404 Mines-Ponts MP 2017

Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite réelle telle que $\sum_{n \geq 2} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur à un. On pose $a_1 = 1$ et on suppose que $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $B(0, 1)$.

1. Soit $z \in B(0, 1)$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in B(0, 1)$. On suppose que $\text{Im}(z) \geq 0$. Montrer que $\text{Im}(f(z)) \geq 0$.

I.1.405 Mines-Ponts MP 2015

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Que constate-t-on ?

I.1.406 Centrale-Supélec MP 2016

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k}\right).$$

1. Rappeler le théorème de sommation des relations de comparaison.
2. Montrer que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.407 Mines-Ponts MP 2021

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \cos(n^\alpha t^2) dt$.

I.1.408 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(n^a u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ et en déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}.$$

Conclure sur la nature de la série de terme général u_n .

I.1.409 Centrale-Supélec MP 2016

Soit $f \in C^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} f_n &: [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{n}{x} \left(f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right) \end{aligned}$$

1. Montrer la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. On se place dans des cas particuliers.
 - (a) Cas $f = \ln$: montrer la convergence uniforme.
 - (b) Cas $f = \sin$: montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que f est de classe C^2 et que $x \mapsto x f''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 (b) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$.

I.1.410 X-ENS

Soit a et x deux nombres réels. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(an)}{n} x^n.$$

I.1.411 CCINP PSI 2017

Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

I.1.412 Mines-Télécom MP 2017

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{x^2} dx.$$

I.1.413 X 2023

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}.$$

Trouver un équivalent de a_n et majorer la constante qui y apparaît.

I.1.414 Mines-Ponts MP 2017

Soit a, b, c trois nombres complexes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = a^n + b^n + c^n$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Montrer que $\ell \in \{0; 1; 2; 3\}$.

I.1.415 Mines-Ponts MP 2018

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On considère les deux propositions suivantes :

- $(P_1) : a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $(P_2) : \sum_{n \geq 0} a_n$ converge

Trouver les implications entre (P_1) et (P_2) .

I.1.416 Mines-Ponts MP 2018

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

Étudier cette suite de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment).

I.1.417 Mines-Ponts PC 2022

Développer la fonction arccos en série entière sur $] -1; 1[$.

Ce développement est-il valable sur $[-1; 1]$?

I.1.418 CCINP PSI 2022

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions sur $[0; 1]$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1; 1], \quad f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction F que l'on exprimera.
2. Montrer que, pour tout $a \in]0; 1[$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a; 1]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1; 1]$?
4. Comparer éventuellement la limite de $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ en $+\infty$ et $F(0)$.

I.1.419 Mines-Ponts MP 2019

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière dont f est la somme ?
2. Si existence, donner la valeur de $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

I.1.420 Mines-Télécom PSI 2019

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{\sqrt{2n+n^2}} x^{2n}.$$

I.1.421 Mines-Télécom PSI 2019

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. Calculer I_0 , I_1 , $I_n + I_{n+1}$.
3. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme.

I.1.422 Mines-Ponts MP 2019

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. On note f la somme de la série.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe C^1 .
3. Donner un équivalent de f en 1^- .

I.1.423 CCINP PSI 2018

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à définir.
2. On considère la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des dérivées. Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[-1; 1]$.

I.1.424 CCINP PSI 2015

Soit $u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^2 \ln(1 + n)}$.

1. Quel est le domaine de convergence de la série des $u_n(x)$?
2. On note $S(x)$ la somme. Montrer que la fonction S est de classe C^1 .

I.1.425 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive de limite nulle, telle qu'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$a_{n+1} - a_n \sim -\lambda a_n^\alpha.$$

Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

Indication : on pourra considérer $a_{n+1}^\beta - a_n^\beta$ pour β bien choisi.

I.1.426 Mines-Ponts MP 2022

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux familles sommables complexes, i.e. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ (et de même pour b).

1. On note

$$\|a\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(a * b)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}.$$

Montrer que $a * b$ est bien définie, sommable et que :

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommable. On pose, pour $z \in \mathbb{U}$,

$$F_a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.

3. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que pour toute famille $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $a * e = e * a = a$.
4. Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommable et inversible pour $*$. Montrer que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$.
5. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille à support fini et à valeurs complexes telle que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$. Montrer que a est inversible pour $*$.

I.1.427 Mines-Ponts MP 2015

Développer en série entière en 0 la fonction $t \mapsto \arctan(1 + t)$.

Indication : considérer la dérivée, et passer dans $\mathbb{C}$.

I.1.428 Mines-Ponts PSI 2016

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f .

Soit N un entier naturel et x un réel tel que $|x| < 1$.

2. Simplifier $\prod_{n=0}^N (1+x^{2^n})$.
3. Expliciter f .

I.1.429 CCINP PC 2024

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On pose $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, dite *dérivée* de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On admet que si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, divergente vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \ell, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

On pose $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$.

1. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. (a) Trouver un équivalent de $\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1$ puis déterminer la limite de $\Delta \exp(\alpha_n)$.
(b) Montrer que $\exp(\alpha_n) \sim n$.
3. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

I.1.430 ENSEA/ENSIIE

On considère, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Donner un équivalent simple de u_n .
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

I.1.431 Mines-Ponts MP 2024

Soit $f \in C^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt\right| \leq \frac{1}{2} \max_{[n; n+1]} |f'|.$$

2. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$?

I.1.432 Centrale MP

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos\left(n^{\frac{1}{3}}\right)}{n^{\frac{2}{3}}} ?$$

I.1.433 X MP/PC 2024

Soit $f \in C^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

ont même nature.

I.1.434 Mines-Télécom PC 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x^n)}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. La convergence est-elle uniforme ?

I.1.435 TPE/EIVP MP 2015

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$\sin\left(\frac{\exp(2x)}{n + \exp(x)}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite sur un segment $[a; b]$.
4. Étudier la suite $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

I.1.436 Mines-Ponts MP 2015

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n e^{nx_n} = 1$.
2. Étudier l'existence et la valeur de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
3. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est-elle convergente ?
4. Donner un équivalent de x_n .

I.1.437 ENS

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right]$.

I.1.438 Mines-Ponts MP 2015

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{an+b} \right)^{n \ln(n)}$$

selon la valeur des réels strictement positifs a et b .

I.1.439 ENSEA/ENSIIE MP 2015

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-x^3 t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

I.1.440 Centrale-Supélec MP 2015

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers λ .

I.1.441 TPE/EIVP MP 2018

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}.$$

1. Montrer que S est bien définie sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$ et en 0 .

I.1.442 Mines-Ponts MP 2015

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{(n-k)!} = 1.$$

1. En considérant la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, calculer u_n .
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.443 Mines-Ponts MP 2019

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. On suppose que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de A_n .
2. On suppose que $A_n \sim 2\sqrt{n}$. A-t-on $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$?
3. On suppose en outre que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. Montrer que :

$$\frac{A_{[\beta n]} - A_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{A_{[\alpha n]} - A_n}{[\alpha n] - n}.$$

Conclure que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

I.1.444 Mines-Ponts MP 2021

Soit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers a et b . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab.$$

I.1.445 Centrale-Supélec MP 2014

On considère une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante. Pour x réel convenable, on introduit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière, puis donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est croissante sur $[0; 1[$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.
3. On suppose dorénavant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{n} = +\infty$. Soit A un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $x \in [0; 1[$:

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \frac{x^{A n_0}}{1 - x^A}.$$

4. Avec la même hypothèse, prouver que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = 0.$$

5. On suppose maintenant que $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = 0$. En étudiant $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p_n}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{n} = +\infty$.

I.1.446 x

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^2 - k}.$$

Montrer que :

$$a_n \underset{+\infty}{=} e + \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.1.447 Mines-Ponts MP 2016

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}.$$

2. En déduire un équivalent v_n de u_n , puis un équivalent de $u_n - v_n$.

I.1.448 x

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\begin{aligned} f_n &:]n; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k} \end{aligned}$$

Soit $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel, noté x_n , tel que $f_n(x_n) = a$.
2. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

I.1.449 Mines-Ponts PSI 2024

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge et que la limite vaut :

$$e^{i\theta} \int_0^1 \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} dx.$$

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge et déterminer sa valeur.
3. Même question pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ lorsque $\theta \in]0; \pi[$.

I.1.450 CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x^2 \exp\left(-\frac{\sin(x)}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

I.1.451 Mines-Ponts MP 2025

Pour tout réel x , on pose $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, la *partie décimale* de x .

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) \, dx + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x) \, dx.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ln(k)}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle ?

I.1.452 CCINP MP 2017

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^{2n} \, dx.$$

1. Prouver que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

I.1.453 Mines-Télécom MP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) \, dx.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? Si oui, trouver sa limite.

I.1.454 CCINP PC 2014

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \right) = 0.$$

I.1.455 TPE/EIVP MP 2017

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs positives telle que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Montrer que :

$$x > \frac{1}{2} \implies \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n^x} \text{ converge.}$$

Donner un contre-exemple pour $x = \frac{1}{2}$.

I.1.456 Mines-Télécom MP 2017

On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t) dt \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty.$$

2. On pose :

$$G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$

Montrer que G est bien définie sur $[0; 1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G .

3. En déduire l'expression de G .

I.1.457 CCINP MP 2017

Soit $f : [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1; e]$.

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{n}} f(t) & \text{si } t \in \left[1; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right[\\ 0 & \text{si } t \in \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; e\right] \end{cases}$$

1. Montrer, en justifiant très précisément, que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[1; e]$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} x^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx.$$

I.1.458 CCINP PSI 2017

On pose :

$$u_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \exp(-nx^2).$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 - (a) sur $[0; +\infty[$;
 - (b) sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

I.1.459 CCINP PC 2017

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. Notons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi b_n x).$$

1. Montrer que la série définissant f converge normalement sur $[0; 1]$.
2. Montrer que f est définie et continue sur $[-1; 1]$.
3. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.
4. Montrer que

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

converge et déterminer sa limite.

5. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2ib_n \frac{k}{N}\right)$$

vaut N si N divise b_n et 0 sinon.

Notons $I_n = \{n \in \mathbb{N}^* \mid N \text{ divise } b_n\}$.

Montrer que $S_N = \sum_{n \in I_N} a_n$.

6. On choisit $b_n = n!$ et $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq N\} \subset I_N$, puis que $\lim_{N \rightarrow +\infty} NS_N = +\infty$.

I.1.460 Mines-Ponts PC 2018

Pour tout entier n , on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n . Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right) ?$$

I.1.461 x

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

I.1.462 CCINP MP 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1 + e^{-nx}) \end{aligned}$$

1. Vers quelle fonction la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?
2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
3. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + e^{-nx}) dx.$$

I.1.463 Mines-Ponts MP 2018

Donner un développement asymptotique à l'ordre 3 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n} dt.$$

I.1.464 CCINP PC 2021

On considère une application $f_0 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.
2. (a) Montrer que f_1 est de classe C^1 et déterminer f_1' .
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n .

On admet provisoirement la propriété suivante :

$$\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a; a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

3. (a) Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que $F' - F = f_0$.

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} dt.$$

5. Prouver la propriété admise.

I.1.465 Mines-Ponts MP 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^n} dx.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$.

I.1.466 CCINP MP 2018

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $r_n = \sum_{k=1}^n k^{-\beta}$ et $b_n = \frac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = -R$ et $x = R$.

I.1.467 X 2014

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \frac{x_{n+1}}{2} = 1.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

I.1.468 TPE/EIVP PSI 2015

Soit

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .
3. Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Trouver a, b et c tels que $I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

I.1.469 Mines-Ponts MP 2018

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $] -1 ; +\infty[$. Démontrer l'équivalence entre les propriétés :

- i) $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$
- ii) $e^{a_n} \sim \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$

I.1.470 Mines-Ponts MP 2018

Soit $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R , telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout p ?

I.1.471 CCINP PC 2024

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0; 1]$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer sa limite.
2. (a) Rappeler le théorème de Cesàro.
(b) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_{n+1} - w_n) = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Montrer que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda n$.

3. On pose $v_n = 1 - u_n$.

- (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right)$.

- (b) En déduire un équivalent simple de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.472 Centrale-Supélec 2012

Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle de limite nulle, alors les séries $\sum a_n$ et $\sum (a_n + a_{n+1})$ sont de même nature. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose pas que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$?

I.1.473 X 2011

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}.$$

Calculer la limite de cette suite.

I.1.474 ENS PC 2024

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est convergente.

On suppose que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on note sa limite s .

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Montrer que la suite $\left(\frac{A_n}{B_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s .

I.1.475 CCINP MP 2024

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive qui converge vers 0. Pour $x \in [0; 1]$, on note $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ sur $[0; 1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série.

Indication : on pourra majorer les restes en calculant la somme de $k = n + 1$ à $+\infty$ de x^k .

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.

5. Étudier la convergence normale de la série.

Indication : on pourra calculer la norme infinie de u_n .

I.1.476 Mines-Télécom MP 2023

Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

I.1.477 Mines-Ponts PSI 2025

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que :

$$\forall n \neq m, \quad |z_n - z_m| \geq \sqrt{2}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On note $M(z_n) = (x_n; y_n)$ pour $z_n = x_n + iy_n$ et

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid M(z_n) \in [-A; A]^2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est fini.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

I.1.478 Centrale-Supélec PC 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $\varepsilon = (\varepsilon_0; \dots; \varepsilon_{n-1})$ de $\{0, 1\}^n$, on pose :

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k.$$

1. Montrer que Φ est injective et déterminer son image.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n : x \longmapsto \prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k}).$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $] -1; 1[$ et préciser sa limite simple.

I.1.479 Mines-Télécom PSI 2023

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R .

On pose $f_n(x) = a_n x^n$.

1. Montrer la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[-r; r]$ pour $0 < r < R$.
2. En déduire la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Rappeler le développement de la fonction arctan en 0.
Montrer qu'il reste valable en 1.

I.1.480 Mines-Ponts PC 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité :

$$\ln \left({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} \right) - \ln \left({}^n\sqrt{n!} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\ln(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) \right).$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{{}^n\sqrt{n!}}$.
4. Démontrer la relation $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$.
5. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{{}^n\sqrt{n!}}$.

I.1.481 Mines-Ponts MP 2013

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n x_n$ converge.

1. On suppose, uniquement dans cette question, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.
Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{k=1}^n x_k = 0.$$

2. Expliquer l'analogie entre transformation d'Abel et intégration par parties.
3. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{k=1}^n x_k = 0.$$

(Dans le cas général cette fois.)

4. La décroissance de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle nécessaire au résultat précédent ?

I.1.482 CCINP PC 2019

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt}).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que, pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$.

I.1.483 ENSEA/ENSIIE MP 2022

Soit $h \in C\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et $f_n : h(x) \sin^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.484 Centrale

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+n}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leq b$.
Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{b^2 n^2 + 2an}$.
3. Montrer que tout élément de $[0; 1]$ est la limite d'une certaine sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.485 X-ENS

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes toutes définies sur un même intervalle ouvert I , et à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f .

I.1.486 Centrale-Supélec PC 2023

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+u^n} du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $J = \int_0^1 \frac{\ln(\phi)}{1+\phi} d\phi$.

1. Calculer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Calculer J après avoir montré son existence.
3. Trouver $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

I.1.487 Mines-Télécom MP 2022

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
2. Quel est le lien entre f et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x}\sin(t)} dt$?

I.1.488 CCINP PC 2018

On considère la série entière $\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

I.1.489 ENS MP Cachan/Rennes 2017

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[0; \pi]$:

$$\sin(x) \leq x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{x}{\pi}.$$

On admet que pour q appartenant à $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=q+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \leq \frac{1}{(q+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Montrer qu'il existe C appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0; \pi], \quad \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{x} \leq C.$$

On pose pour tout x appartenant à $[0; 2\pi]$:

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{et si } k \in \mathbb{N}^*, n_k = 2^{k^3} \text{ et finalement :}$$

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{2 \sin(n_k x) q_{n_k}(x)}{k^2}.$$

3. Montrer que S_m converge vers une fonction f continue sur $[0; \pi]$.
4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos(px) S_m(x) dx$ admet une limite quand m tend vers $+\infty$, notée $A(p)$.
5. Calculer $A(p)$.

I.1.490 Mines-Ponts MP 2013

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

I.1.491 CCINP PC 2022

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u_n :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x+n) - f(n) \end{aligned}$$

Pour $x \in]0; +\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque $\sum u_n(x)$ converge.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité :

$$\sum_{n=1}^N u_n(1) = f(N+1) - f(1).$$

En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Dans cette question, on prend pour f la fonction

$$x \longmapsto \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

Montrer que $F(1)$ existe.

3. Dans cette question, on prend pour f la fonction

$$x \longmapsto \sin \left(\pi x + \frac{\pi}{2} \sqrt{x} \right).$$

Montrer que $F(1)$ n'existe pas.

Indication : on pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

I.1.492 CCINP PSI 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Montrer que la somme S est de classe C^1 .
3. Calculer $S(1)$.

I.1.493 X 2013

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique x_n réel qui est solution de l'équation $xe^x = n$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent de x_n .

I.1.494 Mines-Ponts MP 2015

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On considère la série entière $\sum_{n \geq s} \binom{n}{s} x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Calculer sa somme $S(x)$.

I.1.495 CCINP

Soit $(p; q) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. Calculer, pour $(p; q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{p,q}$.
2. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n}$ est-elle convergente ou divergente ?
3. Donner le domaine de définition réel de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,n} x^n$.

I.1.496 ENS PC 2023

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sin(2n!e\pi))^\alpha.$$

I.1.497 Mines-Ponts

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{z^k}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|P_n(z)| \leq P_n(-|z|)$. En introduisant un logarithme, en déduire que la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. En étudiant la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{n+1}(z) - P_n(z)$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit :

$$f : z \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z).$$

3. Montrer que f est continue en 0.
4. Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = (1-z)f\left(\frac{z}{2}\right) \text{ et } f(0) = 1.$$

5. Montrer que f est développable en série entière.

I.1.498 Mines-Ponts PC 2013

Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-n^3) \int_0^n \exp(t^3) dt.$$

I.1.499 X MP 2019

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on pose :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

1. Montrer que P est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(n)x^n,$$

où $p(n)$ représente le nombre de façons d'écrire n comme une somme d'entiers naturels.

3. Montrer que pour x tendant vers 1 par valeurs négatives,

$$P(x) = \exp\left(\frac{\zeta(2)}{1-x}(1+o(1))\right),$$

$$\text{où } \zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

I.1.500 Mines-Ponts MP 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^4)^n} dt.$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad h'_n(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad h_n(x) = a_n x^{2-4n}.$$

3. En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$.

I.1.501 Mines-Télécom PSI 2025

Trouver la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

I.1.502 Mines-Ponts MP

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0 , la suite définie par

$$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$

est-elle croissante ?

I.1.503 Mines-Ponts PC 2025

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$\begin{aligned} u_n &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin^n(x) \cos^\alpha(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I .
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

I.1.504 Mines-Ponts MP 2025

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

I.1.505 Mines-Télécom MP 2022

Trouver la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \cos \left(n^2 \pi \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$.

I.1.506 CCINP PSI 2022

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.
2. Définir par récurrence deux suites de nombres naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.

3. Trouver une expression de u_n en fonction de n .

I.1.507 Mines-Télécom MP 2022

Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}.$$

1. Montrer que, si $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si $\alpha = 1$?

I.1.508 Mines-Ponts PSI 2013

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) - \frac{\pi}{6}.$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

I.1.509 Mines-Télécom MP 2017

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + \cos(n)}$

1. à l'aide d'un développement limité ;
2. en étudiant la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n + \cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n} \right)$;
3. en montrant que le critère des séries alternées s'applique.

I.1.510 X MP 2017

On admet l'énoncé suivant :

Pour tout nombre réel α , s'il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{\varepsilon_n}{q_n}$ avec $\varepsilon_n = o(1)$, alors α est irrationnel.

Soit la suite de terme général $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$ est irrationnel.

I.1.511 CCINP PSI 2016

1. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer l'existence de $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.
3. Montrer que $J = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$.

I.1.512 Mines-Télécom MP 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n(x) dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.513 Mines-Télécom 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que f est continue, puis qu'elle est C^∞ .
3. Étudier la croissance de f .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. Trouver un équivalent simple de f en 0.

I.1.514 Mines-Télécom MP 2019

1. (a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
 (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On pourra regrouper les termes deux à deux dans la somme partielle.
2. Calculer de deux manières différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

I.1.515 ENS MP 2014

On note $\mathcal{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$ et f ne s'annule en aucun autre point. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients complexes qui converge uniformément vers f . Montrer que pour tout réel r strictement compris entre 0 et 1, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N , le polynôme P_n admet une racine dans $B(0, r)$.

I.1.516 ENS MP 2023

On admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que :

$$\gamma = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor.$$

I.1.517 CCINP PC 2013

Soit $I =]0; +\infty[$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n(x) = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I . On note S la somme associée.
2. (a) Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Montrer que la série converge normalement sur $[a; b]$.
(b) En déduire la continuité de S .
3. Montrer que S est dérivable sur I , et que l'on a :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}$$

4. (a) Montrer que :

$$\frac{p-1}{(n+1)(n+p)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p}.$$

$$(b) \text{ En déduire que } S(p) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}.$$

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

I.1.518 X-ENS Cachan PSI 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, de limite nulle, et $\alpha > 1$.

On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}^*.$$

L'objectif est de montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha < 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang N .
2. Soit $\alpha < 2$.

À l'aide de l'inégalité suivante (que l'on justifiera) :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leq \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt,$$

montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha}$ converge. En déduire la convergence de la série de terme général u_n .

3. Soit $\alpha \geq 2$.

Montrer que la série de terme général $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ diverge et en déduire que la série de terme général u_n diverge également.

I.1.519 Mines-Ponts MP 2015

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme :

$$Q_n = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} \right).$$

1. Déterminer les racines de Q_n .
2. Démontrer alors que celui-ci s'écrit :

$$Q_n = X \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right).$$

3. En déduire que, pour tout x réel,

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right).$$

I.1.520 Mines-Télécom MP 2024

Pour $n \geq 3$ entier, on considère l'équation suivante :

$$(E_n) : e^x = x^n.$$

1. Montrer que (E_n) admet deux solutions $\alpha_n < \beta_n$.
2. Trouver la limite de la suite $(\beta_n)_{n \geq 3}$.
3. Donner un équivalent de β_n .
4. Donner un développement à deux termes de β_n .

I.1.521 Centrale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

I.1.522 X ESPCI 2017

On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante positive. Montrer que :

$$\sum A_n \text{ converge} \iff A_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sum n(A_n - A_{n+1}) \text{ converge.}$$

I.1.523 X MP 2022

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)}{\sqrt{1-x}}.$$

On sait que f est développable en série entière et on peut écrire $f(x) = \sum c_n x^n$.

Montrer que $c_n \sim \frac{\frac{3}{e^4}}{\sqrt{\pi n}}$.

I.1.524 Centrale-Supélec PC 2019

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k).$$

1. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k)}{k^\beta} = \frac{S_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) - 1.$$

- (b) Montrer que la série de terme général $U_n = \frac{\cos(n)}{n^\beta}$ converge.

2. Soit $\alpha > 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général

$$V_n = \sqrt{n^\alpha + \cos(n)} - n^{\frac{\alpha}{2}}$$

converge.

I.1.525 CCINP MP 2023

Pour tout $n \geq 2$ entier, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ entier :

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt.$$

3. Pour $x \geq 1$, calculer $\int_1^x (\ln(t))^2 dt$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.
4. Déterminer un équivalent de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 2}$ et en déduire la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

I.1.526 Mines-Télécom MP 2016

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\begin{aligned} u_n &: [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n^\alpha x^n (1-x) \end{aligned}$$

Déterminer les modes de convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.527 X ESPCI 2016

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions définies pour $x > 0$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{\lfloor \ln(k) \rfloor}.$$

I.1.528 Centrale-Supélec PC 2016

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + (n+2)u_n.$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$$

en supposant le rayon de convergence non nul.

1. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .
2. Résoudre cette équation pour en déduire f .
3. Déduire l'expression de u_n .

I.1.529 X-ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)} dx.$$

Étudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n^\alpha}{n^\beta}$ pour $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

I.1.530 Centrale

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $(u_0; u_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}.$$

Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

I.1.531 ENS PC 2024

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$a_{n+1} = 10^n a_n^2.$$

Pour quels $a_1 > 0$ a-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$?

I.1.532 Centrale

On considère, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation suivante :

$$x + \ln(x) = n.$$

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0; +\infty[$, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

On pourra poser a_n tel que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$.

5. Démontrer que :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

I.1.533 ENS PC 2024

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|$ converge.

I.1.534 ENS PC 2024

On cherche à calculer la valeur maximale de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

parmi les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de nombres positifs telles que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

1. Calculer S dans le cas où les $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment une suite géométrique.
2. En déduire la valeur maximale de S parmi les suites géométriques.
3. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

4. On note $G_n = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que :

$$G_n \leq \frac{1}{n2^{n+1}} \sum_{k=1}^n 4^k a_k.$$

5. En déduire que $S \leq \frac{2}{3}$.

I.1.535 Centrale-Supélec MPI 2024

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence et les coefficients du développement en série entière de $(1+u)^\alpha$.

On note $\binom{\alpha}{n}$ de tels coefficients (extension des coefficients binomiaux aux réels).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\beta > 0$. Notons :

$$p_n = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{\beta}{k}\right).$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$.

3. (a) Soit α et α' deux réels. Montrer que :

$$\binom{\alpha + \alpha'}{n} = \sum_{\substack{(p;q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \binom{\alpha}{p} \binom{\alpha'}{q}$$

- (b) Soit $0 < x < y$. Montrer que :

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}.$$

- (c) Montrer que $2^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$.

I.1.536 Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Cette suite possède-t-elle une limite ℓ ?
3. Si oui, donner un équivalent de $a_n - \ell$ en $+\infty$.

I.1.537 ENS PC 2025

Soit un réel $\beta > \frac{1}{2}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \leq \frac{2\beta}{2\beta-1}.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |\sigma - n^2|)^\beta} \leq C.$$

I.1.538 ENS PC 2025

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

I.1.539 ENS PC 2025

Soit $\gamma \in]0; 1]$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que :

$$\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}.$$

Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Que se passe-t-il pour $\gamma = 0$?

I.1.540 ENS PC 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ et $c > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| \leq ca_n^2$.

Montrer qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \frac{d}{n}$.

I.1.541 ENS PC 2025

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_{n,N} \in \mathbb{R}$ (pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$) tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,N} = \alpha.$$

Montrer qu'il existe une suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs entières telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,N_n} = \alpha.$$

I.1.542 ENS PC 2025

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$$

satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

I.1.543 ENS PC 2025

Soit $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$ pour tout $n \geq 0$. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

converge-elle ?

I.1.544 ENS PC 2025

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que $u_1 > 0$ et $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$.
On suppose que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

diverge.

1. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(u_1 + \dots + u_n)^2}$$

converge.

2. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_1 + \dots + u_n}$$

diverge.

3. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que pour toute suite $(y_n)_{n \geq 1}$ de réels qui satisfait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 < +\infty,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

converge.

Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$$

converge.

I.1.545 ENS PC 2025

1. Soit J un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $+\infty$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus J$, $f^{(i)}(0) = 0$ et pour tout $j \in J$, $f^{(j)}(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. Est-ce toujours vrai si J est infini ?

I.1.546 ENS PC 2025

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| < 1,$$

et une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i u_{n+i}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

I.1.547 X MP

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et majorée. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k = 0$.

ii) Il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ de densité nulle, c'est-à-dire vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}(A \cap \llbracket 0, n \rrbracket)}{n} = 0,$$

telle que $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \notin A}} a_n = 0$.

I.1.548 X-ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Démontrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

I.1.549 Mines 2024

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ (n+2)u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer sa limite.

I.1.550 Mines 2024

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_j = \min \left\{ n \geq 1 \mid \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq j \right\}.$$

Justifier que la suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Converge-t-elle ? Démontrer :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = e.$$

I.1.551 PT 2017

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la série suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + (na)^2}.$$

1. Étudier la convergence de la série.
La somme est notée $h(a)$.
2. Étudier les variations de h , puis sa limite en $+\infty$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1 + ((k+1)a)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{1 + (ta)^2} dt \leq \frac{1}{1 + (ka)^2}.$$

4. Donner un équivalent de h en 0.

I.1.552 Mines-Ponts MP 2013

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{\frac{1}{n}}.$$

I.1.553 ENS MP 2014

Soit X un espace de Hilbert. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . On suppose qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- Il existe un vecteur $u \in X$ tel que pour tout $v \in X$ la suite $(\langle u_n, v \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\langle u, v \rangle$.

1. Montrer que l'on peut extraire une suite $u_{\varphi(n)}$ telle que la suite

$$\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k u_{\varphi(i)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

converge vers u .

2. Trouver un exemple de suite qui vérifie les deux premières propriétés dans l'ensemble des suites de carré sommable.

I.1.554 Centrale-Supélec TSI 2024

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
2. Écrire le développement limité de v_n à l'ordre $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
3. Déterminer la nature de $\sum v_n$.
4. Qu'a-t-on voulu montrer avec cet exemple ?

I.1.555 ENS MP 2014

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions 2π -périodiques à valeurs complexes qui vérifie les propriétés suivantes :

- Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq M$.
- Pour tout $(m; n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\int_0^{2\pi} f_m(x) f_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que l'on ne peut pas extraire de sous-suite qui converge simplement vers une fonction f .

I.1.556 C.C.E. Mines PC 2019

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
2. Déterminer sa limite.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que u_n soit équivalent à $\frac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$ quand n tend vers $+\infty$.

I.1.557 C.C.E. Mines MP 2015

Soit f la fonction réelle de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}.$$

1. Étudier f : domaine de définition, continuité, dérivabilité.
2. Reconnaître f .

I.1.558 C.C.E. Mines PC 2015

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de terme général f_n .
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de terme général f_n .

I.1.559 C.C.E. Mines PSI 2015

Donner le développement en série entière de $\cos^3(x)$.

I.1.560 C.C.E. Mines PC 2014

Déterminer, selon la valeur du réel a , la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n+a}\right)^n.$$

I.1.561 Navale MP 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation

$$n \ln \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = x$$

admet une solution dans $] -2; -1[$, puis étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des solutions.

I.1.562 Navale MP 2024

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad F_n(x) = \sin(x) \cos^n(x).$$

1. Étudier la convergence de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $G_n = nF_n$.
3. On note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_n(x) dx$.
Calculer I_n et déterminer sa limite.

I.1.563 Navale MP 2023

Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

I.1.564 Navale PSI 2019

Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

I.1.565 x

Soit $\alpha \in]2; +\infty[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_0 = \alpha \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

I.1.566 CCINP MP 2025

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}.$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, ainsi que la fonction somme.

I.1.567 x MP 2025

On pose :

$$U_n = \text{Card}\{(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 = n\}.$$

Trouver une équivalent en $+\infty$ de :

$$\frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n}.$$

I.1.568 PT 2018

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $0 < \ln(x+1) < x$.
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.
 - (a) Montrer que $e^{x_n} \sim e^{y_n}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$.
 - (b) Si $x_n \sim y_n$, peut-on affirmer que $e^{x_n} \sim e^{y_n}$?
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à valeurs positives.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
5. On note $v_n = 2^{-n} \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n)$.

I.1.569 PT 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a_n) = 1$. Montrer que $0 \leq a_n \leq 1$.
2. Calculer a_0, a_1 et a_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite si elle existe.

I.1.570 Mines-Télécom 2023

Étudier la convergence de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((n(n+1))^{-1})}{\cos(n^{-1}) \cos((n+1)^{-1})}.$$

I.1.571 Mines-Télécom 2023

En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$.

I.1.572 Mines-Télécom 2017

Déterminer les couples $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série

$$\sum_{n \geq 0} \left(2 + (an + b) \ln \left(\frac{n+2}{n+4} \right) \right)$$

converge.

I.1.573 ENS 2025

1. Déterminer le sens de convergence des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n} \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n} \quad (c) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$$

2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $N \geq 1$, il existe des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

3. En déduire le sens de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sin(n)}$.

I.1.574 PT 2022

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

On considère également les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -7u_n + 12v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -6u_n + 10v_n.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. On suppose que $a = b = 1$. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $3b - 2a > 0$.

I.1.575 PT 2019

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. La série $\sum \frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?
3. On admet que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels équivalentes telles que $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n b_k$.
 - (a) Déterminer la limite de $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et en déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Trouver un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2}$.

I.1.576 PT 2018

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels à termes positifs.

1. Étudier la nature de la série $\sum \frac{u_n}{1 + nu_n}$ dans les trois cas suivants :
 - (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
 - (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$
 - (c) $u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{1 + n^2 u_n}$?
3. Montrer que si $\frac{u_n}{1 + u_n}$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
4. En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \frac{u_n}{1 + u_n}$ converge.

I.1.577 PT 2023

On suppose qu'il existe $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$a_n = \cos(2^n x) > \cos(2^n y) = b_n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . Calculer $a_{n+1} - b_{n+1}$ et montrer que $a_n > |b_n|$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$.

I.1.578 Mines-Ponts MP 2014

Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(n+t)}{1+n^\alpha t^2} dt.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

I.1.579 Mines-Ponts PSI 2014

Soit a et b deux réels. Étudier la convergence de la série de terme général $n^a \sum_{k=1}^n k^b$.

I.1.580 Centrale-Supélec MP 2015

On définit la suite de fonctions suivantes :

$$f_0(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \text{pour } n \geq 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt.$$

1. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow E \times E \\ (P; Q) &\longmapsto (P' - Q; P + Q') \end{aligned}$$

Montrer que φ est un automorphisme de $E \times E$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(P_n; Q_n) \in E \times E$ tel que

$$f_n(x) = \sin(x)P_n(x) + \cos(x)Q_n(x),$$

avec P_n pair, Q_n impair, et P_n à coefficients entiers.

I.1.581 ENS MP

1. Soit $(k; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

2. Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = n \\ x_{k+1} = \left\lfloor \frac{x_k + \left\lfloor \frac{n}{x_k} \right\rfloor}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

- (a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Montrer que :

$$x_k = x_{k+1} \iff x_k = \sqrt{n}.$$

I.1.582 X MP 2013

On note $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

1. Combien P_n a-t-il de racines réelles ?
2. On note x_n la racine de P_{2n+1} . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.
3. Trouver un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

I.1.583 C.C.E. Mines PC 2014

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = a^k \cdot \frac{(n+2)!}{(n+2+k)!}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge et prouver la majoration :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq e^{|a|}.$$

2. Trouver un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Étudier les séries de termes généraux $\sin(2\pi en!)$ et $\sin(2\pi e^{-1}n!)$.

I.1.584 C.C.E. Mines MP 2013

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \cos(nt)$.

1. Pour tout x appartenant à $] -1 ; 1[$, calculer la série de terme général $a_n x^n$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $\frac{a_n}{n+1}$ et l'exprimer à l'aide d'une intégrale.
3. Calculer cette intégrale.

I.1.585 X MP 2014

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Donner le rayon de convergence de la série entière associée à a_n .

Calculer cette série.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(b_1; \dots; b_k) \in \mathbb{R}^k$. On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$a_{n+1} = b_k a_n + b_{k-1} a_{n-1} + \cdots + b_1 a_{n-k+1}.$$

Donner le rayon de convergence de la série entière associée à a_n .

Calculer cette série.

I.1.586 C.C.E. Mines MP 2013

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\sin \left((n^2 + an + b) \frac{\pi}{n} \right).$$

I.1.587 x MP

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = \underbrace{\sin(\sin(\cdots \sin(x)))}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que la somme de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

I.1.588 Mines-Télécom PC 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx.$$

1. Pour tout $u > -1$, justifier la majoration $\ln(1 + u) \leq u$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.589 Mines-Télécom PC 2023

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

1. Préciser le rayon de convergence de f .
2. Montrer que f est solution de

$$(E) : (1 - x)y'(x) = (p + 1)y(x)$$

sur son intervalle de convergence.

3. Donner une expression de f .

I.1.590 Mines-Télécom PC 2023

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4(3u_n - v_n + 3w_n) \\ w_{n+1} = 6u_n - 5w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n , v_n et w_n en fonction de n .

I.1.591 CCP PC 2016

Soit a et b réels tels que $0 < a < b - 1$. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1. (a) Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
 (b) En déduire que $\sum_{n=0}^N (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ tend vers $-\infty$ quand N tend vers $+\infty$.
 (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^{b-a} u_n$.
 (a) Montrer que la série de terme général $\ln(v_n)$ est convergente.
 (b) En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que u_n soit équivalent à $\frac{K}{n^{b-a}}$ quand n tend vers $+\infty$.
 (c) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
3. Prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \cdot \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Indication : simplifier les sommes

$$\sum_{n=0}^N ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N ((n+1)u_{n+1} - nu_n),$$

puis soustraire ces deux sommes.

I.1.592 Mines-Ponts MP/PSI 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire le nombre de permutations sans point fixe. On convient que $D_0 = 1$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.
2. Montrer que le rayon de convergence R de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

est supérieur ou égal à 1.

3. Calculer $e^x S(x)$ pour $|x| < R$.
4. En déduire D_n sous forme d'une somme.

I.1.593 Mines-Ponts PC 2016

Calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 5n + 1}.$$

I.1.594 Mines-Ponts

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2i\pi P(n)}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) - P(0) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que la suite $(P(n) - \lfloor P(n) \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer qu'alors cette suite est constante.

I.1.595 Centrale-Supélec PC 2016

On pose :

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^4)^n} dt.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Pour tout $x > 1$, prouver que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers 0.
3. Pour tout $x > 1$, prouver que la série $\sum f_n(x)$ est convergente et exprimer sa somme.
4. Prouver que la série $\sum f_n(1)$ est divergente. On raisonnera par l'absurde.

I.1.596 Mines-Ponts PC 2016

On définit une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $(a_0; a_1) = (1; 1)$ puis

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

I.1.597 Centrale PC 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n le graphe de la fonction $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On note d_n la distance de l'origine O à Γ_n , c'est-à-dire le nombre défini par :

$$d_n = \inf\{OM \mid M \in \Gamma_n\}.$$

1. Montrer qu'il existe exactement un point M de Γ_n qui vérifie l'égalité $d_n = OM$. L'abscisse de ce point est notée x_n .
2. Montrer la relation

$$\cos^{2n-1}(x_n) = \frac{x_n}{n \sin(x_n)}.$$
3. Montrer que x_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

I.1.598 Centrale PC 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t} t^n dt.$$

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
2. Prouver que sa limite est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

I.1.599 CCP PC 2016

On se donne une fonction f définie sur $]0; +\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$, on pose :

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n).$$

On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque cela est possible.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\sum_{n=1}^N u_n(1) = f(N+1) - f(1).$$

En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n \geq 1}$.

2. On prend

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

Montrer que $F(1)$ existe et donner sa valeur.

3. On prend

$$f : x \mapsto \sin \left(\pi x + \pi \frac{\sqrt{x}}{2} \right).$$

Étudier l'existence de $F(1)$.

Indication : considérer $f((2n+1)^2)$.

4. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est convergente.

Sa somme est notée S .

- (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, le nombre $F(p)$ existe.
- (b) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (F(p) - F(p+1))$$

existe et exprimer sa valeur en fonction de S .

5. Pour tout entier $p \geq 2$, on note C_p l'énoncé « Le nombre $F(p)$ existe. ». Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que l'énoncé C_p soit vrai.
6. Montrer que la fonction de la question 3 vérifie C_2 .

I.1.600 Mines-Ponts PC 2016

Étudier la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} \right),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.1.601 Mines-Télécom PSI 2026

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^{3n}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
Calculer la valeur de f sur D_f .
2. Est-ce que la série définissant f converge uniformément sur D_f ?
3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

I.1.602 CCP PC 2016

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur $[0; 1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0; 1], \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}.$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, on définit aussi la fonction $g_x : t \mapsto t - \frac{x - t^2}{2}$.

Enfin, on définit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0; 1]$.
2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $[0; 1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n est dérivable et obtenir l'identité suivante :

$$\forall x \in [0; 1], \quad P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x)).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0; 1]$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$, obtenir l'encadrement suivant :

$$0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on précédera par récurrence.

6. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers une certaine fonction à préciser.

I.1.603 CCP PC 2016

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs, qui converge vers 0.
On pose :

$$v_n = \int_0^{u_n} \frac{1}{1+t^3} dt.$$

Prouver que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

I.1.604 Mines-Télécom MP 2026

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2. Calculer f la fonction associée à cette série entière.

I.1.605 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Que dire de $\sum (-1)^n a_n$?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.
4. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n$.

I.1.606 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit $a > 1$ réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_1^a (\ln(t))^n dt.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n : t \mapsto (\ln(t))^n.$$

Étudier les fonctions f_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les $t \geq 1$ tels que $|f_n(t)| > 1$.
3. Pour $a \neq e$, étudier la nature de la série de terme général u_n .
Pour $a = e$, démontrer que

$$u_n = \frac{e}{n} - \frac{2e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Donner la nature de la série de terme général u_n .

I.1.607 Mines-Ponts MP 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt.$$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière des a_n .
2. Étudier cette série entière aux bords de l'intervalle de convergence et calculer, sous réserve de sens, la somme.

I.1.608 ENSEA/ENSIIE MP 2025

On considère la série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) z^{2n}.$$

Donner le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme.

I.1.609 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit

$$\begin{aligned} g_n &: [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t \end{aligned}$$

1. Démontrer que pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}.$$

2. En déduire que pour tout $t \in [0; 1]$, on a :

$$|g_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}.$$

3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

I.1.610 ENSEA/ENSIIE MP 2025

1. Justifier la convergence et calculer la limite de la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2}.$$

2. Même question pour la suite de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

I.1.611 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles récurrentes telles que :

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 2, \quad c_0 = 2.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2c_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n .

1. Exprimer le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de n et de X_0 .
2. Exprimer A^n en fonction de n .
3. Conclure.

I.1.612 Mines-Télécom MP 2026

Déterminer le développement en série entière de :

$$f : x \mapsto \sinh(\arcsin(x)).$$

I.1.613 Mines-Télécom MP 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \exp\left(\arctan\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\right) - \exp\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

I.1.614 CCINP MP 2025

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère :

$$a_n = \sin\left(\pi(2 + \sqrt{3})^n\right)$$

$$b_n = \sin\left(\pi(2 - \sqrt{3})^n\right)$$

1. Montrer que la série $\sum b_n$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

est un entier pair.

3. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum a_n x^n, \quad \sum a_n b_n x^n, \quad \sum (a_n + b_n) x^n, \quad \sum \frac{a_n}{b_n} x^n.$$

I.1.615 CCINP MP 2025

Pour tout $\alpha \in]0; 2[$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-\alpha} e^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple et la continuité de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $\alpha = 1$, a-t-on la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

I.1.616 CCINP MP 2025

On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3, & u_1 &= 0, & u_2 &= 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & & u_{n+3} &= u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

1. On considère le polynôme $P = X^3 - X - 1$. Montrer que P admet une racine réelle a et deux racines complexes conjuguées distinctes b et $\bar{b}$.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n + b^n + \bar{b}^n.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\text{Tr}(A^n) = u_n.$$

I.1.617 Mines-Télécom PT 2026

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x et de rayon de convergence $R > 0$.
 - (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.
 - (b) Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, montrer que pour x au voisinage de $+\infty$, $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = o(e^x)$.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
La série de terme général a_n est-elle nécessairement convergente ?

I.1.618 Mines-Télécom MP 2025

On considère la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^\alpha x_n} \end{cases}$$

avec $\alpha > 1$.

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et donner un équivalent de $x_n - \ell$.

I.1.619 Mines-Télécom PT 2026

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x + \ln(x).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in]0; +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent de x_n .
4. Déterminer des réels a, b et c tels que :

$$x_n = an + b \ln(n) + c \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

5. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{x_n} - \frac{a}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.620 Centrale MP 2008

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

I.1.621 CCINP PSI 2026

Soit $a \in [0; 1]$. Pour $x \in]0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{x^a(1 + x^n)} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; 1]$.
2. Existe-t-il $a \in [0; 1]$ tel que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]0; 1]$?
3. Montrer que I_n existe pour tout $a \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $a \in [0; 1[$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner la valeur de la limite.
5. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle pour $a = 1$? Si oui, donner la valeur de la limite.

I.1.622 Mines-Ponts PSI 2026

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + \alpha^2}).$$

I.1.623 Mines-Ponts PSI 2026

Déterminer le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n x^n$ avec :

$$u_n = \frac{1}{n} \cos \left(\frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2} \right).$$

I.1.624 Mines-Télécom PT 2026

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \cos(t)) dt$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

I.1.625 Mines-Télécom MP 2026

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right).$$

I.1.626 CCINP PC 2026

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0(x) = 1$ et

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)^2 dt.$$

1. Calculer f_1 et f_2 .
2. Soit $x \in [0; 1[$.

(a) Montrer que $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

(b) Montrer par récurrence que, pour $a \in [0; 1[$ et $x \in [0; a]$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{2}{1-a} \right)^n.$$

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1[$ vers une fonction f (qu'on ne cherchera pas à déterminer dans un premier temps), et montrer que f ne s'annule pas.
4. Montrer que $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur tout segment $[0; a]$ inclus dans $[0; 1[$.
5. En déduire que :

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2 dt \quad \text{pour } x \in [0; 1[.$$

6. Calculer f .

I.1.627 Mines-Ponts PSI 2026

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+2}}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \right).$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \right).$$

I.1.628 CCINP MP 2026

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) sur x_0 , y_0 et z_0 les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

I.1.629 Centrale-Supélec PC 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de $E_n = \{1; \dots; n\}$.
On pose $I_0 = 1$.

1. Trouver une expression de I_n en fonction de I_{n-1} et I_{n-2} .
2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vaut au moins 1.
3. Calculer la somme de cette série entière.
4. En déduire une expression de I_n .
5. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{I_n}{n!}$ est-elle convergente ?

I.1.630 Mines-Télécom MP 2026

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la série entière associée, de rayon de convergence $R > 0$.

1. Exprimer la quantité $\frac{zf(z)}{1-z}$ sous forme d'une série entière en fonction des termes de la suite.
2. En déduire une équation vérifiée par $f(z)$, puis déterminer l'expression explicite de a_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.1.631 Mines-Télécom PT 2026

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.

1. Étudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$.
2. On considère la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{S_{n-1}S_n}$.
Étudier la nature de la série de terme général v_n .

I.1.632 X ESPCI

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}.$$

Remarque :

On pourra noter $u_n(a_1; a_2; \dots; a_n)$ lorsqu'on considère u_n comme fonction des a_k .

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. Soit $\lambda > 0$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda^{(2^n)}$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 1$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\ln(a_n) = o(2^n)$.

I.1.633 Mines-Télécom PSI 2026

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère les séries :

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \zeta_a(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

1. Étudier le domaine de définition de ζ et de ζ_a .
2. Montrer que ζ_a est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$\zeta_a(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x).$$

4. Montrer que $\zeta_a(1) = -\ln(2)$.
5. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^+$.

I.1.634 CCINP PC 2026

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $1 + j^k + j^{2k}$.
2. Donner l'expression en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.

I.1.635 Mines-Télécom MP 2026

On définit :

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n-1)}{n} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de S .
2. Donner une expression de S sans utiliser le symbole Σ .

I.1.636 Mines-Télécom MP 2026

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+n^2x^2)} dx.$$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un équivalent simple de I_n .

I.1.637 ENSEA/ENSIIE PSI 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x+n} dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

I.1.638 CCINP PSI 2026

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

1. Montrer que I_n existe.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.
4. Sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $I_n \sim \frac{\pi^2}{12}$.
5. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(kn+1)}$.
6. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$I_n = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.1.639 Mines-Ponts MP 2026

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq -1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1 + u_k)}.$$

- Supposons $u_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.
Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa limite.
- Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.
Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa limite.
- Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$.
Montrer que la série de terme général v_n converge.
- Montrer que si $(u_n)_{n \geq 1}$ est positive, alors la série de terme général v_n converge.

I.1.640 Mines MP 2025

On considère la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!(4n-1)} x^{4n-1}.$$

- Donner le domaine de définition de f .
- Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

I.1.641 CCINP PSI 2026

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

- Déterminer le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
En déduire que la suite converge.
- Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}.$$

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.
- On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon R , et S la fonction somme associée.
 - Montrer que $R \geq 1$.
 - Montrer que S est solution de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1.$$

I.1.642 Mines-Télécom MPI 2026

Déterminer la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

I.1.643 Centrale-Supélec PSI 2026

On définit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}.$$

1. Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On introduit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

En déduire une condition sur son rayon de convergence R .

2. Montrer que, pour tout z tel que $|z| < R$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{e^z + 1}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \tan^{(n)} = P_n(\tan).$$

I.1.644 Centrale 2025

1. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

et prolongées par 1 en $t = 0$.

Montrer que f est développable en série entière, et que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que si une fonction h est développable en série entière au voisinage de 0 avec $h(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{h}$ est aussi développable en série entière au voisinage de 0.

(a) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-r; r[, \quad \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n.$$

(b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P'_{n+1} = (n+1)P_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_{n+1}(x) dx = 0.$$

3. Démontrer le résultat admis dans la question 2.

I.1.645 CCINP MP 2026

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.
 Pour cela, on introduit la série $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$.

1. Donner la nature de la série $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$.
2. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$.

I.1.646 Mines 2025

Soit K un fermé de $[0; 1] \times [0; 1]$. Pour $x \in [0; 1]$, on pose :

$$I_x = \{y \in [0; 1] \mid (x; y) \in K^2\}.$$

1. Montrer que I_x est un segment.
2. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0; 1]$ qui converge vers $\ell \in [0; 1]$, et on pose :

$$J_x = \{y - x \mid y \in I_x\}.$$

Montrer que si $\sup J_{u_n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sup J_\ell \geq 0$.

3. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1,$$

puis par récurrence suivant la valeur de :

$$K_n = (\inf J_{c_n}) \cdot (\sup J_{c_n}) \quad \text{où} \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

comme suit :

- si $K_n = 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $K_n > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $K_n < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

I.1.647 ENS MP 2024

Soit $s > 1$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On dit que f est s -Gevrey s'il existe r et c dans $\mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |f^{(k)}(x)| \leq cr^k(k!)^s.$$

Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^s x}$$

est s -Gevrey.

I.1.648 ENS MP 2023

Soit $(a_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{i \geq 1} ((in)!)^{a_i}.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n z^n$ ait un rayon de convergence R vérifiant $0 < R < +\infty$.
2. En notant $f(z)$ la somme de la série entière, trouver une équation différentielle vérifiée par f .

I.1.649 X 2014

Déterminer le rayon de convergence de la série

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

et calculer sa somme.

I.1.650 Mines-Télécom MP 2026

Soit $\alpha > 1$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q^\alpha}.$$

1. Montrer que v_n existe et en donner un équivalent.
2. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{v_n^2}{n}$.

Montrer que la série $\sum x_n$ converge.

I.1.651 X 2016

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = n(x_n - n).$$

Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n)$ si et seulement si $x_1 = 2e$.

I.1.652 X 2009

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad (u_{p+q})^{p+q} \leq (u_p)^p (u_q)^q.$$

1. Montrer que $u_{pk} \leq u_k$ pour tous $p, k \geq 1$.
2. Que dire de la suite s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 0$?
3. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf\{u_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

I.1.653 X 2018

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

Donner la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n^{2018}$.

I.1.654 ENS Ulm 2021

Soit $f \in C(\mathbb{R})$ bornée telle que $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0. On pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n 2^{-k} f(3^k x).$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction continue F qui vérifie l'équation $F(3x) = 2F(x)$. Que dire du mode de convergence ?

I.1.655 X 2014

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0; 1[$, on pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et déterminer sa limite.

I.1.656 X 2016

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante et telle que, pour tout $t > 0$, $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. Quand $t \rightarrow 0^+$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\varphi(n)} \sim \int_1^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} dx.$$

I.1.657 X ESPCI 2024

Soit

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^{(n)} z^k.$$

(L'expression (n) n'est pas une dérivée, juste un indice.)

On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur le disque ouvert

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in B_1$, il existe M tel que $|f_n(z)| \leq M$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque disque ouvert

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\},$$

avec $r \in]0; 1[$.

I.1.658 X 2018

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a_0 + \cdots + a_n$.
Montrer que les séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$$

ont le même rayon de convergence.

I.1.659 X 2018

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f . On suppose les f_n croissantes et la fonction f continue. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

I.1.660 X ESPCI 2022

On se donne une suite de fonctions $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables.
On suppose que la suite $(f'_n - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et que $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

I.1.661 ENS Lyon/Ulm 2021

Lorsque A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on pose, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\zeta_A(s) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}.$$

On pose aussi

$$o(A) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \zeta_A(s) \text{ converge}\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $A_d = \{n^d \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
Que vaut $o(A_d)$?
2. Soit $d \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ et A l'ensemble des entiers dont tous les chiffres sont inférieurs à d .
Que vaut $o(A)$?

I.1.662 CCINP MP 2026

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$f_n(x) = a_n x^n (1 - x).$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; 1]$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Indication : étudier la suite des restes.

I.1.663 Mines-Ponts MP 2026

Soit E un ensemble fini, avec $|E| = n \geq 1$.

On dit que $g \in E^E$ est une *involution* si $g \circ g = \text{Id}_E$.

Soit α_n le nombre d'involutions de E .

1. Calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_{n-2}, \quad \alpha_0 = 1.$$

3. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$.

Montrer que le rayon de convergence est non nul et dériver une fois pour trouver une équation différentielle vérifiée par f .

4. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$ et une expression de α_n .

I.1.664 ENS MP/MPI 2023

1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que :

$$\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor.$$

2. Donner un équivalent de

$$\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

I.1.665 ENS MP 2024

On admet l'irrationalité de π .

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

I.1.666 ENS MP/MPI 2023

Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}} ?$$

I.1.667 ENS MP 2022

1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Que dire des séries de termes généraux a_n et b_n ?

2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\alpha > -1$.

Montrer que la série de terme général a_n diverge.

3. Que dire si $\alpha < -1$?

I.1.668 CCINP MP 2026

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n .

Montrer que $R \geq 2$.

2. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. En déduire les coefficients a_n et R .

I.1.669 Mines-Télécom MP 2026

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

- Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
- Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$.
- Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

I.1.670 ENS PC 2024

Soit P_0 un polynôme non nul. On définit la suite $P_{n+1} = XP'_n$. On suppose que λ est racine de tous les polynômes de cette famille. Montrer que $\lambda = 0$.

I.1.671 ENS PC 2024

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_{n+1} = XP'_n$. Montrer qu'il existe une suite $r_n > 0$ avec $r_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ telle que les racines de P_n sont dans $] -r_n ; r_n[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.1.672 ENS PC 2024

Soit une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On modifie la méthode de Newton de la manière suivante. On définit la suite par

$$u_0 \neq u_1, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n).$$

1. Montrer que si u_0 et u_1 sont suffisamment proches de 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que dans ce cas $u_n = o(u_{n-1})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. On considère le cas $f(x) = x + x^2$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(|u_n|)}{\log(|u_{n-1}|)} = \phi,$$

avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

I.1.673 ENS PC 2024

On considère les suites réelles $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies de la manière suivante : $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Montrer qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$.
2. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(|a_{n+1} - b_{n+1}|)}{\log(|a_n - b_n|)} = 2.$$

I.1.674 ENS PC 2024

Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$. On définit

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

1. Montrer que si $|c| \leq \frac{1}{4}$ alors $c \in M$.
2. Montrer que si $|c| \geq 3$ alors $c \notin M$.
3. Calculer $M \cap \mathbb{R}$.
4. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = c$.
Montrer que $c \in M$.

I.1.675 ENS PC 2024

On rappelle que $u_n \rightarrow \ell$ « pour Césaro » signifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell = 0.$$

Pour quelles fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a-t-on $u_n \rightarrow \ell$ « pour Césaro » implique $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ « pour Césaro » ?

I.1.676 Mines-Télécom 2018

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$.

1. Montrer que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
2. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $u_n \sim \frac{K}{n^{b-a}}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

I.1.677 Mines-Ponts 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive convergeant vers 0.

1. Si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$?
2. Si $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{n}$, a-t-on forcément $u_n \sim \frac{1}{n}$?

I.1.678 Mines-Ponts 2018

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premiers termes $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, et vérifiant, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1} u_{n-2}}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Trouver un équivalent du terme général.

I.1.679 x

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Établir :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ converge}.$$

2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n; \frac{1}{n})$ diverge.

I.1.680 CCINP 2019

On note D le domaine de définition réel de la somme S de la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}.$$

1. Déterminer D .
2. Montrer que la fonction S est continue sur D .
3. La série converge-t-elle uniformément sur D ?

I.1.681 Mines-Télécom 2021

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n^\alpha x e - nx \end{aligned}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

I.1.682 x

1. Montrer que l'équation $x \sin(x) - c \cos(x) = 0$ (où $c > 0$) admet une unique racine x_n dans tout intervalle $]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$, et qu'elle n'en admet pas d'autres dans $\mathbb{R}_+$.
2. Trouver un équivalent θ_n de $x_n - n\pi$, puis un équivalent de $x_n - n\pi - \theta_n$.

I.1.683 CCINP 2019

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

On admet que

$$\frac{1 + X + X^2}{(1 - 2X)(1 + X)^2} = \frac{7}{9(1 - 2X)} + \frac{2 - X}{9(1 + X)^2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4^n$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
(a) Donner un encadrement du domaine de définition de g .
(b) Donner une équation fonctionnelle vérifiée par g .
3. Exprimer u_n en fonction de n .

I.1.684 CCINP 2025

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{x^2 + n}.$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A-t-on convergence normale ?
3. Montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$, puis donner la limite quand $x \rightarrow +\infty$ de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

I.1.685 x

Soit x un nombre réel tel que $|x| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

I.1.686 Mines-Télécom 2025

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)^{\tanh\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

1. Étudier l'existence et la valeur ℓ de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

I.1.687 x 2025

Soit $a < b$ deux réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que pour tout $t \in [a; b]$ segment de $\mathbb{R}$, il existe $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t u_n - k_n = 0.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

I.1.688 Navale MP 2019

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0; 1]$, on pose $f_0(x) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right).$$

1. Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Reprendre la question précédente avec $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$.

I.1.689 Navale PSI 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}^*$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de u_0 .

I.1.690 Navale PSI 2019

Trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

I.1.691 Navale PC 2023

Donner un équivalent de $u_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 1, j \geq 1}} \frac{1}{ij}$.

I.1.692 Navale MP 2017

Soit

$$u_n(x) = \frac{x}{(1 + n^2x)^2}.$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ des séries $\sum u_n(x)$ et $\sum u'_n(x)$.

I.1.693 C.C.E. Mines PC 2015

Trouver la nature de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^{-n^2}.$$

I.1.694 TPE/EIVP PSI 2018

On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{(-1)^n} x^n.$$

Déterminer son rayon de convergence et sa somme.

I.1.695 TPE/EIVP MP 2017

Soit $\alpha \in [0; +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n(x)$.

I.1.696 x

Existe-t-il une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$u_n u_{n+1} = n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 ?$$

I.1.697 x

On définit la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ par la donnée de x_1 et la relation

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

pour tout $n \geq 1$.

Démontrer qu'il existe un unique x_1 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

I.1.698 x

On définit une suite de polynômes : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour $n \geq 1$,

$$(q+1)XP_n = qP_{n+1} + P_{n-1}$$

où q est un réel non nul fixé.

Déterminer l'ensemble des réels z tels que la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

I.1.699 x

Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1}).$$

I.1.700 x

On se donne trois réels a_0, b_0, c_0 tels que $-1 \leq a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq 1$ et on pose, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \int_{-1}^1 \min(x; b_n; c_n) dx \\ b_{n+1} = \int_{-1}^1 \text{mil}(x; a_n; c_n) dx \\ c_{n+1} = \int_{-1}^1 \max(x; a_n; b_n) dx \end{cases}$$

où $\text{mil}(a; b; c)$ est le terme médian de $(a; b; c)$.

Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.1.701 x

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étudier cette suite et donner un développement asymptotique de u_n comportant deux termes.

I.1.702 x

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n) \ln(n+2)} \right) ?$$

I.1.703 x

Établir la convergence et calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right).$$

I.1.704 ENS

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. On suppose que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle.

I.1.705 ENS

Construire une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ diverge et vérifiant $|z_p - z_q| \geq 1$ pour tout couple $(p; q)$ d'entiers distincts.

I.1.706 x

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des séries convergentes à termes réels. Existe-t-il une série divergente à termes réels non nuls $\sum b_n$, telle que

$$\inf_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}} \sup_{n \geq 0} \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0 ?$$

I.1.707 ENS

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Établir l'équivalence suivante :

$$\sum |a_n| \text{ converge} \iff \forall \sigma \in S_n, \sum a_{\sigma(n)} \text{ converge.}$$

2. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls. Établir l'équivalence suivante :

$$\sum |c_n - 1| \text{ converge} \iff \exists a \in \mathbb{C}^*, \forall \sigma \in S_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n c_{\sigma(k)} = a.$$

I.1.708 x

Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α .

I.1.709 x-ENS

1. Trouver toutes les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}$ pour tout $x \in [0; 1]$.
2. Même question avec la condition $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ pour tout $x \in [0; 1]$.
3. Pour $0 < c < 1$, déterminer toutes les fonctions continues $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Traiter également le cas $c = 2$.

I.1.710 Navale MP 2024

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe. On suppose que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

I.1.711 ENS

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à $R \in]0; +\infty[$. On suppose que la série $\sum a_n R^n$ converge. Montrer que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur le segment $[0; R]$.

En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la série converge uniformément sur $\overline{D}$;
- ii) la série converge uniformément sur D ;
- iii) la série converge uniformément sur U .

I.1.712 x

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)x^n}{n},$$

où a et x sont des nombres réels.

I.1.713 x

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(5n)!}$.

I.1.714 x

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que les coefficients du développement en série entière en 0 de la fraction

$$F(x) = \frac{1}{1 - ax + ax^2 - x^3}$$

soient tous positifs.

I.1.715 x

Soit $a > 0$. On pose, pour $x \in]-a; a[$, $f(x) = \ln(a-x) \ln(x+a)$. Déterminer, selon les valeurs de a et pour m assez grand, le signe de $f^{(m)}$. On pourra utiliser le développement de f en série entière.

I.1.716 x

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum na_n$ est absolument convergente.

1. Vérifier que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

Pour $z \in D$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2. On suppose $a_1 \neq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| < |a_1|$.

Montrer que f est injective.

I.1.717 x

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et on suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$. Existe-t-il une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = f(z) ?$$

I.1.718 x-ENS

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{nk} a_k = (-1)^n.$$

2. Y a-t-il unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

I.1.719 ENS

Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles qu'il existe une permutation σ pour laquelle la suite $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

I.1.720 x

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k}\right).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.1.721 x-ENS

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2}$ converge.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

I.1.722 CCINP MP 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! a_n > 0, \quad f_n(a_n) = 0.$$

2. Étudier la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite.
3. La série $\sum a_n$ converge-t-elle ?
4. Étudier la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right)$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.1.723 CCINP MP 2026

1. Énoncer et démontrer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions.
2. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries $\sum_{n \geq 0} nx^n$ et $\sum_{n \geq 0} n^2x^n$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n}{2^n}$.

I.1.724 ENS

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement décroissante de réels strictement positifs. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$; S est donc un élément de $]0; +\infty[$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \geq 0}$ pour que tout réel de $]0; S[$ puisse s'écrire d'une manière sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$, φ étant une *extraction*, c'est-à-dire une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \geq 0}$ pour qu'il y ait, quel que soit le réel de $]0; S[$, existence et unicité de l'écriture précédente.

I.1.725 x

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3, \dots$ Elle prend une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3 et ainsi de suite. Donner une expression du terme général (à l'aide de la fonction partie entière) et un équivalent de u_n .

I.1.726 ENS

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n + b_n \rightarrow 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \rightarrow 2$. Montrer que les deux suites convergent.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n \rightarrow 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \rightarrow 3$. Que peut-on dire de la convergence de ces trois suites ?

I.1.727 ENS

1. Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un n -uplet $(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tel que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|\varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_p z_p| \leq \sqrt{3}.$$

2. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\{\pm 1\}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n z_n$ converge.

I.1.728 x

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^6 = 1$ et telles que la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

converge. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{C}$ qui à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ associe la limite ℓ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Déterminer $\varphi(E)$.

I.1.729 ENS

Soit $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n < 2\pi$ et a, b des réels positifs ou nuls de somme 1. On définit :

- $\theta_j^{(0)} = \theta_j$;
- $\theta_j^{(k+1)} = a\theta_j^{(k)} + b\theta_{j+1}^{(k)} \pmod{2\pi}$ si $1 \leq j < n$;
- $\theta_n^{(k+1)} = a\theta_n^{(k)} + b\theta_1^{(k)} \pmod{2\pi}$.

Étudier la limite, lorsque k tend vers $+\infty$, de $\theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}$.

I.1.730 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $v_0(a) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}(a) = f(v_n(a))$. On pose :

$$u_n(a) = \frac{v_0(a) + v_1(a) + \dots + v_n(a)}{n+1}.$$

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que f admet un point fixe.
2. Trouver un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un point fixe unique a et telle que pour tout $x \neq a$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite distincte de a .

I.1.731 x

Étudier la monotonie de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln(k).$$

I.1.732 x

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k.$$

1. On suppose que les u_n sont des réels positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - i) la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge ;
 - ii) la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ converge.
2. On revient au cas général. Montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est une condition suffisante pour que la convergence de la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ entraîne celle de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

I.1.733 x

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Pour $u \geq 0$ et $x > 1$, on pose :

$$f_u(x) = \sum_{u < n \leq ux} a_n.$$

Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

- i) pour tout $x > 1$, $f_u(x)$ admet une limite finie lorsque $u \rightarrow +\infty$;
- ii) la suite $(na_n)_{n \geq 0}$ converge.

I.1.734 ENS

1. *Théorème de Dirichlet.* Soit α un irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

2. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin(n)} \right)_{n \geq 1}$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $s \geq 0$, la suite

$$\left(\frac{1}{n^s \sin(\pi \alpha n)} \right)_{n \geq 1}$$

diverge.

I.1.735 x

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - u_n^2$.

I.1.736 x

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2$ tende vers 0. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

I.1.737 x

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.
2. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définies par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.
3. On pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$. Expliciter w_n .
4. Soit $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ converge.
5. Montrer qu'il existe un unique réel r tel que la suite $(a_n + rb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

I.1.738 x

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x \geq 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2}.$$

Déterminer la limite de $\frac{2^n}{u_n}$.

Indication : on pourra poser $\sin(\theta_n) = \frac{1}{u_n}$.

I.1.739 x

On considère le polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $P_n(x_n) = x_n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante et converge vers 1.

I.1.740 x

Établir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{p(2p+1)2p+2}.$$

I.1.741 x

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in [1; +\infty[$, on pose

$$F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n.$$

1. Trouver un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Démontrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$F(x) = x \ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

I.1.742 x

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes. Existe-t-il une série divergente à termes réels non nuls $\sum b_n$, telle que

$$\inf_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}} \sup_{n \geq 0} \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0 ?$$

I.1.743 x

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

I.1.744 x-ENS

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

1. Étudier la limite de $v_n = n \left(u_n - \int_a^b f(t) dt \right)$.
2. On suppose maintenant f de classe C^2 . Trouver un développement asymptotique de u_n en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

I.1.745 ENS

Pour tout entier $n \geq 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n . Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{nq_n}$?

I.1.746 x

On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge. On pose, pour $h \neq 0$,

$$f(h) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\sin(nh)}{nh} \right)^2.$$

Étudier l'existence et la continuité de f . La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

I.1.747 ENS

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[0; 1]$ à valeurs réelles. On suppose que $|f_n(x)f_m(x)| \leq 2^{-|n-m|}$ pour tout couple $(n; m) \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in [0; 1]$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; 1]$.
2. Montrer que sa somme est bornée.
3. La convergence est-elle uniforme sur $[0; 1]$?

I.1.748 ENS

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$, avec $f'(0) \in]-1; 0[$ et $-x < f(x) < 0$ pour tout $x \in]0; 1[$.

1. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0; 1[$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - x_n = f(x_n).$$

- (a) Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que, pour n assez grand, il existe un unique entier naturel $\varphi(n)$ tel que $x_{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n} < x_{\varphi(n)}$.
 (c) Démontrer qu'il existe $C \neq 0$ tel que $\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \ln(n)$.
2. On passe au cas continu. On considère la solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ prenant en 0 la valeur $x(0) \in]0; 1[$. Montrer que x est définie sur $]0; +\infty[$ et que, pour n assez grand, il existe un unique $t_n \geq 0$ tel que $x(t_n) = \frac{1}{n}$. Déterminer un équivalent de t_n .

I.1.749 ENS

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs qui est croissante et tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{a_n} = \ell.$$

Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n x_k$$

converge vers 0.

I.1.750 x

Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{a^m + b^n} \right)_{m,n \geq 0}$$

est sommable si, et seulement si, $a > 1$ et $b > 1$.

I.1.751 ENS

Quelles sont les fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de polynômes strictement croissants ?

I.1.752 Mines-Ponts PSI 2024

Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. Étudier la série $\sum_{k \geq 1} \frac{f(k)}{k^2}$.

I.1.753 CCINP PSI 2024

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées.
2. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right).$$

I.1.754 CCINP PSI 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Étudier la série $\sum (-1)^n a_n$.
3. On considère la série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et soit f sa somme.
 - (a) Montrer que $a_n \geq \frac{1}{2n}$.
 - (b) En déduire la valeur de R .
 - (c) Montrer que a_n vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1.$$

- (d) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

I.1.755 CCINP PSI 2024

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = -4, a_1 = 2, a_2 = 4 \quad \text{et} \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $|a_n| \leq 2^{n+2}$.
2. Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif puis que

$$S(x) = \frac{6x^2 + 6x - 4}{(x+1)(x-1)^2} \quad \text{pour } |x| < R.$$

3. Trouver a, b, c tels que

$$S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

4. Déterminer a_n en fonction de n .
5. Déterminer R .

I.1.756 Mines-Ponts PSI 2024

Pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0; 1]$, on pose $f_n(x) = x^n - \cos(x)$.

1. Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $[0; 1]$ en un réel que l'on notera a_n .
2. Étudier la nature de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$. Si elle converge, déterminer sa limite.
3. Déterminer un équivalent de a_{n-1} en $+\infty$.

2 Continuité et dérivabilité

I.2.1 Mines-Ponts

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α , le polynôme $P' + \alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

I.2.2 ENS Ulm

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P > 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + P'' + \dots + P^{(n)}$ avec $n = \deg(P)$. Montrer que $Q > 0$ sur $\mathbb{R}$.

I.2.3 Mines-Ponts

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer qu'il existe $x_1 < \dots < x_n$ tels que $\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n$.

I.2.4 X PC 2020

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose $f' \geq 0$ et $0 \leq f'' \leq f$. Montrer que $f' \leq f$.

I.2.5 Mines-Ponts MP

Soit $a < b$ deux nombres réels et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a; b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers une fonction f . Montrer que $(\min(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\min(f)$ et que $(\max(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\max(f)$.

I.2.6 Mines-Ponts PC 2023

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1} \arctan(x)$.

1. La fonction f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Le cas échéant, donner une équation de cette droite.
2. Étudier les variations de f .

I.2.7 Mines-Ponts

Soit $a \in]0; 1]$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est égale à sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(ax)$.

I.2.8 Mines-Télécom MP

1. Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$.
2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ croissante. Montrer que la fonction f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = x$.
Indication : on pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) < x\}$.

I.2.9 Mines-Télécom MP

Soit f et g deux fonctions de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, continues et vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0; 1]$ tel que $g(a) = a$.
2. Supposons que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) > g(x)$.
Montrer que la suite $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

I.2.10 Mines-Ponts PC 2023

Soit f et g deux fonctions appartenant à $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ g$ est strictement décroissante.

1. Montrer que $f \circ g$ admet un unique point fixe.
2. Montrer que $g \circ f$ admet un unique point fixe.

I.2.11 X-ENS

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $f([a; b])$ est un segment, et $f^{-1}(\{x\})$ est un fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

I.2.12 CCP

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers une application f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a; b]$. Montrer que f est continue en x_0 .
2. On pose, pour tout $x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

I.2.13 CCP

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$. Démontrer que si la fonction f' admet une limite en x_0 , alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$

est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

I.2.14 X PC 2009

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f est infini.

I.2.15 CCP

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée dans la question précédente.

I.2.16 X PC 2019

Soit f une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t un nombre réel. Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x+t) = f(x)$.

I.2.17 X-ENS 2015

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle $C^1, C^2, \dots$?

I.2.18 Petites Mines 2015

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$.

Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

I.2.19 X-ENS 2015

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f , C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que les coefficients de la série de Taylor de f sont des nombres rationnels.

I.2.20 CCP 2015

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est prolongeable en une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .

I.2.21 Centrale 2015

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$.

- Montrer que si $\int_0^1 f(t) dt = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$.
- Montrer que si $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe sur $]0; 1[$.

I.2.22 CCP MP

On désigne par $C([0; 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0; 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
 - (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
3. En déduire que f est nulle sur l'intervalle $[0; 1]$.

I.2.23 CCP 2016

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f .
2. Étudier la continuité de f .
3. Préciser $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f(D)$.

I.2.24 ENS Ulm

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $\|f'_n\|_\infty \leq 1$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g . Montrer que g est continue.

I.2.25 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = M(x)^T M(x)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue et $M : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 , solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

I.2.26 X-ENS

1. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $T = \{(x; y) \in I^2 \mid x < y\}$. On considère deux couples $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ appartenant à T . Pour $t \in [0; 1]$, on pose $u(t) = (1 - t)x_1 + tx_2$ et $v(t) = (1 - t)y_1 + ty_2$.

Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$, $(u(t); v(t)) \in T$, et en déduire que f est strictement monotone.

2. Soit f dérivable sur I telle qu'il existe $(a; b) \in I^2$ vérifiant $f'(a)f'(b) < 0$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Quel théorème peut-on ainsi montrer ?

3. Déterminer les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas, telles que $|f''| = f$.

I.2.27 CCP 2017

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et celui de f' .
2. Calculer $f'(x)$. Conclure.

I.2.28 Mines-Ponts PSI

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $e \in E$ et $T_e : f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t) dt \in \mathbb{R}$.

Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $\|T_e\|_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

Indication : considérer $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)| + \varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

I.2.29 ENS MP/MPI

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux.

Quels sont les points de continuité de f ?

I.2.30 CCP

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Étudier le domaine de définition de la fonction S et sa continuité.
2. Montrer que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.31 TPE/EIVP

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X - a)^n(X - b)^n$. Donner une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de P et en déduire $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ en fonction de n .

I.2.32 Mines-Ponts PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

I.2.33 Centrale PC

Soit $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0; 1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0; 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + (n(x - \alpha))^2}}$.

Montrer que la suite $(\|f_n\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro.

2. L'application $\Phi : f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_2$?
3. Existe-t-il un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_\infty \leq C\|P\|_2$?

I.2.34 x

Existe-t-il une injection continue de $[0; 1]^2$ dans $[0; 1]$?

I.2.35 Mines-Ponts MP 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

I.2.36 Mines-Télécom PC 2022

En appliquant le théorème des accroissements finis, prouver l'encadrement :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

I.2.37 ENS MP 2017

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = 0$. Pourquoi a-t-on f constante sur $\mathbb{R}$?

I.2.38 Mines-Télécom MP 2025

Soit $k : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.

1. Montrer que k est prolongeable par continuité en 0.
2. La fonction k est-elle dérivable en 0 ? de classe C^1 en 0 ?
3. A-t-on d'autres informations sur k ?

I.2.39 Mines-Ponts MP 2019

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1 + x^n})$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable une infinité de fois en 0, et donner les expressions de ses dérivées successives en 0.

I.2.40 Mines-Ponts MP 2019

Soit f une fonction dérivable de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0; 1], \quad |f'(x)| \leq M|f(x)|.$$

Montrer que f ne s'annule pas sur $[0; 1]$.

I.2.41 Centrale-Supélec

Existe-t-il une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que f soit non monotone sur tout segment de $[0; 1]$?

I.2.42 CCINP PC 2018

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \end{aligned}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq |x|$.
La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on désigne par g son prolongement.
- Posons $T_f(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$. La fonction T_f a-t-elle une limite quand x tend vers 0 ?
Indication : utiliser les suites définies par $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$.
- La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
- Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. La fonction f est-elle continue en $\frac{1}{k}$?
Indication : prendre $I = \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right[$ et $J = \left] \frac{1}{k}; \frac{1}{k-1} \right[$.
- Étudier l'existence et la valeur de $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

I.2.43 Mines-Télécom MP 2025

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que la fonction h est prolongeable en une fonction de classe C^1 en 0.

I.2.44 Mines-Ponts MP 2015

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sinh(x)} - \frac{x}{\sin(x)} & \text{si } x \in]0; \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; \pi[$. Calculer $f'(0)$.
2. La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $[0; \pi[$? Calculer $f''(0)$.

I.2.45 Mines-Ponts MP 2015

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue.

Montrer qu'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq ax + b$.

I.2.46 Mines 2023

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est de classe C^∞ .
2. On suppose que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$, et que $f''(0) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h^2 = f$.

I.2.47 Mines 2023

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et on considère $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-\alpha; \alpha]$:

$$f'(x)^2 \leq 2f(x)M(\alpha) \quad \text{avec} \quad M(\alpha) = \sup_{|t| \leq 2\alpha} |f''(t)|.$$

3. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\sqrt{f}$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

I.2.48 Mines-Ponts MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(xt) dt.$$

2. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{(k)} = \frac{f^{k+1}(0)}{k+1}.$$

I.2.49 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble de ses points de discontinuité. Montrer que l'on a $\mathfrak{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_n$, avec $\mathfrak{D}_n$ fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.50 X MP 2017

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell.$$

1. Montrer que $z \mapsto z^2$ et $z \mapsto e^z$ sont $\mathbb{C}$ -dérivables.
2. Montrer que $z \mapsto \bar{z}$ ne l'est pas.
3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On pose $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\tilde{f}(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = (\operatorname{Re}(f(x + iy)); \operatorname{Im}(f(x + iy))).$$

Montrer que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

$$\tilde{f} \text{ est dérivable en } z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0; y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0; y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0; y_0).$$

I.2.51 Mines-Ponts MP 2021

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

I.2.52 ENS Lyon MP 2016

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) = 0.$$

I.2.53 Centrale-Supélec TSI 2023

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de f .
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_N tel que pour tout $x > 0$:

$$f^{(N)}(x) = P_N\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que f n'est pas développable en série entière autour de 0.

I.2.54 ENS MP 2022

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bornée.
2. On pose $\alpha = -\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x).$$

3. Montrer que $f_{a,b}$ est α -höldérienne, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0, \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et N, m deux entiers naturels non nuls. On pose $h = \frac{N}{b^m}$.

Calculer :

$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t) dt.$$

5. Montrer que :

$$\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos(b^m \pi t) dt \leq C a^m.$$

6. Montrer qu'il existe un réel x_m tel que l'on a :

$$|f_{a,b}(x_m) - f_{a,b}(x)| \leq \frac{C a^m}{2}.$$

7. Que peut-on dire d'une fonction α -höldérienne avec $\alpha > 1$?
8. Montrer que $f_{a,b}$ est nulle part dérivable.

I.2.55 Centrale-Supélec MP 2023

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha \geq 2$ et $\beta \in]1; +\infty[$, on pose :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(2\pi \alpha^n t)}{\beta^n}.$$

1. Donner les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries de fonctions.
2. On suppose que $\alpha < \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\alpha \geq \beta$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas dérivable en 0.
En déduire une condition pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit de classe C^k , mais non de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

I.2.56 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0 telle que $f'(0) = f(0) = 0$. On définit la fonction g telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.

I.2.57 ENSEA/ENSIIE MP 2018

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}.$$

1. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f .
2. Étudier la continuité de f sur D_f .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f sur l'intérieur de D_f .
5. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

I.2.58 Mines-Ponts

On dit qu'une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une *corde horizontale de longueur* $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\exists x \in [0; 1] \text{ tel que } x + \ell \in [0; 1] \text{ et } f(x + \ell) = f(x),$$

c'est-à-dire si la corde reliant les points $(x; f(x))$ et $(x + \ell; f(x + \ell))$ de la courbe représentative de f est horizontale.

1. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que f admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$ (*théorème de la corde universelle*).
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \neq \frac{1}{n}$, montrer qu'il existe une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et n'admettant pas de corde horizontale de longueur ℓ .
3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet au moins n cordes horizontales de longueur multiple de $\frac{1}{n}$.
4. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$ et $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. On pose $L = g(1) - g(0)$. Montrer qu'il existe n paires $\{T_i; T'_i\} \subset [0; 1]$ telles que :

$$f(T_i) = f(T'_i) \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, \quad |g(T_i) - g(T'_i)| = k \left| \frac{L}{N} \right|.$$

5. Montrer qu'une courbe fermée du plan, continue, et tournant de façon monotone n fois autour d'un point, se recoupe au moins $n - 1$ fois.

I.2.59 TPE/EIVP MP 2019

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

I.2.60 Mines-Ponts PC 2015

Un marcheur parcourt (continûment) 6 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe une demi-heure durant laquelle il parcourt exactement 3 kilomètres.

I.2.61 Mines-Ponts

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x; y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et à valeurs réelles. Montrer qu'alors f est uniformément continue. (*théorème de Heine*)
2. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement uniformément continue ?
3. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ à valeurs réelles.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

(b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

I.2.62 Mines-Ponts PC 2024

Déterminer une fonction f de classe C^∞ sur $] -\infty; 1[$ telle que :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right).$$

I.2.63 Mines-Ponts PC 2024

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable différente de la fonction nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad |f'(x)| \leq M|f(x)|.$$

Montrer que la fonction f ne s'annule en aucun point de $[0; 1]$.

I.2.64 Mines-Télécom PC 2019

On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

I.2.65 X MP 2022

Soit f une fonction continue de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = f(b)$.

1. Pour n entier supérieur à 2, montrer qu'il existe $(a'; b') \in [a; b]^2$ tel que :

$$f(a') = f(b') \quad \text{et} \quad b' - a' = \frac{b - a}{n}.$$

2. En supposant de plus f dérivable sur $]a; b[$, en déduire le théorème de Rolle.
3. *Application* : soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Déterminer le nombre de points d'annulation de $f^{(n)}$.

I.2.66 Centrale-Supélec MP 2017

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

I.2.67 Centrale-Supélec PSI 2015

On définit g sur $]0; 1[$ telle que $g(x) = x^x$.

1. Trouver α réel tel que, en posant $g(0) = \alpha$, g soit continue sur $[0; 1]$.
2. Donner la représentation graphique de g .
3. Expliciter l'allure de g en 0 et donner son minimum.
4. Donner une valeur approchée de $\int_0^1 g(x) dx$.
5. Trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\int_0^1 g(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, puis donner la valeur de $\int_0^1 g(x) dx$.

I.2.68 ENSAM PSI 2017

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Soit f définie sur D par :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = |\cos(z)|^2.$$

1. Montrer que f est bornée sur D .
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et de $\operatorname{Im}(z)$.
On rappelle que $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D .

I.2.69 CCINP PC 2016

Soit $\phi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$. On admet le développement suivant :

$$\phi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

1. Calculer $\phi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.
2. On définit, par récurrence la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k.$$

Calculer P_1, P_2 et P_3 .

3. Montrer que $P_n \leq n!$.
4. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k}{k!} x^k$. Montrer que le rayon de convergence de f est différent de 0.
5. Prouver que $f'(x) = \exp(x)f(x)$.
6. En déduire le développement en série entière de ϕ .

I.2.70 CCINP PSI 2017

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1 + nx^2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.71 Centrale-Supélec PSI 2013

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propositions suivantes :

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$
- iii) La fonction f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$.

I.2.72 X PC 2008

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin(x + 3\sqrt{x}))}{\sinh(\tanh(2x + \sin(x)))}.$$

I.2.73 Mines-Télécom PC 2019

Montrer que $\arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

I.2.74 CCINP PSI 2015

Soit f une fonction dérivable sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. On définit la fonction g qui à x associe $\frac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
2. Montrer que f admet une tangente passant par l'origine.

I.2.75 CCINP PC 2015

On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par

$$f(t) = \frac{1 - t^3}{t}.$$

1. Calculer f' . En déduire que f réalise une bijection de $]0; 1]$ vers $[0; +\infty[$.
2. On pose u la bijection réciproque de f . Montrer que, pour tout $x \geq 0$:

$$(u(x))^3 + xu(x) - 1 = 0.$$

3. Montrer que u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{3(u(x))^2 + x}.$$

4. Montrer que $u(1) \geq \frac{1}{2}$ à l'aide de 2, puis que $|u'| \leq \frac{1}{3u}$.
5. Montrer que $u(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{1}{x}$.
6. Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)} dx$.

I.2.76 Mines PC 2022

Existe-t-il une fonction continue et surjective de E vers F si

1. $E = [0; 1]$ et $F =]0; 1[$?
2. $E =]0; 1[$ et $F = [0; 1]$?

I.2.77 Mines-Ponts PC 2022

Soit $f \in C^1([0; b], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = a > 0$ et

$$\forall x \in [0; b], \quad f'(x) \geq f^3(x).$$

Montrer que $b \leq \frac{1}{2a^2}$.

I.2.78 ENS MP 2017

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) = \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Montrer que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} \right) = \lambda^\beta.$$

2. On suppose désormais que φ' est croissante. Montrer la réciproque.

I.2.79 Mines-Télécom MP 2018

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une limite en $+\infty$, une limite en $-\infty$ et qu'elles sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

I.2.80 Mines-Ponts MP 2018

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f < g$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que $f < P < g$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose f et g de classe n et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^{(k)} < g^{(k)}$. Prouver qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f^{(k)} < P^{(k)} < g^{(k)}.$$

I.2.81 Mines-Télécom PSI 2018

Lorsque cela est possible, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? Est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition ?

I.2.82 X MP 2021

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty; \alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si f est continue, alors f est s.c.i.
2. Donner un exemple de fonction f s.c.i. mais non continue.
3. Montrer que f est s.c.i. si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y \in V$, $f(y) > f(x) - \varepsilon$.

I.2.83 X MP 2021

Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ et $x \mapsto -f(x) + \frac{Cx^2}{2}$ soient convexes.

1. Montrer que f est dérivable.
2. Montrer que f n'est pas nécessairement deux fois dérivable.
3. Montrer que f est de classe C^1 .

I.2.84 CCINP PC 2021

Pour $x \in]-1; +\infty[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

I.2.85 X PC 2025

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P - P' = Q$. On suppose que Q est positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que P est positif sur $\mathbb{R}$.

I.2.86 CCINP PSI 2018

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n(1+n^2x^2)}}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

I.2.87 X MP 2017

Soit f une fonction de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a; b) \in [0; 1]^2, \exists (c; d) \in \mathbb{R}^2, \quad f([a; b]) = [c; d].$$

- (a) La fonction f est-elle continue ?
- (b) On suppose de plus que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé. Montrer que f est continue.

2. On suppose que f est une dérivée. Montrer qu'elle vérifie la première propriété.

I.2.88 ENS Ulm MP 2019

Soit $f : \left[\frac{1}{4}; 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $x^{f(x)} = f(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Montrer que f est uniformément continue.

I.2.89 Mines-ponts MP 2025

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$. Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

I.2.90 ENS MP 2015

Soit F une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = F(x) + 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \ell,$$

où F^n désigne l'itéré $n^{\text{ème}}$ de F , et $\ell \in \overline{R}$.

Question subsidiaire : montrer que ℓ est réel et indépendant de x .

I.2.91 Mines-Ponts PC 2025

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

I.2.92 CCINP MP 2018

1. Soit $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f telle que pour tout n , la fonction f_n est continue en $x_0 \in [a; b]$. Montrer que f est continue en x_0 .
2. Soit g_n définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x^n$.
La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

I.2.93 X MP 2017

Soit $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ une série à termes positifs convergente, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ une suite injective dense dans $[0; 1]$. On pose :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}, \alpha_n < x} \alpha_n.$$

Déterminer les points de continuité et les points de discontinuité de f .

I.2.94 Mines-Ponts MP 2017

Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n > 0, \quad a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\tanh(t)}{t^2} dt.$$

Soit la série entière f associée à cette suite, i.e. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. La fonction f est-elle continue à gauche en 1 ?

I.2.95 Mines-Ponts MP 2018

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que toute racine multiple de P' est aussi racine de P .
2. Déterminer le signe de $PP'' - (P')^2$ sur $\mathbb{R}$.

I.2.96 Mines-Ponts MP 2025

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et H un demi-plan de $\mathbb{C}$ contenant une racine de P' .

1. Montrer que $Z_{P'} \subset \text{conv}(Z_P)$.
2. Montrer que H contient une racine de P .
3. En déduire que $P(H) = \mathbb{C}$.

I.2.97 Mines-Télécom MP 2019

Soit $P(X)$ scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P) \geq 2$.

1. Montrer que P' est aussi scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et de P' .

I.2.98 CCINP PSI 2021

Soit $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

I.2.99 ENS Lyon 2010

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que si f est uniformément continue, alors f est bornée.

I.2.100 Mines

Soit $f \in D^1([a; b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

I.2.101 Mines-Ponts PC 2024

Soit $f \in D^1([a; b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

I.2.102 ENS Lyon 2023

Soit $f \in D^1([a; b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

I.2.103 CCINP MP 2024

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$, et $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Soit

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur I , puis dérivable sur I si $n \geq 2$.
2. Montrer que g est de classe C^{n+1} sur $I \setminus \{0\}$ et que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \quad g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}.$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \quad g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$$

grâce à la formule de Taylor avec reste intégral.

I.2.104 Centrale-Supélec PC 2015

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition D_S de S .
2. Étudier la continuité de S . (Remarquer que $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$).
3. Étudier les variations de S et trouver un équivalent aux extrémités de D_S .

I.2.105 Centrale-Supélec MP 2016

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - q^k x)$$

où $q \in]-1; 1[$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une fonction f continue.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction g continue en 0 qui vérifie $g(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (1 - qx)g(qx)$.
3. Montrer que f est développable en série entière et exprimer ce développement.

I.2.106 ENS PC 2024

Soit une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $f(0) \geq 0$
- $f(1) \leq 0$
- Il existe $g \in C([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f + g$ est croissante.

Montrer que f s'annule.

I.2.107 Mines-Télécom PSI 2025

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Q}^2, \quad a < b \implies f(a) < f(b).$$

1. Montrer que f est croissante sur I .
2. Montrer que f est strictement croissante sur I .

I.2.108 ENS PC 2025

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, positive, telle que $f''(x)$ soit bornée. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)|^2 \leq C f(x).$$

I.2.109 ENS PC 2025

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f'' \geq 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x_0) > 0$. On note :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\} \quad \text{et} \quad C = \{(x; f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que pour tous $X \in A$ et $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\{X + \lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C \neq \emptyset$.

I.2.110 ENS PC 2025

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f , f' et f'' sont bornées.

1. Montrer que

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

converge uniformément vers $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que

$$\frac{f((1 + \varepsilon)x) - f(x)}{\varepsilon}$$

converge localement vers une limite à déterminer.

3. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

I.2.111 ENS 2010

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$.

I.2.112 ENS ULSR 2023

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère $x_0, \dots, x_n \in I$ tels que $x_0 < \dots < x_n$ et $f \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

I.2.113 Centrale-Supélec TSI

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- Effectuer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p.$$

Que remarquez-vous ?

- Proposer une idée pour déterminer $\sum_{k=0}^n k^3$, puis $\sum_{k=0}^n k^p$.

I.2.114 ENS MP 2015

Soit $I = [a; b]$, f une fonction de classe C^k sur I telle que $|f^{(k)}| \geq 1$, $\beta > 0$ et

$$E(\beta) = \{x \in I \mid |f(x)| \leq \beta\}.$$

Montrer que $E(\beta)$ est une réunion finie de segments.

I.2.115 X MP 2025

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_4 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 \quad \text{sur }]0; 1[,$$

et

$$\varphi_2 < \varphi_4 < \varphi_1 < \varphi_3 \quad \text{sur }]-1; 0[.$$

1. Est-ce possible ?
2. On suppose que ces fonctions sont polynomiales : si on note $v_{1,2}$ la *valuation* du polynôme $\varphi_1 - \varphi_2$ (plus petit degré non nul), donner la parité de chaque valuation.
3. Montrer que $v_{1,3} < v_{1,2}$.
4. Trouver une absurdité.

I.2.116 Centrale-Supélec PC 2012

Soit f une fonction continue et bornée de $[1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

1. (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|\arctan(u) - u| \leq Mu^2.$$

- (b) Montrer qu'il existe un réel C_f tel que $G(x) = C_f x + O_0(x^2)$.
2. Étudier la dérivabilité de G .
3. (a) Pour f constante et égale à 1, simplifier l'expression de $G'(x)$.
(b) On suppose que G a une limite finie ℓ . Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xG'(x)$.

I.2.117 Mines-Télécom PC 2016

Soit

$$f(x) = x^2 + \left\lfloor \frac{1}{1 - \lfloor x^2 \rfloor} \right\rfloor.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la continuité de f en ± 1 et en $\pm\sqrt{2}$.
3. Trouver une expression simplifiée de f sur les intervalles où elle est définie.
4. Tracer le graphe de la fonction f .

I.2.118 X MP 2013

Soit $f \in C^\infty([a; b], \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont positives. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point.

I.2.119 Mines-Ponts PC 2016

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition D_f de f et justifier que f est continue sur D_f .
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f .
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

I.2.120 Mines-Télécom MP 2026

Lorsque cela a un sens, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de S .
2. Étudier la dérivabilité de S sur son domaine de définition.

I.2.121 Mines-Télécom MP 2025

Soit q un réel tel que $|q| < 1$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sin(q^n x).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que f est développable en série entière. Déterminer son rayon de convergence.

I.2.122 Mines-Télécom PC 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que f_n est dérivable n fois sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n^{(n)}(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{1}{x}\right) x^{-n-1}.$$

Indication : remarquer que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$.

I.2.123 CCINP MP 2025

Soit

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que g vérifie une équation différentielle simple.
3. En déduire une expression de g et donner un équivalent en $+\infty$.

I.2.124 x

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe a et b réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq a|x| + b.$$

I.2.125 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 .

1. On suppose que $f(x) = o(1)$ pour $|x| \rightarrow +\infty$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $x \geq A$, $|f'(x)| \geq \delta$.
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \geq \lambda x$ au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire pour x assez grand).
Proposer sans justification un énoncé analogue en $-\infty$.
3. On suppose que $f(x) = o(|x|)$ pour $|x| \rightarrow +\infty$.
Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
Indication : raisonner par l'absurde et utiliser 2.

I.2.126 Mines-Télécom PSI 2026

Pour $n \geq 2$ entier, on définit f_n sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}.$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur I .
On notera f la somme de cette série de fonctions.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur I puis sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I .
4. (a) Montrer que f est continue sur I .
(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

I.2.127 Mines-Ponts PSI

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de convergence D de cette série.
2. Sur quel intervalle $x \mapsto S(x)$ est-elle continue ?
3. A-t-on convergence uniforme de la série sur D ?
4. Sur quel intervalle $x \mapsto S(x)$ est-elle dérivable ?

I.2.128 Mines-Ponts PSI 2026

Soit f et g deux fonctions appartenant à $C([0; 1], [0; 1])$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. On suppose que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha.$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

I.2.129 Mines MP 2025

Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, et non dérivable en 0.

I.2.130 CCINP MP 2026

On définit les fonctions f et F par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x+n}} \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt.$$

1. Déterminer D_f et D_F .
2. Étudier la continuité de f et F sur leur domaine de définition.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

I.2.131 X 2018

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $e^x - 1$ à l'ordre n . On appelle T_n la partie polynomiale.
2. Montrer que pour n impair, T_n n'a pas de racine non nulle.
3. Montrer que pour n pair, T_n a au moins une racine non nulle. Montrer que cette racine est unique.

I.2.132 x 2023

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La fonction f est croissante.
- ii) Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: si $g - f$ a un minimum local en x_0 , alors $g'(x_0) \geq 0$.

I.2.133 x 2023

Soit $a < b < c$ des réels et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que $f(b) < f(a)$ et $f(b) < f(c)$.

Montrer que f admet un minimum local.

I.2.134 ENS 2025

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un réel $c \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'(x))^2 \leq cf(x).$$

I.2.135 ENS PC 2024

Soit V l'ensemble des fonctions continues $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables sur $]0; 1[$ avec la propriété $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $f \in V$, il existe $\xi \in]0; 1[$ tel que :

$$f(\xi) + \alpha = f'(\xi).$$

I.2.136 ENS PC 2024

Soit $f \in C([0; 1], [0; 1])$ bijective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que $f^{(2)}(x) = x$.

I.2.137 ENS PC 2024

Soit $S, T : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ deux fonctions continues telles que :

- $S \circ T = T \circ S$;
- la fonction T est croissante.

Montrer que S et T ont un point fixe commun.

I.2.138 x

Soit $[a; b]$ un intervalle. On dit que f définie sur $[a; b]$ est *réglée*, si elle admet une limite à gauche et à droite en tout point. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.

I.2.139 CCINP 2025

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}.$$

1. Montrer que $D_f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$.
2. Étudier la continuité de f sur $]1; +\infty[$.
3. Calculer $f(2)$.
4. Étudier la continuité de f sur $] -\infty; -1]$.

I.2.140 Navale PC 2024

Soit

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 - 2x \cos(\alpha) + 1} \right).$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - \exp(i\alpha)} + \frac{1}{x - \exp(-i\alpha)} \right).$$

2. Donner le développement en série entière de $f'(x)$.
3. En déduire le développement en série entière de $f(x)$.

I.2.141 x

Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, monotone, dont A est l'ensemble des points de discontinuité.

I.2.142 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

admette une limite en 0.

I.2.143 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que $f^2(x) \leq a$ et $f'^2(x) + f''^2(x) \leq b$ pour tout réel x . Montrer que, pour tout réel x ,

$$f^2(x) + f'^2(x) \leq \max(a; b).$$

I.2.144 ENS

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f^{(n)}| \leq |P(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Que dire de f ?

I.2.145 x

1. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4 , telle que :

$$f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0.$$

Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, il existe $\xi \in]0; 1[$ tel que :

$$f(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} x^2 (1-x)^2.$$

2. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision du segment $[a; b]$ et une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer l'existence de $\Phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , polynomiale de degré au plus trois sur chacun des segments $[x_i; x_{i+1}]$ et telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on ait $\Phi(x_k) = f(x_k)$ et $\Phi'(x_k) = f'(x_k)$.
3. Dans les conditions de la question 2, on suppose en outre que f est de classe C^4 . Montrer que :

$$\|f - \Phi\|_\infty \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{384} \sup_{1 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

I.2.146 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p .

- On suppose qu'il existe $n \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $f(x) = o(x^n)$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Montrer que $f^{(p)}$ s'annule en un point.
- Comment modifier la preuve précédente si on suppose simplement que f est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$?
- Que se passe-t-il si $n = p$?

I.2.147 x-ENS

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . On dit que f est *absolument monotone* sur $[a; b]$ si f et toutes ses dérivées sont positives sur $]a; b[$.

- Donner des exemples de fonctions absolument monotones.
- Montrer qu'une fonction absolument monotone est analytique.

I.2.148 x

Soit $a < b$ deux réels et $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique. On suppose que la fonction f admet une infinité de zéros dans un segment $[c; d]$ de $]a; b[$. Montrer que f est identiquement nulle.

I.2.149 x

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sinh(x)} - (\sinh(x))^x}{(\sin(x))^x - x^{\sin(x)}}.$$

I.2.150 x

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

I.2.151 ENS

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; 1[$ vérifiant les égalités $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que $|f''(x)| \geq 4$.

I.2.152 x

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, de classe C^2 sur $]0; 1[$ telles que, pour tout $x \in]0; 1[$, $|f''(x)| \leq 1$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on note

$$A(f) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1).$$

1. Montrer que A est bornée sur $\mathcal{E}$ et déterminer $\sup_{f \in \mathcal{E}} A(f) = M$.
2. Résoudre dans $\mathcal{E}$ l'équation $A(f) = M$.

I.2.153 ENS

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $\Delta(f) \in E$ l'application définie pour tout $x > 0$ par $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in]0; 1[$, tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.
2. En déduire l'ensemble des réels c tels que n^c soit entier pour tout $n \geq 1$.

I.2.154 ENS Ulm

1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

2. Soit $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}|$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, M_k est fini et

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

I.2.155 x

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $f_n(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_- \cup \left[\frac{2}{n}; +\infty\right[$, et f_n affine sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]$. Soit $m \mapsto r_m$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g_n(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f_n(t - r_m)}{2^m}.$$

1. Établir la continuité de g_n .
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(g_n)_{n \geq 1}$.

I.2.156 x

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ par $f_0(x) = x$, f_{n+1} est affine sur chacun des intervalles $\left[\frac{k}{3^{n+1}}; \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$ et vérifie

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right), \quad f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)$$

$$\text{et } f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

1. Montrer que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^n |x - y|$ pour tout couple $(x; y) \in [0; 1]^2$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^{n+1}}$.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f .
4. Démontrer que pour tout $p \in \llbracket 0, 3^n \rrbracket$ on a $f\left(\frac{p}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{p}{3^n}\right)$.
5. Montrer que f n'est dérivable en aucun point du segment $[0; 1]$ de la forme $\frac{p}{3^n}$, où $p \in \llbracket 0, 3^n \rrbracket$.
6. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0; 1]$.

Indication : considérer la fonction $(h; k) \mapsto \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}$.

I.2.157 ENS

Soit $x_1, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts d'un segment $[a; b]$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes coïncidant avec f en chaque point x_k , qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

I.2.158 CCINP PSI 2024

Pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sinh(nx)}.$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum f_n(x)$ converge.

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Déterminer le domaine de continuité de f .
3. Étudier les variations de f .
4. Montrer que pour u grand on a $\sinh(u) \geq e^{\frac{u}{2}}$.
5. Montrer que $f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{\sinh(x)}$ au voisinage de $+\infty$.

3 Calcul intégral

I.3.1 X-ENS

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

En déduire que le nombre d'Euler est irrationnel.

I.3.2 ENS Lyon

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale suivante :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin(x) dx.$$

1. Montrer que I_n est un polynôme à coefficients entiers en π , de degré inférieur ou égal à n .
2. En déduire que π est irrationnel.

I.3.3 Mines PC

Calculer

$$\int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx,$$

où $[a]$ désigne la *partie entière* de a .

I.3.4 X

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^n dt.$$

I.3.5 X PC 2019

On suppose que le graphe d'un polynôme de degré 6 est tangent à une droite en trois points A, B, C avec B le milieu de AC . Montrer que les aires délimitées par les segments AB, BC et la courbe sont égales.

I.3.6 ENSEA/ENSIIE MP 2023

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

I.3.7 ENS PC 2024

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout nombre réel x , on pose :

$$Q(x) = e^{-x} \int_0^x P(t) e^t dt.$$

Montrer que Q est polynomiale si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P^{(k)}(0) = 0$.

I.3.8 X-ENS

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Calculer, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment grand,

$$\int_0^{2\pi} r e^{i\theta} \det(r e^{i\theta} I_n - A) \cdot (r e^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta,$$

de deux manières différentes. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

I.3.9 CCP MP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

I.3.10 X PC 2021

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\pi \cos(nt) \cos^n(t) dt$.

I.3.11 Mines-Ponts

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

I.3.12 Mines-Télécom

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx.$$

I.3.13 Mines-Ponts MP 2021

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1 - x^2}{2}.$$

Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq \frac{1}{3}$.

I.3.14 Mines-Ponts MP

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$.

1. Montrer que $a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + 1 \right)$.
2. En déduire la valeur de $I(a) = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt$.

I.3.15 Mines-Télécom

Calculer :

$$I(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t) \cos(\theta)} dt, \quad \theta \in [0; \pi[.$$

I.3.16 Mines-Ponts MP 2023

Étudier la convergence de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.17 Mines-Ponts MP 2023

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.18 Mines-Ponts MP 2023

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + x^2} dx.$$

Si l'intégrale converge, calculer sa valeur.

I.3.19 X MP

L'objectif est de montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

À tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$, on associe $F = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k f^{(2k)}$.

1. Calculer $\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt$ en fonction de $F(0)$ et $F(\pi)$.

On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $(a; b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0; \pi], \quad f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}.$$

2. Tracer le graphe de f_n sur $[0; \pi]$.
3. Montrer que $\int_0^\pi f_n(t) \sin(t) dt \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

I.3.20 Mines-Ponts PC 2022

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Montrer que $I = \int_0^1 f(x) dx$ est convergente.
3. Montrer que f est développable en série entière.
4. Calculer I .

I.3.21 X-ENS

Soit $F = \{f \in C^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\}$.

Déterminer :

$$\inf_{f \in F} \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx.$$

I.3.22 X

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}} dt.$$

I.3.23 Mines-Ponts PSI 2023

On définit

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}}$$

et

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t) dt.$$

1. Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de F .
2. Calculer, si existence, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

I.3.24 X

Soit $(u; v) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \{|u|; |v|\}$. Calculer :

$$I_r(u; v) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(u - r e^{i\theta})(v - r e^{i\theta})} d\theta.$$

I.3.25 Mines

Pour tout $x \in [2; +\infty[$, on pose :

$$\text{Li}(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt. \quad (\text{logarithme intégral})$$

Trouver un développement asymptotique à n termes lorsque $x \rightarrow +\infty$.

I.3.26 X-ENS

1. Soit P, Q appartenant $\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$. On suppose de plus que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = \sum_{\alpha \in \Omega} \varepsilon(\alpha) \mu(\alpha)$$

où Ω est l'ensemble des pôles de $\frac{P}{Q}$, $\varepsilon(\alpha)$ le signe de la partie imaginaire de α et $\mu(\alpha)$ le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F .

2. *Application* : calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$.

I.3.27 X-ENS

1. Démontrer l'existence ou la non-existence d'une fonction f continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f(t)^2} dt.$$

2. Étudier la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ et pour tout $(n; x)$ appartenant à $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ par :

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f_n(t)^2} dt.$$

I.3.28 Mines-Ponts PC 2024

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$.
2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n J_n$ et calculer sa somme de plusieurs manières différentes.

I.3.29 Mines-Télécom PSI 2019

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{1+t^2}{t^2} \right) dt$ converge et calculer sa valeur.

I.3.30 ENS PSI 2023

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$.

Montrer que l'intégrale $I(a)$ converge et calculer sa valeur.

I.3.31 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $T : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$.

Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.3.32 CCP MP

Soit α et β deux nombres réels. Posons

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln((1+x)^\alpha)}{x^\beta} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} dx.$$

1. Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale I_1 est-elle convergente ?
2. Même question pour l'intégrale I_2 .

I.3.33 Mines

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} e^{(1-i)t} t^n dt$.

1. Montrer l'existence de I_n et exprimer I_n en fonction de n .
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{4}}} \sin(t^{\frac{1}{4}}) t^n dt$.

I.3.34 Mines-Ponts

Soit $f : [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_0 t} dt$$

converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t) e^{-s_0 t}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Démontrer que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge.

I.3.35 Centrale

Soit $f \in C^1([0 ; 1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(1) = 0$.

Montrer que $\int_0^1 f^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

I.3.36 X MP

Soit $E = \{f \in C^1([0 ; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que

$$I_1 = \int_0^1 f(x) f'(x) \cot(\pi t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2(\pi t)} dt$$

existent. Comparer I_1 et I_2 .

2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$.

(Inégalité de Wirtinger)

3. Caractériser le cas d'égalité de l'inégalité de Wirtinger.

I.3.37 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note

$$u_n(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2x}}}}$$

où l'on a n racines carrées. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{u_n(x)} dx.$$

I.3.38 x

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt.$$

I.3.39 Centrale

Soit $(p; q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Donner un algorithme permettant de calculer l'intégrale suivante :

$$I_{p,q} = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(1+t^2)^q} dt.$$

I.3.40 CCP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f \in C^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$.
2. Reprendre la question précédente en supposant que $f \in C([a; b], \mathbb{R})$.

I.3.41 x MP

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On considère :

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

1. En considérant l'application $\psi : t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} d\theta\right)$, montrer que $I(f)$ est un entier. (On appelle $I(f)$ l'indice de f .)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $f_P(t) = P(e^{it})$.
On admet le théorème de d'Alembert-Gauss en deuxième question, mais pas en troisième question.
2. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P .
3. En utilisant $P(re^{it})$ pour r variable, donner une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.

I.3.42 X-ENS

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré m . Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u) \, du.$$

Montrer que :

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^m P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m P^{(j)}(t).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q_0, \dots, q_n$ des entiers naturels avec $q_0 \neq 0$.

Soit encore $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$.

On suppose que $Q(e) = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(X) = X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p \cdots (X-n)^p.$$

Soit encore

$$J = \sum_{k=0}^n q_k I(k).$$

Montrer que $J \in \mathbb{N}$. De plus, montrer que $(p-1)!$ divise J , et que pour tout p suffisamment grand, $J \neq 0$.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|J| \leq C^p$.

Trouver une minoration de $|J|$. Conclure que e est un *nombre transcendant*, c'est-à-dire que e ne peut pas être racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

I.3.43 Mines-Ponts MP 2024

Montrer l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt \, dx$$

et calculer la valeur de I .

I.3.44 Mines-Ponts PC 2023

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1) \cdots (t+n)} \, dt.$$

Montrer l'existence de I_n , puis calculer I_n .

I.3.45 ENS

- Calculer $F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-sx} \, dx$.
- En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

I.3.46 Centrale PC 2005

1. Justifier l'existence de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$$

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer deux réels α et β tels que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I(x) = \alpha \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \beta \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt.$$

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{3 \sin(t)}{4t^2} dt.$$

4. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \right) = 0$$

et en déduire la valeur de J .

5. Montrer que I peut se prolonger en une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et préciser la dérivée en 0.

I.3.47 Mines-Télécom MP 2024

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- Donner le domaine de définition de f .
- La fonction f est-elle
 - continue ?
 - de classe C^1 ?
- Étudier la croissance de f . Calculer les limites au bord du domaine de définition.
- Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- Donner un équivalent de f en 0.

I.3.48 ENS Lyon MP 2024

Trouver un équivalent de la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt \end{cases}$$

I.3.49 CCP

Étudier l'intégrabilité de

$$f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

I.3.50 CCP

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$$

est intégrable sur $[0; +\infty[$.

2. On pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}} dt.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

I.3.51 Mines-Ponts

Pour tout $t \geq 0$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + x^2} dx.$$

I.3.52 X PC 2019

Déterminer la limite de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}} dt$$

quand n tend vers $+\infty$.

I.3.53 CCP 2015

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\cosh(t) + \cosh(a)}.$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Indication : on pourra faire le changement de variable $u = e^t$.

I.3.54 Mines 2015

Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

En écrivant I comme somme d'une série alternée, déterminer le signe de I .

I.3.55 Centrale 2015

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$. Donner une condition simple pour que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

I.3.56 CCP 2015

Soit $x \in [0; 1]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{pk} = \frac{1 + (-1)^n x^{p(n+1)}}{1 + x^p}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1 + pk} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^p} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1 + x^p} dx$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1 + pk} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^p} dx$.

I.3.57 CCP 2015

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\ln(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

I.3.58 Petites Mines

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right)$.

1. La fonction f est-elle intégrable sur $] -1; 1[$?
2. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \ln(1-t) - \ln(1+t)$.
3. Calculer $\int_{-1}^1 f(t) dt$ sachant que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

I.3.59 CCP MP

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$.
2. Prouver que $f : t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ et que

$$\int_0^1 e^t \ln(t) dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}.$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

I.3.60 CCP MP

On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$ et pour tout $t \in]0; +\infty[$, $f(x; t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x; t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On pose alors, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

I.3.61 CCP MP

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

I.3.62 CCP 2016

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : e^x - e^{-x} = 2$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^\alpha (\sinh(t))^n dt$, où $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.
Montrer que J_n est bien définie, et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
3. Trouver une relation liant J_{n+2} , J_n et $\sqrt{2}$.
En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

I.3.63 CCP MP

On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de H .

I.3.64 ENS 2016

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition (réel) de f .
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Trouver un équivalent de f en 0.
4. Montrer que le graphe de f admet pour axe de symétrie la droite Δ d'équation $x = \frac{1}{2}$.
5. Déterminer la borne inférieure de f .

I.3.65 Petites Mines 2016

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $g : x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente.

I.3.66 Mines 2016

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{t^2 + t^4} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Peut-on réduire son domaine d'étude ?
2. Montrer que f est de classe C^1 . Étudier ses variations.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Calculer un équivalent de f en $+\infty$.
4. Étudier la limite de f en 0^+ .

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est-elle définie ? Si oui, la calculer.

I.3.67 CCP 2016

1. Montrer l'existence de $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{4 - 3\sin^2(u)}} du$.

2. Calculer I .

I.3.68 Mines 2016

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Étudier ses limites aux bornes.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

I.3.69 CCP 2016

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2} dt$ est définie.
2. Montrer que :

$$\sin^5(t) = \frac{1}{16} (\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)).$$

3. Montrer que pour tout $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2} dt = -\frac{5}{16} \int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + \frac{10}{16} \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du.$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2} dt$.

I.3.70 ENSAM 2016

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Étudier la dérivabilité de f . En déduire $f'(x)$ puis $f(x)$.

I.3.71 Mines 2016

Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-a} dt$.

I.3.72 CCP 2016

Soit $f \in C([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0; +\infty[, |f(t)| \leq ce^{at}$.

On considère l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$.

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x > a$.

2. On suppose dans toute cette question que $a \leq 0$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$ et en déduire un équivalent de F en $+\infty$.

On suppose de plus que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = L$ et en déduire un équivalent de F en 0^+ .

I.3.73 X-ENS PSI 2017

1. Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ pour tout n entier naturel.

2. Montrer que $J = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

3. Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

et donner la valeur de J .

On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

I.3.74 Centrale PSI 2017

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} dt$

1. Démontrer que l'intégrale $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Étudier la parité de f .

3. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

4. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la calculer.

5. Développer f en série entière en précisant le domaine de validité de ce développement.

I.3.75 CCINP 2024

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2; +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?

I.3.76 TPE/EIVP 2012

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$.

I.3.77 Mines-Ponts 2012

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} P(t) dt = n^2 + 1.$$

I.3.78 Mines-Ponts 2012

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x+\dots+x^p)}{x} dx$.

I.3.79 X PC

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0$.

I.3.80 CCP 2017

Déterminer la nature des intégrales :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

I.3.81 CCP PSI 2021

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n} \sin\left(\frac{t}{\sqrt[3]{n}}\right)}{1+t^3} dt$$

est convergente.

2. Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$.

3. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ et en déduire la valeur du réel K .

I.3.82 CCP PSI

Calculer, si existence, $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$.

I.3.83 Centrale PSI

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{\sinh(t)}{t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

I.3.84 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

Montrer que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

I.3.85 CCP

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t\sqrt{t}} dt$.

1. Étudier le domaine de définition D_f de f .
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f . Expliciter $f'(x)$.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

I.3.86 ENSAM PSI

Soit deux fonctions $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(t)g(nt) dt = f(0) \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

I.3.87 TPE/EIVP PSI

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

I.3.88 X FUF 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx.$$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n^2}$.
3. Calculer J_n .
4. En déduire un équivalent simple de I_n .

I.3.89 X FUF 2024

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Montrer que $\int_0^x f(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{3}$.

I.3.90 Mines-Télécom 2022

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer l'existence de F .
2. Montrer que F est classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ (E).
4. Montrer que F est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

I.3.91 CCINP MP 2025

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Estimer I à 10^{-2} près. (On pourra développer I sous forme d'une série entière.)

I.3.92 CCINP PSI 2024

1. Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.
 - (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0; +\infty[$.
 - (b) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = xf(x-1)$.
2. Soit $V_n = \int_{n-1}^n \ln(f(u)) du$ et $\phi(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$.
 - (a) Montrer que ϕ est dérivable et calculer ϕ' .
 - (b) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\phi'(x) = \ln(x)$.
 - (c) En déduire la limite de ϕ en $+\infty$.
 - (d) En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{V_n}$.

I.3.93 Mines-Ponts PC 2024

Montrer la convergence des deux intégrales suivantes et les calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx.$$

I.3.94 Mines-Télécom MP 2024

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$.

I.3.95 Mines-Ponts MP 2024

Étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)} dx.$$

I.3.96 CCINP PC 2024

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge.

1. Soit $a \geq 1$. À l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer $\int_1^a \frac{\ln(t)}{t} dt$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t) dt.$$

En déduire que :

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt.$$

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$.

Étudier la nature de la série $\sum |v_n|$.

En déduire que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge.

4. (a) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge.

(b) En utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, prouver que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.

5. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2} \ln^2(n) + \ell + o(1).$$

I.3.97 CCINP MP 2022

Pour tout $t > 0$, on définit $f(t) = \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0; 1]$, puis sur $[1; +\infty[$.
2. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

I.3.98 CCINP MP 2022

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan(u)| \leq |u|$.
2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.
 - (a) Quel est le domaine de définition de F ?
 - (b) Quel est le domaine de continuité de F ?
 - (c) Quel est le domaine de dérivabilité de F ?
 - (d) Déterminer F' .
 - (e) En déduire F .

I.3.99 CCINP PC 2023

Trouver une primitive de

$$\begin{aligned} f :]0; 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2} \ln(1 - x^2) \end{aligned}$$

I.3.100 CCINP MP 2021

On pose, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^3 + t}} dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 .
2. Donner le tableau de variations de f .
3. Calculer la limite de f en 0^+ .
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f .

I.3.101 TPE/EIVP MP 2017

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \geq 0$, $f''(x) \geq a$. Montrer que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + |f(x)|} \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

I.3.102 X MP 2018

Montrer que, pour tout $a > 2$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax) (\cos(x))^{a-2} dx = 0.$$

I.3.103 TPE/EIVP MP 2016

Étudier l'existence de

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx.$$

I.3.104 Mines-Ponts PC 2024

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) dt < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) dt < +\infty$$

et que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) dt \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t) dt}. \quad (\text{Inégalité de Heisenberg})$$

I.3.105 CCINP MP 2024

On définit une suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de fonctions en posant :

$$\forall n \geq 2, \forall t \in]0; 1], \quad u_n(t) = \frac{t^{n-1} \ln(t)}{n}.$$

1. Calculer $\|u_n\|_\infty$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0; 1[$.
3. En déduire que $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

I.3.106 CCINP PC 2022

Soit $I = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$.

Montrer la convergence de I et calculer I .

I.3.107 Mines-Ponts MP 2024

Soit $r \in]-1; 1[$. Montrer l'existence de $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r^n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt.$$

I.3.108 Mines-Ponts MPI 2024

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $(f')^2$ soit intégrable.

Montrer que $t \mapsto \frac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

I.3.109 Mines-Ponts MP 2017

Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

I.3.110 CCINP PSI 2023

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sinh(t)} dt$.

1. Montrer que I converge.
2. Soit $t \in]0; +\infty[$. Vérifier que :

$$\frac{\sin(t)}{\sinh(t)} = 2e^{-t} \sin(t) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}.$$

3. Montrer que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

4. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} < I < 1 + \frac{\pi}{4}.$$

I.3.111 CCINP MP 2024

1. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Calculer $\int \frac{1}{au^2 + b} du$.
2. Soit t tel que $\cos(\frac{t}{2})$ ne s'annule pas. On pose $u = \tan(\frac{t}{2})$. Déterminer $\cos(t)$ en fonction de u .
3. On définit :

$$\begin{aligned} f :]1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \int_0^\pi \ln(x + \cos(t)) dt \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$, puis montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

I.3.112 Mines-Ponts MP 2019

Soit $\lambda > 0$. On pose $I_\lambda = \int_0^\pi \frac{1}{\lambda^2 + \cos^2(\theta)} d\theta$.

1. Calculer cette intégrale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n(\lambda) = \int_0^\pi \frac{e^\theta}{\lambda^2 + \cos^2(n\theta)} d\theta$.

Prouver que la suite $(u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

I.3.113 Mines-Télécom PC 2022

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^{\sqrt{x}} dx$. Sa valeur est notée I .
2. Montrer l'égalité :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{n+1}}.$$

I.3.114 Mines-Télécom MP 2023

Montrer que

$$\int_a^b \frac{1}{x^n + (1-x)^n} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \frac{2^n}{n}.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{n}\right)$.

I.3.115 Centrale-Supélec PC 2017

Montrer que

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer cette intégrale.

I.3.116 Mines-Télécom MP 2022

Étudier l'existence et la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2 t^2} dt.$$

I.3.117 Mines-Ponts MP 2016

1. Étudier la convergence de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos(t) - \sin(t))}{1+t^2} dt$.
2. Soit $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(\cos(t) - \sin(t))}{1+t^2} dt$.
 - (a) Donner le domaine de définition de F .
 - (b) Étudier la continuité de cette fonction.

I.3.118 Mines-Télécom MP 2023

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

I.3.119 CCINP PC 2022

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx.$$

1. Montrer que I et J existent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer I et J .

I.3.120 ENS MP 2019

Soit $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3) dx.$$

I.3.121 TPE/EIVP PC 2018

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

1. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $I = J$.
2. Calculer I .

Indication : on remarquera que $I = \frac{I+J}{2}$, et on utilisera le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$.

I.3.122 Mines-Ponts PSI 2017

Justifier la convergence et calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt.$$

I.3.123 CCINP PSI 2022

Soit $F(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

3. Montrer la relation :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x).$$

I.3.124 Mines-Ponts MP 2016

Soit P un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de $I = \int_0^{+\infty} \cos(P(x)) dx$.
2. Déterminer la nature de $J = \int_0^{+\infty} |\cos(P(x))| dx$.
3. Déterminer le signe de I pour $P = X^2$.

I.3.125 Mines-Télécom MP 2023

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$$

puis calculer sa valeur.

I.3.126 CCINP PSI 2024

Soit $b > 0$. Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt} dt.$$

1. La fonction I est-elle bien définie ? continue ?
2. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$:

$$I(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2} du, \quad I'(x) = \int_0^{+\infty} -2 \frac{e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}}{u^2} du.$$

4. Montrer, à l'aide d'un changement de variable judicieux, que :

$$\forall x > 0, \quad I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}} I(x).$$

5. En déduire l'expression de I .

I.3.127 CCINP MP 2024

Soit $k > 0$ et

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 t^k \sin(xt) dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que f vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f'(x) + (k+1) f(x) = \sin(x).$$

3. Déterminer le développement en série entière de $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x y'(x) + (k+1) y(x) = \sin(x)$. Donner ensuite le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction y .

I.3.128 Mines-Ponts MP 2024

Donner les deux premiers termes du développement asymptotique de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx.$$

I.3.129 CCINP PC 2022

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$$

selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe.

I.3.130 CCINP MP 2023

On pose :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad G(u) = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et exprimer $F'(x)$.
2. Montrer que $G^2(x) = -\frac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

I.3.131 Mines 2024

Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin(2x)} dx < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

I.3.132 CCP 2024

Soit $a \in]0; 1[$.

1. Montrer que l'intégrale $I(a) = \int_0^a \frac{x - \ln(1-x)}{x^2} dx$ converge.
2. Montrer que $I(a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x - \ln(1-x)}{x^2} dx$.

I.3.133 Mines 2022

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x+t)}{1+(xt)^3} dt$.

1. Montrer que f possède une limite en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

I.3.134 Mines 2023

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f(t)} dt.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [c; +\infty[$, $f(x) = (x-c)^2$.

I.3.135 Mines 2022

Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$.

1. Développer s en série de fractions rationnelles.
2. En déduire un équivalent de $s(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

I.3.136 CCP 2023

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2 + 1} dt$.

1. Justifier l'existence de I .
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \int_0^x \frac{t |\sin(t)|}{t^2 + 1} dt$. Montrer que :

$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u + k\pi) \sin(u)}{(u + k\pi)^2 + 1} du.$$

3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

I.3.137 Centrale 2023

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les intégrales suivantes convergent :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx.$$

2. (a) Donner le domaine de définition (réel) $\mathcal{D}$ de la *fonction gamma* Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x) > 0$.

- (b) Montrer que Γ est l'unique fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(1) = 1$;
- $f(x+1) = x f(x)$;
- $\ln \circ f$ est convexe.

I.3.138 Mines-Télécom MP 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^n}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Calculer I_n .

I.3.139 Mines-Ponts MP 2021

Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(t^x) dt$.

I.3.140 Mines-Télécom MP 2023

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x) - \tanh(2x)}{x} dx$$

et

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(x) - \tanh(tx)}{x} dx.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $[2; 3]$.

I.3.141 CCINP MP 2022

Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et donner Γ' .
3. Montrer que :

$$\forall x > 1, \forall \lambda \in]-1; 1[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - \lambda e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

I.3.142 Mines-Télécom MP 2018

Justifier l'existence de :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt.$$

Calculer cette intégrale.

I.3.143 Mines-Ponts MP 2021

Soit $f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

I.3.144 ENS MP 2019

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$.

I.3.145 Mines-Télécom MP 2018

Soit $f(x) = \int_0^1 t^{xt} dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer le développement en série entière de f en 0.

I.3.146 Mines-Ponts MP 2022

On note $f(x; y) = \int_0^1 \ln(t^x + t^y) dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. La fonction f admet-elle des extrema ?

I.3.147 Mines-Télécom MP 2023

On considère : $f : t \mapsto \int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1. Donner D_f .
2. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
3. Trouver une relation entre $f(t)$ et $f(t-2)$, en supposant que t et $t-2$ sont tous deux dans D_f .

I.3.148 Mines-Télécom PSI 2023

Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + x^2} dt.$$

Montrer que F est de classe C^1 .

I.3.149 Mines-Télécom MP 2025

On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}.$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

I.3.150 Mines-Télécom PSI 2018

Montrer que pour tout $a > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ka+1}.$$

I.3.151 CCINP MP 2013

Calculer :

$$I(a; b) = \int_0^\pi \ln \left(\frac{a - \cos(x)}{b - \cos(x)} \right) dx,$$

où $a, b \in]1; +\infty[$.

I.3.152 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \cos^2(\theta)) d\theta$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$.
3. Déterminer $f(x)$.

I.3.153 Mines-Ponts PC 2023

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$J_n : x \mapsto \int_0^\pi \cos(nt - x \sin(t)) \, dt.$$

1. Donner la parité de J_n en fonction de n .
2. Montrer que J_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \pi}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}.$$

4. Déterminer $p_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que J_n vérifie l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + xy' + p_n(x)y = 0.$$

I.3.154 Mines-Télécom MP 2023

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

En déduite que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt, \quad I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} \, dt.$$

2. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$.
4. Déterminer une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n .
5. En déduire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ et en déduire la valeur de I .

I.3.155 CCINP MP 2021

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} \, dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f .
3. Calculer f à l'aide de fonctions usuelles.

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

I.3.156 Mines-Ponts MP 2016

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n x^{-\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

I.3.157 ENSEA/ENSIIE MP 2022

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F .

I.3.158 CCINP PSI 2021

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ à l'aide d'une série.
Obtient-on la même série ?

I.3.159 Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on considère l'intégrale :

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^x (x^2 - t^2)^n e^t dt.$$

1. Montrer que J_n peut s'écrire :

$$J_n(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x},$$

où A_n et B_n sont des polynômes de degré au plus n .

2. Montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$.

I.3.160 Mines-Ponts MP 2021

1. Pour t réel, linéariser $\sin^5(t)$.
2. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t} dt.$$

I.3.161 Mines-Télécom 2019

On considère l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt.$$

Justifier son existence et la calculer.

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

I.3.162 Mines-Ponts MP 2018

On considère l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)| e^{-xt} dt.$$

1. Étudier l'existence de cette intégrale.
2. Si existence il y a, calculer cette intégrale.

I.3.163 X MP 2018

1. Calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
2. Montrer que $\int_0^n x^n e^{-x} dx < \frac{n!}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{n+1} x^n e^{-x} dx > \frac{n!}{2}$.

I.3.164 Mines-Télécom MP 2023

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

I.3.165 Mines-Télécom PC 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln(t)}{1-t^2} dt$.

1. Exprimer I_n comme somme d'une série.
2. Trouver un équivalent de I_n .

I.3.166 CCINP PSI 2017

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$\begin{aligned} f_n &:]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \end{aligned}$$

1. Montrer l'existence de $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$.

I.3.167 CCINP PSI 2021

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n)).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) \, dx = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

I.3.168 ENS PC 2025

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(2xt)x^{n-2} \, dx.$$

Donner un équivalent de $A_n(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

I.3.169 CCINP PC 2022

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan(\theta)) \, d\theta$.
 - (a) Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner la dérivée de f .
 (b) En posant $u = x \tan(\theta)$, montrer que :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x} \, du.$$

4. Montrer que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

I.3.170 CCINP PC 2018

Soit $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\sin(t)}{1+t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f y est de classe C^1 et préciser un équivalent en 0.

I.3.171 Mines-Ponts MP 2015

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sinh(x\sqrt{t}) dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner un développement en série entière de f .
3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

I.3.172 Mines-Ponts

1. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est intégrable, et $h : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée intégrable. On pose, pour $x \in [a; b]$, $H(x) = \int_a^x h(t) dt$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)h'(t) dt - [f(t)h(t)]_a^b = \int_a^b f''(t)H(t) dt - [f'(t)H(t)]_a^b.$$

2. On suppose que, pour tout $x \in [a; b]$, $|f''(x)| \leq M$. Montrer l'approximation par la méthode des trapèzes :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \right| \leq M \frac{(b-a)^3}{12}.$$

3. Que devient l'égalité de la question 1 s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\lim_{x \rightarrow c^-} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c^+} h(x)$ existent, mais sont différentes ?
4. On suppose de nouveau que, pour tout $x \in]a; b[$, $|f''(x)| \leq M$. Montrer l'approximation par la méthode du point milieu :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq M \frac{(b-a)^3}{24}.$$

I.3.173 Mines-Ponts

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose qu'il existe $a < 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$.

Montrer que les fonctions f et f' sont intégrables.

I.3.174 Mines-Télécom MP 2025

Soit $\theta \in]0; \pi[$. Calculer :

$$I(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos(x) \cos(\theta)} dx.$$

I.3.175 Mines

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose intégrable sur $[a; +\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors celle-ci est nécessairement nulle.
2. Montrer que si la fonction f est uniformément continue sur $[a; +\infty[$, alors f admet nécessairement une limite nulle en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente est-il vrai si l'on suppose que f est simplement continue ?

I.3.176 CCINP MP 2025

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, dt$. Calculer u_0 .
3. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis exprimer u_n à l'aide de factorielles.
4. Sur $[0; +\infty[$, on pose $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $0 \leq x \leq \sqrt{n}$ et 0 sinon. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

5. Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) \, dx = \sqrt{n} u_n$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.

I.3.177 Mines-Télécom MP 2025

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que le graphe de f admet un point de symétrie.
2. Justifier l'existence et calculer :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx.$$

I.3.178 Mines-Télécom MP 2018

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \, dt.$$

2. Calculer la somme de la série de terme général :

$$a_n = \frac{2^{2^n} (n-1)! n!}{(2n+1)!}.$$

I.3.179 Mines-Ponts PSI 2023

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une relation entre f et f' .
3. Sachant que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déterminer f et donner sa limite en $+\infty$.

I.3.180 Mines-Ponts MP 2023

Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable sur son intervalle de définition.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

I.3.181 X ESPCI 2017

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

2. Étudier la dérivabilité de I .

I.3.182 Mines-Télécom MP 2024

Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) dx$$

quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.3.183 Mines-Ponts MP 2024

Soit $f \in C([0; \pi], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\pi \cos(nt) f(t) dt = 0.$$

Que dire de f ?

I.3.184 ENS MP 2024

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(0) \neq 0$. Montrer que :

$$\forall r > 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|P(re^{i\theta})| d\theta = \ln|P(0)| + \sum_{\alpha \in I_r} \text{mult}_P(\alpha) \cdot \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$$

où $I_r = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0 \text{ et } |\alpha| < r\}$ et $\text{mult}_P(\alpha)$ est la *multiplicité* de α en tant que racine de P .

I.3.185 Mines-Ponts MP 2019

Montrer que $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto F(x) \exp(x^2)$, où F est une fraction rationnelle.

I.3.186 CCINP MP 2018

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0; +\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I(u) = \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) \, dx.$$

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\int_{a+u}^{b+u} f(t) \, dt$.
2. On prend ici f :

$$x \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } x < 1 \\ \frac{2\ell}{1+x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$.

3. On revient au cas général. Calculer $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$ si l'on suppose que $\ell = 0$.
4. Dédurre $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$ dans le cas où ℓ est quelconque.
5. Soit a' et b' deux nombres réels tels que $0 < a' < b'$. Trouver α et β tels que :

$$\frac{X}{(1+a'X)(1+b'X)} = \frac{\alpha}{1+a'X} + \frac{\beta}{1+b'X},$$

puis simplifier l'expression

$$\frac{e^x}{(1+a'e^x)(1+b'e^x)}.$$

6. Dédurre des questions précédentes :

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^{+\infty} \frac{e^x}{(1+a'e^x)(1+b'e^x)} \, dx.$$

I.3.187 Mines-Ponts MP 2021

Soit $(m; n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m(t)}{t^n} \, dt$.

I.3.188 Mines-Ponts PSI 2021

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et ℓ un nombre réel strictement positif. On suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f^2(t) \, dt = \ell.$$

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition de l'énoncé.
3. Calculer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

I.3.189 Centrale PC 2024

Soit

$$E = \left\{ u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} u^2(x) \, dx < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient dans E . Montrer que f' est aussi dans E .
3. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} (f'(x))^2 \, dx \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2 \, dx} \sqrt{\int_0^{+\infty} (f''(x))^2 \, dx}$$

et préciser le cas d'égalité en supposant $f(0) = 0$.

I.3.190 Mines-Télécom MP 2019

1. Décomposer $\frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$ en éléments simples.
2. Calculer $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)} \, dt$.

I.3.191 CCINP PSI 2023

Soit $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} \, du$.
3. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer que $I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$.

I.3.192 Mines-Ponts MPI 2023

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{1-xt+xt^2} \, dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer un développement en série entière de f avec les coefficients explicités.

I.3.193 CCINP PSI 2025

Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} \, dt$.

1. Montrer que $] -1 ; 1[\subset D_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0 ; 1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

I.3.194 CCINP MP 2023

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $[0; +\infty[$, de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer $F(0)$.
3. (a) Soit $\gamma = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$.

Montrer que F vérifie l'équation différentielle $y' - y = -\frac{\gamma}{\sqrt{x}}$.

(b) Montrer que $F(x) = \pi e^x - \gamma e^x \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$.

(c) En déduire la valeur de γ .

I.3.195 Mines-Télécom PSI 2019

Pour tout x réel, on pose :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que C et S sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Sont-elles continues ?
2. Montrer que S est dérivable. Exprimer $S'(x)$ au moyen de $C(x)$.
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

4. En déduire $S(x)$ et $C(x)$, exprimées au moyen d'une intégrale.

I.3.196 Centrale-Supélec MP

Soit

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Quelles sont les propriétés de f et g ?
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

I.3.197 Mines-Télécom MP 2017

1. Énoncer soigneusement le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. Démontrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

I.3.198 Mines-Télécom PC 2019

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour x dans $\mathbb{R}$:

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-pt} dt \quad \text{et} \quad J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-pt} dt.$$

1. Montrer que I_p et J_p sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que I_p est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p(x)$.
4. Exprimer $J_p(x)$ en fonction de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a , la série $\sum_{p \geq 1} J_p(a^p)$ converge-t-elle ?

I.3.199 Mines-Télécom PC 2019

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)e^{-x^2t} dt,$$

où g une fonction bornée, impaire et continue.

1. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ en fonction du réel α .
2. (a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Quelle est la parité de F ?
3. (a) Énoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
(b) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. On pose $g = \sin$.
(a) Calculer F .
(b) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

I.3.200 ENSEA/ENSIIE MP 2013

Montrer l'existence et calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \ln(\tan(x)) dx.$$

I.3.201 Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $x \in]0; \pi[$, soit

$$F(x) = \int_0^x \ln(\sin(x-t)) dt.$$

La fonction F est-elle intégrable sur $[0; \pi]$? Si oui, calculer l'intégrale.

I.3.202 Mines-Ponts MP 2016

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

I.3.203 Mines-Télécom MP 2017

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$.
2. Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$ et $K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt$ en fonction de I .
3. Déterminer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt$ en fonction de I, J, K . En déduire les valeurs de I, J, K, L .

I.3.204 Mines-Télécom MP 2017

Pour tout entier naturel n et tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, posons $f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{1-t^2}}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t) dt$ de deux manières :

1. Par convergence uniforme.
2. Avec le théorème de convergence dominée.

I.3.205 Mines-Ponts MP 2017

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \exp(f(t)) dt.$$

I.3.206 Mines-Ponts MP 2017

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx$ à l'aide d'une somme.

I.3.207 Mines-Ponts MP 2019

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, à valeurs strictement positives. Pour tout a réel positif, on pose :

$$I(a) = \int_0^1 f(t)^a dt.$$

1. Montrer que la fonction I est dérivable et préciser la valeur de $I'(0)$.
2. Trouver la limite de $I(a)^{\frac{1}{a}}$ quand a tend vers 0.

I.3.208 Mines-Ponts PC 2019

Soit f une fonction continue sur $[1; +\infty[$, à valeurs réelles, de carré intégrable. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x f(t) dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

I.3.209 Centrale PC 2017

Montrer que $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

I.3.210 Mines-Ponts PC 2018

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Donner la limite de f en $+\infty$.

I.3.211 Mines-Ponts MP 2018

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt.$$

1. Montrer que, si $f \in E$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que, si $f \in E$ et ne s'annule pas sur un intervalle I , alors il existe c tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{(x-c)^2}{4}.$$

3. Décrire E totalement.

I.3.212 X-ENS

Soit $f \in C^2[a; b], \mathbb{R}$). Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \|f''\|_\infty.$$

I.3.213 Mines-Télécom MP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx) - \cos(ny)}{\cos(x) - \cos(y)} dx \quad \text{avec } y \in]0; \pi[.$$

Donner la valeur de I_n .

Indication : on pourra chercher une relation de récurrence entre $I_n + I_{n+2}$ et I_{n+1} .

I.3.214 Centrale-Supélec MP 2021

On donne $c = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

1. Montrer l'existence de c .
2. Montrer que $c < 0$.

3. (a) Montrer que $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) \ln(t) dt$.

(b) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

I.3.215 Mines-Ponts MP 2021

On pose :

$$F : (x; y) \longmapsto \int_0^x \ln(x + y \cos(t)) \, dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F .
2. Calculer quand cela est possible la valeur de $F(x; x)$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intérieur de D_F .
4. Déterminer une expression de F sans intégrale.

I.3.216 CCINP MP 2023

Soit, pour n un entier naturel non nul :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} \, dt.$$

1. Montrer que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite à déterminer.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} . En déduire une deuxième façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

I.3.217 CCINP MP 2023

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}} \, dt.$$

Indication : poser $u = \sqrt{t}$.

2. Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$.
3. Montrer les inégalités suivantes :

$$2 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq R_n \leq 2 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

I.3.218 Mines-Ponts PC 2023

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite ℓ en $-\infty$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ existe. Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) \, dx$$

existe et déterminer sa valeur.

I.3.219 CCINP MP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit la fonction :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{2 \sinh(x)}{e^{nx} - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ telle que :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

est définie pour $n \geq 2$.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad I_n = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sinh(x) e^{-knx} dx.$$

3. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

I.3.220 Mines-Ponts MP 2017

Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t \cos(x) + t^2)}{t} dt$.

- Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- Calculer $F'(x)$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

I.3.221 Mines-Ponts MP 2013

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

I.3.222 Mines-Ponts MP 2017

On définit f par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t \cosh(t)} dt.$$

- Donner le domaine de définition de f . Montrer que f est C^∞ .
- Montrer que $f(x) \sim -\ln(1 - x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.

I.3.223 ENS

Soit

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ à coefficients entiers vérifiant :

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{2n+1}} (P_n(x) \cos(x) + Q_n(x) \sin(x)).$$

2. En déduire que $\frac{\pi}{2}$ est irrationnel.

I.3.224 Centrale-Supélec PSI 2013

On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x + \sin^2(t)} dt \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bien définie. Étudier sa monotonie.
2. Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0.
(On pourra faire le changement de variable $u = \tan(t)$.)

I.3.225 Centrale-Supélec PSI 2013

Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(x) = f(x + 2\pi)\}$. On pose sur E :

$$\|f\| = \sup\{|f(u)| \mid u \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G(f) : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt.$$

1. Montrer que G est un endomorphisme.
2. (a) Montrer que G est C^1 .
(b) Donner une équation différentielle vérifiée par G .
3. La fonction G est-elle
(a) injective ?
(b) surjective ?
4. Résoudre $G(f) = \lambda f$, d'inconnu $(f; \lambda) \in E \times \mathbb{C}$.

I.3.226 X MP 2017

On note $P_n = \frac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n)$.

Montrer que pour $n \neq m$, $\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = 0$.

I.3.227 CCINP PC 2019

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n} dt.$$

I.3.228 X-ENS

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$.

I.3.229 Mines-Ponts MP 2021

Soit f la fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+ix)}}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle et déterminer f .

I.3.230 Mines-Ponts MP 2021

Soit $a > 0$. On note :

$$\begin{aligned} f_a :]-a; a[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{aligned}$$

Calculer $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a f_a(x) dx$.

I.3.231 Mines-Ponts MP 2021

$$1. \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt.$$

2. Soit

$$\begin{aligned} F :]1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt \end{aligned}$$

Montrer que F est injective.

I.3.232 CCINP PSI 2021

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f .
2. La fonction f est-elle continue sur D_f ?
3. Montrer que si $x \in D_f$, alors $1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f .

I.3.233 Mines-Ponts MP 2022

1. Montrer la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt.$$

2. À l'aide d'une intégrale à paramètres, calculer I .

I.3.234 Mines-Télécom MP 2018

On note $I = \int_0^1 t^3 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$.

Étudier l'existence et la valeur de I .

I.3.235 Mines-Ponts MP 2025

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit b une fonction continue par morceaux de période 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{[0;\alpha]}(x) \, dx.$$

Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = \alpha \int_0^1 b(y) \, dy.$$

I.3.236 CCINP MP 2023

1. Soit $M > 0$ et $u : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|u(x)| \leq M$. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{u'(t)}{t} \, dt$ converge.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ et $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) \, dt$ convergent.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \sin(t^3) \, dt$ converge.

I.3.237 CCINP 2023

On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$.

1. Étudier l'existence et la valeur de I .
2. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Trouver des réels α et β tels que :

$$\frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2} + \frac{\beta}{a^2+t^2}.$$

3. Calculer $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)(a^2+t^2)} \, dt$.
4. Rappeler le théorème de la convergence dominée.

L'utiliser pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2} \, dt$.

I.3.238 Centrale-Supélec MP 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(x)^{2n+2}} \, dx.$$

1. Montrer que I_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

Calculer I_0 .

3. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}}$.

I.3.239 CCINP MP 2018

Pour $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit :

$$\begin{aligned} f &:]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{|\ln(x)|^\beta}{(1-x)^\alpha} \end{aligned}$$

1. (a) Trouver un équivalent en 0 et en 1 de f .
 (b) Déterminer les valeurs de α et β telles que f se prolonge par continuité à l'intervalle $[0; 1]$.
 (c) Déterminer les valeurs de α et β telles que f soit intégrable sur $]0; 1[$.
2. Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$. Montrer que I existe puis calculer I .

I.3.240 Mines-Ponts MP 2019

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 . Montrer que :

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f(0)^2 \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \|f'\| \int_0^1 f(x) dx,$$

où $\|f'\|$ désigne la norme infinie de f' sur $[0; 1]$.

I.3.241 Mines-Ponts MP 2016

Étudier l'existence et la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^\alpha(x)} dx,$$

où $\alpha > 0$ est donné.

I.3.242 Mines-Ponts MP 2016

Soit $f \in C^1([a; b], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in [a; b], \quad f'(t) \in [0; 1] \text{ et } f(a) = 0.$$

Montrer que $f^2(x) \leq 2 \int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in [a; b]$.

I.3.243 Centrale-Supélec PC 2016

On considère l'intégrale $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Étudier f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f .

I.3.244 Centrale-Supélec MP 2016

Donner un résultat du cours relatif aux sommes de Riemann. Donner une démonstration de ce résultat dans le cas où f est de classe C^1 .

I.3.245 ENSEA/ENSIIE PSI 2015

Soit n un entier naturel. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_a^b t^p f(t) dt = 0$.

Montrer que f possède au moins $n + 1$ racines entre a et b .

I.3.246 Mines-Ponts MP 2015

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x)) dx = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

I.3.247 CCINP MP 2019

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2}$ sur $]0; 1]$.

2. On pose $u_n(x) = x^{2n}(\ln(x))^2$ pour n entier et $x \in]0; 1]$.

Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0; 1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x) dx$.

3. Déterminer une expression de $I = \int_0^1 \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2} dx$ sous forme de somme.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

I.3.248 CCINP MP 2015

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F .

2. Calculer $F(1)$.

3. Calculer $F(x)$ pour tout x .

I.3.249 X MP 2017

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ une fonction intégrable. On suppose que $\ln \circ f$ est concave.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f croît sur $] -\infty; x_0[$ et décroît sur $]x_0; +\infty[$.

2. Montrer que :

$$\exists c, k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq k e^{-c|x|}.$$

3. On considère $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ intégrable telle qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que g croît sur $] -\infty; x_1[$ et décroît sur $]x_1; +\infty[$.

On définit :

$$f * g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

produit de convolution de f et g .

Montrer qu'il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que h croît sur $] -\infty; x_2[$ et décroît sur $]x_2; +\infty[$.

I.3.250 Mines-Ponts MP 2013

Soit $b > a > 0$ et $f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos(u)}{u^3} du$.
 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

I.3.251 ENSEA/ENSIIE PSI 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et que :

$$0 \leq I_n \leq (\ln(2))^n.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)I_n.$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{I_n}{n!}$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$.

I.3.252 Mines-Ponts PSI 2017

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y} dy.$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$.
3. La fonction f est-elle dérivable ?

I.3.253 Mines-Télécom PSI 2018

1. Justifier que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan(t))^2}$$

est intégrable sur $[0; 1[$.

2. En déduire un équivalent simple de

$$\Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{(\arctan(t))^2} dt \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0^+.$$

I.3.254 Mines-Télécom PSI 2017

Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

2. Montrer que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

I.3.255 Centrale-Supélec PSI 2015

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) + F(x).$$

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer quand est-ce que F admet une limite finie en $+\infty$?
2. On suppose que F admet une limite finie en $+\infty$. La fonction f admet-elle forcément une limite finie en $+\infty$?
3. On suppose que g admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet alors forcément une limite finie en $+\infty$. Déterminer cette limite.

I.3.256 Mines-Ponts PSI 2015

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \geq 0$ tel que $f(a_n) = \frac{1}{n+1}$.

I.3.257 Mines-Ponts MP 2021

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

I.3.258 TPE/EIVP PSI 2015

Soit $a > 0$, f continue sur $[1; +\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On s'intéresse à la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a :

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt.$$

2. En déduire la convergence de l'intégrale recherchée et expliciter sa limite en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$.

I.3.259 Centrale-Supélec PC 2015

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \int_k^{k+1} P(t) \, dt = k + 1.$$

I.3.260 Mines-Ponts MP 2016

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) \, dt.$$

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \int_0^x \sin(t^2) \, dt$ a une limite en $+\infty$.

I.3.261 Mines-Ponts MP 2019

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} \, dt.$$

I.3.262 Mines-Ponts MP 2014

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(\cos(t))} \, dt.$$

I.3.263 Mines-Ponts MP 2014

Soit $\varphi(t) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^t} \, dx$.

1. Donner le domaine de définition de φ et montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$.
2. Donner un équivalent de φ en $+\infty$.

I.3.264 Centrale-Supélec MP 2014

1. Montrer que

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) \, dt$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que F est monotone.
3. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

I.3.265 X MP 2017

1. Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_0^1 f(t) t^k dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $[0; 1]$.

2. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique. On suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0 = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

Montrer que f s'annule au moins $2n$ fois.

I.3.266 Mines-Télécom MP 2017

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

I.3.267 CCINP MP 2018

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

- On suppose $1 < \alpha < 3$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On suppose $\alpha \leq 1$. En utilisant les nombres

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt,$$

montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.3.268 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, bornée et intégrable.

- Justifier l'existence de $u_n = \int_0^{+\infty} f^n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Discuter la convergence de $\sum u_n$ en fonction de $\|f\|_\infty$.

I.3.269 CCINP PC 2025

Calculer :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{3a} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

I.3.270 CCINP PC 2021

Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) \cos^n(t) dt.$$

1. Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?
2. (a) Calculer $J_n(1)$.
 (b) Soit x tel que $-1 < x \leq 1$. Montrer que $J_n(x) \geq J_n(1)$. En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$ quand $-1 < x \leq 1$.
 (c) i. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction

$$f : t \mapsto \ln(\sin(t)) \sin^b(t) \cos^n(t)$$

est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

ii. Montrer que J_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (d) Soit $g_x(t) = \frac{\sin^x(t)}{1 - \cos(t)}$ où $x > 1$.

Montrer que g_x est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(t) dt$.

- (e) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$.

I.3.271 Mines-Ponts 2012

Montrer que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)} dt$$

est définie sur $\mathbb{R}_+$. Y est-elle continue ? intégrable ?

I.3.272 Mines-Ponts MP 2017

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

1. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que :

$$xf'(x) - f(x) + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = 0.$$

I.3.273 Mines-Ponts PSI 2021

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f(x) dx$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx.$$

2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

I.3.274 Mines-Ponts PSI 2018

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de F, F' et F'' en $+\infty$.
3. Calculer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

I.3.275 Centrale-Supélec PSI 2018

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \frac{k\pi}{n}$.
(a) Montrer que :

$$(x+1) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 2x \cos(a_k) + x^2) = (x-1)(x^{2n} - 1).$$

- (b) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.
3. Calculer $f(1)$.

I.3.276 CCINP MP 2022

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ converge.
2. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(t)}{t + \cos(t)} dt$ converge.

I.3.277 Centrale-Supélec 2012

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + |x - n|}.$$

2. Étudier l'existence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x) dx$.
3. Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de carré intégrable.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x) dx = 0$.

On prendra soin de justifier l'existence des intégrales mises en jeu.

I.3.278 Mines-Ponts MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n$ des nombres réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, \quad \int_{x_i}^{y_i} P(t) dt = 0 \implies P = 0.$$

2. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, \quad \int_{x_i}^{y_i} P(t) dt = 0.$$

I.3.279 Centrale-Supélec PC 2023

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-x-3} dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et donner ses variations.
4. Déterminer la limite de f en -1 .
5. Exprimer la fonction f .

I.3.280 Mines-Ponts MP 2018

Soit

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x; t) dt$$

avec $u, v \in C([a; b], \mathbb{R})$ et $f \in C([a; b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La fonction F est-elle continue sur $[a; b]$?

I.3.281 Mines-Télécom PSI 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \frac{x^{2n+1} \ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est intégrable sur $]0; 1[$.

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

I.3.282 CCINP PC 2024

On pose $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer après prolongement par continuité en 0 que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p(t)}{t^2} dt$, où $p \in \mathbb{N}$.

Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_p converge-t-elle ?

3. (a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t).$$

(b) Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

On suppose désormais que $p = 3$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit U et V des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $U(a) = V(a)$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt = 0.$$

5. Dédurre des questions précédentes la valeur de I_p .

I.3.283 X MP

Soit $(m; n) \in \mathbb{N}^2$. Après avoir justifié son existence, calculer l'intégrale suivante :

$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((2m+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

I.3.284 Mines-Ponts MP 2021

Soit

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2} dt.$$

Calculer f .

I.3.285 Mines-Ponts MP 2018

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Soit B la boule fermée de centre O et de rayon 1 pour cette norme. Soit enfin $f \in E$. Montrer que :

$$\sup_{g \in B} \int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt.$$

I.3.286 ENSEA/ENSIIE PSI 2018

Soit la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier le caractère C^1 de f et déterminer f' .
3. En déduire une expression simple de f .

I.3.287 Mines-Ponts PSI 2021

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right) dt$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par deux changements de variables.

I.3.288 Mines-Ponts MP 2022

Selon la valeur du paramètre réel p , discuter la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^p - 1}{t^2 \ln(t)} dt.$$

Calculer sa valeur en cas de convergence.

I.3.289 Mines-Ponts MP 2017

On définit $R : h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto R(h)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $R(h)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x \sin(t)) dt$
et $S : g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto S(g)$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$, $S(g)(x) = g'(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x \sin(t)) dt$.

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. Trouver une relation entre W_{n+2} et W_n .
3. Soit P un polynôme. Montrer que $(S \circ R)(P) = P$.
4. Montrer que pour tout $g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $(S \circ R)(g) = g$.

I.3.290 Mines-Ponts MP 2025

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g la fonction définie pour tout $x > 0$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y) dy.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. On suppose que f a une limite en $+\infty$. Déterminer celle de g .

I.3.291 Mines-Ponts PSI 2023

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\omega = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{\omega t} dt$.

1. Calculer I_n pour tout entier naturel n .
2. En déduire une expression de la fonction $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^k g(t) dt = 0.$$

3. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels tels que $a < b$ et $f \in C([a; b], \mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

En admettant le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a; b], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

montrer que $f = 0$.

I.3.292 ENS MP 2014

Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positives, continues et 2π -périodiques. On suppose de plus que, pour tout naturel n :

- $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_n(x) dx = 1$;
- $\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} \rho_n(x) dx = 0$.

Soit alors f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π -périodique. On pose, pour tout entier naturel n :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \rho_n(t) dt.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0.$$

I.3.293 Mines-Ponts PSI 2024

Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. Est-ce cohérent avec les théorèmes du cours ?

I.3.294 Mines-Télécom MP 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

On admet que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.3.295 CCINP PSI 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{1}{\cosh^n(x)}$.

1. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[0; +\infty[$.
2. Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^n(x)} dx$.
Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer la nature des séries de terme général $(-1)^n I_n$ et I_n .
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$?

I.3.296 Mines-Ponts MP 2019

On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de I .
2. Déterminer un équivalent de I en $+\infty$.

I.3.297 Centrale

Pour tout $x \in]0; 1[$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx.$$

I.3.298 Mines-Télécom MP 2016

Soit $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Pour $x \in]0; 1[$, calculer $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 + x^2}} du$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

3. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 + x^2}} du \sim -\ln(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

4. Montrer que $f(x) \sim -\ln(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

I.3.299 X ESPCI 2015

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$. Soit $a > 0$.

Montrer que $x \mapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et que leur intégrale sont égales.

I.3.300 CCINP PC 2014

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .

2. Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. En déduire $F\left(\frac{3}{2}\right)$.

I.3.301 X ESPCI 2013

Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ en 0, en 1 et en $+\infty$.

I.3.302 ENSEA/ENSIIE PSI 2021

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in [0; 1] \mapsto n^2 x e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.

I.3.303 Mines-Télécom MP 2022

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

I.3.304 CCINP PSI 2025

On pose :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $]0; +\infty[$.
Déterminer f' .

2. (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = e^{-x} \ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

- (c) Montrer que f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

I.3.305 TPE/EIVP MP 2012

Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. La fonction g est-elle bornée ?
2. La fonction g est-elle décomposable en série entière ?
3. Montrer que $\int_0^1 g(x) dx = \frac{\pi^2}{12}$.

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Soit $W_n = n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

I.3.306 ENS MP 2019

Calculer $\int_0^1 x^x dx$.

I.3.307 ENSEA/ENSIIE PSI 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{(x \ln(x))^n}{n!}.$$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement et exprimer sa somme.
2. Montrer que f_n est intégrable sur $]0; 1]$ et calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$.
3. Montrer l'intégrabilité de $x \mapsto x^x$ sur $]0; 1]$.

I.3.308 CCINP PSI 2023

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

2. (a) Montrer que I converge.

(b) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x} \, dx$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.

(c) On introduit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \, dx$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.

(e) En déduire la valeur de I .

I.3.309 X MP 2019

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{i(x \cos(\theta) + n\theta)} \, d\theta.$$

- Montrer que les J_n sont à valeurs réelles.
- Montrer que les J_n sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de leur développement.

I.3.310 ENS PC 2024

Soit $f : [0; 1] \rightarrow]0; +\infty[$ une fonction intégrable telle que $f(x)f(1-x) = 1$ pour tout $x \in [0; 1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) \, dx \geq 1.$$

I.3.311 X ESPCI 2017

Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \geq 0, \quad c \int_0^x f^2(t) \, dt \leq \left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2.$$

I.3.312 Mines-Ponts PC 2025

On donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

1. Justifier l'existence de :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2} dt.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}.$$

4. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

I.3.313 X ENS PC 2025

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy.$$

- Montrer que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Montrer que $|f^{(k)}(x)| \leq k!$
- Quels sont les couples $(x; k)$ tels que $|f^{(k)}(x)| = k!$?
- Déterminer une formule explicite pour $f^{(k)}(x)$.
On pourra utiliser l'égalité $\cos(xy) = \operatorname{Re}(e^{ixy})$.
- En déduire que :

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

I.3.314 ENS PC 2025

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que :

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right)^4 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right).$$

I.3.315 Mines-Ponts MP 2021

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une fonction continue $f : [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction continue b -périodique $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose :

$$\omega(f; t) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq t\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^b f(x)g(nx) \, dx = \frac{1}{b} \int_0^b f(x) \, dx \int_0^b g(x) \, dx + \epsilon_n(f; g),$$

où $\epsilon_n(f; g)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + 3 \cos^2(nx)} \, dx$.

I.3.316 ENS PC 2025

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [0; 1]$. On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) = \int_0^1 |y - x| f(x) \, dx.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g''(y) = 2f(y)$. À quelle condition a-t-on g bornée ?

I.3.317 ENS PC 2025

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \cos(ty) \, dt$$

admet une limite finie que $R \rightarrow +\infty$ pour $y > 0$. On note $f_\infty(y)$ cette limite. Déterminer un équivalent de $f_\infty(y)$ quand $y \rightarrow 0$.

I.3.318 ENS PC 2025

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a < b$ tels que $f'(x) \geq 1$ pour tout $x \in [a; b]$.

1. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx \geq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

2. Existe-t-il une fonction pour laquelle on a l'égalité ?
3. Montrer qu'il existe une suite de telles fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \, dx$$

quand n tend vers $+\infty$.

I.3.319 ENS PC 2025

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

I.3.320 ENS PC 2025

Soit $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$. On définit la fonction suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\varphi(x)\varphi(ax)} dx.$$

1. Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que

$$\frac{f(a)}{\ln(a)}$$

est bornée pour $a \in]0; \frac{1}{2}]$.

3. Que dire de $f(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

I.3.321 ENS PC 2025

Soit $a < b$ deux nombres réels.

1. Montrer que pour toute fonction $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi''(x) > 0$ et $|\varphi'(x)| \geq 1$, pour tout $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

2. Montrer que pour tout fonction $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi''(x) \geq 1$ et pour tout $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

I.3.322 ENS PC 2025

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand $t \rightarrow +\infty$ de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt)x^{n-2} dx.$$

I.3.323 ENS PC 2025

On définit l'espace suivant :

$$\mathcal{W}_2 = \{f \in C^\infty([1; +\infty[) \mid \forall j \in \mathbb{N}, \|x^{2+j}f^{(j)}\|_\infty < +\infty\}.$$

Pour $f \in \mathcal{W}_2$, on pose :

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt.$$

Montrer que $g \in \mathcal{W}_2$.

I.3.324 PT 2022

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)} dt.$$

I.3.325 ENS PC 2025

Pour $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ continue, on définit :

$$F(g)(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} g(x+t) dx.$$

1. Montrer que $F(g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est continue, bornée et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(g))(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx.$$

2. Montrer que $F(g)$ est dérivable deux fois et calculer sa dérivée seconde.

I.3.326 X MP

Soit $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1], F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\int_0^1 F^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 f^2(x) dx.$$

I.3.327 ENS PSI 2024

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que h se prolonge continûment en 0.
2. Montrer que h est de carré intégrable et que :

$$\int_0^{+\infty} h^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt.$$

3. Étudier le cas d'égalité.
4. Montrer que cette inégalité est optimale.

I.3.328 Mines 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, de limite nulle, à valeurs strictement positives. On considère :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{Card}(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq x\}) \end{aligned}$$

Étudier l'intégrabilité de N sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale si elle existe.

I.3.329 PT 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+10} dt.$$

1. Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
2. Trouver une relation liant I_n et I_{n+1} .
3. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.3.330 C.C.E. Mines PC 2015

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2 \ln(t)}} dt = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

en posant $x = \sqrt{-\ln(t)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Justifier le changement de variable $x = (\cos(t))^n$ dans l'intégrale

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt.$$

3. Montrer que la suite de fonctions de terme général

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n \left(t^{-\frac{2}{n}} - 1 \right)}}$$

converge simplement vers la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-2 \ln(t)}},$$

et en déduire, grâce au théorème de la convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.3.331 X 2023

Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2x} dt.$$

I.3.332 C.C.E. Mines PSI

On considère :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2} dt.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$.

I.3.333 C.C.E. Mines PSI

On considère :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + \cosh(t)} dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 .
3. Montrer l'existence et déterminer la limite de f en $+\infty$.

I.3.334 C.C.E. Mines PC 2015

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2}.$$

I.3.335 C.C.E. Mines PSI 2014

Soit

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + a^4 x^2}} dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + a^4 x^2}} dx.$$

I.3.336 X MP 2025

Soit

$$I(x) = \int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt.$$

Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $I(x)$.

I.3.337 PT 2019

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, on a $\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est π -périodique.
3. Montrer que f est constante et déterminer sa valeur.

I.3.338 PT 2018

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)} dx.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

3. Calculer la valeur de l'intégrale I .

I.3.339 Mines-Télécom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \arctan(t + t^n) dt.$$

1. Montrer que pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq a \leq b$, on a :

$$\arctan(b) - \arctan(a) \leq b - a.$$

2. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.3.340 Mines-Télécom 2022

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1+x} e^{-ax}}{x^2} dx$$

converge-t-elle ?

I.3.341 X-ENS Cachan PSI

Montrer l'égalité pour tout réel x :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

I.3.342 ENSEA/ENSIIE MP 2024

L'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \sqrt{x}} dx$$

est-elle définie ?

I.3.343 Mines-Ponts MP 2013

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$I_n = \int_0^1 \ln \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cos(nx) \, dx.$$

Justifier l'existence de cette intégrale, la calculer et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

I.3.344 X MP 2008

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + x^4} \, dx.$$

I.3.345 X MP 2008

Justifier l'existence puis calculer la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \, dx,$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

I.3.346 Centrale-Supélec MP 2015

On note E l'ensemble des fonctions continues de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

Pour $f \in E$, $a > 0$ et $x > 0$, on note

$$h(t) = \int_0^t f(u)e^{-xu} \, du \quad \text{et} \quad L(f) : t \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, dt.$$

2. Montrer que L est une application linéaire de E dans l'ensemble des fonctions continues de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$L(f)(x + a) = a \int_0^{+\infty} h(t)e^{-xt} \, dt.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 u^n h \left(\frac{-\ln(u)}{a} \right) \, du$$

existe.

3. Montrer que L est injective.

I.3.347 CCP PC 2016

On pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est impaire et croissante.
3. Montrer que F possède une limite finie en $+\infty$.
4. Montrer l'existence d'une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant l'identité :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4^n} x^{4n+1}.$$

5. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité :

$$F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1).$$

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0; 1]$, prouver la majoration suivante :

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k a_k}{4^k} x^{4k+1} \right| \leq \frac{1}{4p+5}.$$

I.3.348 X ESPCI 2016

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0; +\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il est possible de poser

$$A_n = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt.$$

2. Trouver un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$, dans le cas $f(0) \neq 0$.

I.3.349 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit la fonction :

$$x \mapsto \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha \ln(x)} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Étudier l'intégrabilité de cette fonction sur $]1; +\infty[$ en fonction des valeurs de α et β .

I.3.350 CCINP TSI 2025

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha (e^{\beta x} - 1) dx$$

en fonction des paramètres réels α et β .

I.3.351 Mines-Télécom MP 2025

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

I.3.352 Mines-Télécom MP 2025

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Justifier que f est développable en série entière.
2. Exprimer f au moyen d'un produit de Cauchy.
3. Donner le développement en série entière de f .

I.3.353 CCINP MP 2026

On définit :

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(\ln(t))^2} dt.$$

1. Donner le domaine de définition D_Φ de Φ .
2. Montrer que Φ est dérivable sur D_Φ .
3. Montrer que Φ est solution de l'équation différentielle $2y' - xy = 0$.
4. Donner une expression simplifiée de $\Phi(x)$.

I.3.354 Mines-Télécom MP 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + n^4 t^3} dt.$$

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

I.3.355 Navale MP 2025

Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) dt$$

est strictement positive.

I.3.356 Mines-Télécom MP 2025

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t} dt = \arctan(x).$$

I.3.357 Centrale-Supélec TSI 2026

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx.$$

Calculer I_0 . Justifier, sans calculer la limite, que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales pour en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.3.358 CCINP PSI 2026

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+2e^t)^{n+1}} dt.$$

Justifier que cette intégrale est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(n+1)I_{n+1} = nI_n + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.3.359 ENSEA/ENSIIE PSI 2026

Soit $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

On précisera le coefficient dominant de P_n .

2. Soit $(m; n) \in \mathbb{N}^2$.

On pose :

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)e^{-x^2} dx.$$

Vérifier que $I_{m,n}$ existe puis la calculer sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

I.3.360 CCINP MP 2026

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt.$$

1. Justifier que f est définie en $x = 1$ et calculer $f(1)$.
2. Déterminer D_f .
3. Justifier que f est continue et décroissante sur D_f .
4. Pour $x \in D_f$, calculer $(x+1)f(x)f(x+1)$.

I.3.361 Mines-Télécom PT 2026

Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Montrer que $f_\alpha : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

I.3.362 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1. Étudier la parité de f .
2. Montrer que f est développable en série entière.
3. Trouver une équation différentielle dont f est solution. En déduire le développement en série entière de f .

I.3.363 Oral ENS PC 2024

1. On suppose que $e = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$q \int_0^1 x^n e^x dx \in \mathbb{N}^*.$$

(b) En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

2. Adapter la preuve précédente pour montrer que $e^2 \notin \mathbb{Q}$.

I.3.364 Mines-Télécom MP 2026

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer f' sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que f' est prolongeable par continuité en 0.
5. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.3.365 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt \quad \text{et} \quad S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt.$$

1. Donner le domaine de définition de C et celui de S .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de C et de S .
3. Calculer $C(x)$ et $S(x)$.

I.3.366 Mines-Télécom MP 2026

On pose $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ avec $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum w_n x^n$.
On note f la somme de cette série.
2. Est-ce qu'il y a convergence lorsque $x = R$ ou $x = -R$?
3. Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$:

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos(t)x} dt.$$

I.3.367 Mines-Télécom PSI 2026

On considère l'espace E des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que les applications $x \mapsto f(x)^2$ et $x \mapsto x^2 f(x)^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour toute fonction $f \in E$, on note :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx.$$

1. Pour tout $\lambda > 0$, justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$J(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} dx.$$

2. Montrer que $f \in E$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et établir, pour tout $\lambda > 0$, la majoration :

$$\left(\int_0^{+\infty} |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{I_0}{\lambda} + \lambda I_2 \right).$$

3. En déduire l'*inégalité de Carlson* pour $f \in E$:

$$\left(\int_0^{+\infty} |f(x)| dx \right)^4 \leq \pi^2 I_0 I_2.$$

I.3.368 Centrale-Supélec TSI 2026

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. On pose, de plus :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que I et J convergent.
2. Comparer I et J .
3. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^n)(1+t^2)} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^n)(1+t^2)} dt.$$

I.3.369 Mines-Ponts MP 2024

Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$$

existe et calculer sa valeur.

I.3.370 Mines-Télécom PSI 2026

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle. On pose $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t - z}.$$

1. (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction f .
(b) La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

2. Pour tout $A > 0$, on pose $I(A) = \int_{-A}^A f(t) dt$.

Justifier que $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = i\pi \operatorname{sgn}(b)$, où $\operatorname{sgn}(b)$ désigne le signe de b .

3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On pose $f_n(t) = \frac{1}{(t - z)^n}$.

(a) Justifier que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) À l'aide d'une primitive de f_n , calculer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$.

I.3.371 PT 2026

On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer les variations de F sur cet intervalle. Montrer que F se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. On donnera la limite de F en 0 à droite.

I.3.372 Mines-Télécom MP 2026

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer :

$$I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt.$$

I.3.373 Mines-Télécom 2016

Montrer que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$$

existe et calculer sa valeur.

I.3.374 PT 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt.$$

1. Montrer avec une intégration par parties que $I_n = \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_t : x \mapsto \cos(x \sin(t))$ est développable en série entière et indiquer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
3. En déduire le développement en série entière de $F : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$.

I.3.375 Mines MP 2025

Décrire l'ensemble des valeurs prises par

$$A(f) = \frac{1}{\|f\|_1} \int_0^1 f(t) e^t dt$$

pour $f \in C([0; 1], \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$.

I.3.376 CCINP PSI 2026

Soit

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1 + n^4 x^3} dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$I_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} J_n, \quad \text{où} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} \sin\left(t n^{-\frac{1}{3}}\right)}{1 + t^3} dt.$$

3. Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^3} dt$.

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Montrer, à l'aide d'un changement de variable astucieux, que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^3} dt.$$

5. Montrer que :

$$2K = \int_0^{+\infty} \frac{1 + t}{1 + t^3} dt = \frac{4\pi}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

6. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} I_n$.

I.3.377 Mines-Ponts MP 2026

Étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x + \sin(x)}} dx.$$

I.3.378 Mines-Télécom MP 2026

On considère :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{t+1} dt.$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité et la monotonie de f .
3. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) + f(x+1) = x^{-1}$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

I.3.379 Mines-Ponts PSI 2026

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa continuité.
2. Déterminer une expression de $f(x)$ sans intégrale.

I.3.380 CCINP PSI 2026

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

$$5. \text{ Montrer que } f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

6. Déterminer f .

7. Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Exprimer I en fonction de $f(0)$.

8. Donner la valeur de I .

I.3.381 X 2013

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^x (1 + \sin(2t))^{\frac{1}{t}} dt \right).$$

I.3.382 ENS MP 2022

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et 1-périodique. On suppose que f est intégrable sur $]0; 1[$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\theta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = 0.$$

On commencera par donner un sens à cette intégrale.

I.3.383 ENS 2022

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_{-2}^2 x^k \sqrt{4 - x^2} dx$$

est un multiple de π .

I.3.384 CCINP PSI 2026

On définit :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)^2 \ln(1 - t^2)}{t^2} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I converge.

2. Développer l'application

$$t \mapsto \ln(1 - t^2)$$

en série entière, en précisant l'intervalle de convergence.

3. Soit $n \geq 1$ et $t \in]0; 1[$. On définit :

$$f_n(t) = -\frac{2}{n} t^{2n-2} \ln(t).$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{2}{n(2n+1)^2}.$$

4. Décomposer

$$\frac{2}{n(2n+1)^2}$$

en éléments simples.

5. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

6. On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Calculer I .

I.3.385 ENS 2016

Si $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-intégrale* qui est la fonction $I_{\frac{1}{2}}f$ définie par :

$$I_{\frac{1}{2}}f(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I_{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Si $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-dérivée* qui est la fonction $D_{\frac{1}{2}}f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad D_{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{d}{dx} \left(I_{\frac{1}{2}}f(x) \right).$$

1. Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Vérifier que $I_{\frac{1}{2}}f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$I_{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} dt.$$

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que $D_{\frac{1}{2}}$ est bien définie et que, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$D_{\frac{1}{2}}f(x) = I_{\frac{1}{2}}(f')(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{x}}.$$

3. Pour $f : x \mapsto x^n$, calculer $I_{\frac{1}{2}}f$.

Indication : on peut considérer $X_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) d\theta$.

4. Pour $f : x \mapsto x^{\frac{n+1}{2}}$, calculer $I_{\frac{1}{2}}f$.
5. En déduire les relations suivantes pour toute fonction polynomiale f :

$$I_{\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2}}f = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad D_{\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2}}f = f.$$

6. Généraliser les résultats de la fonction précédente pour f développable en série entière. Discuter enfin le cas où $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

I.3.386 Mines-Ponts PSI 2026

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt.$$

1. Donner le domaine de définition de F .
2. Donner le domaine de continuité de F .
3. Sur quel domaine la fonction F est-elle C^∞ ?
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

I.3.387 X 2012

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^1 x \exp(-xt \ln(t)) dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa régularité.
2. Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.

I.3.388 X 2009

Étudier l'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)} dx.$$

I.3.389 X 2015

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ et $x_n f(x_n) \rightarrow 0$.

I.3.390 ENS 2018

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq 4 \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx$$

et déterminer le cas d'égalité.

I.3.391 X 2016

Soit

$$f : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2 - 2i\pi xt) dx.$$

1. (a) Déterminer D_f .
(b) Montrer que f est de classe C^1 sur D_f .
2. (a) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .
(b) En déduire f .

I.3.392 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

Indication : dans cet exercice, on pourra utiliser pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ que $\sin(x) \geq \frac{x}{2}$.

I.3.393 Mines-Ponts MP 2026

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On pose :

$$g : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. On pose :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

Montrer que pour tous $0 < u < v$, on a :

$$\int_u^v g^2(t) dt \leq \frac{F(u)}{u} + 2\sqrt{\int_u^v f^2(t) dt} \sqrt{\int_u^v g^2(t) dt}.$$

3. En déduire que g^2 est intégrable et que :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt.$$

4. La constante 4 est-elle optimale ?

I.3.394 Mines-Ponts MP 2026

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{t - 1} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $[0; 1]$.
2. Montrer que f est croissante puis qu'elle est concave.

I.3.395 ENS MP 2024

Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose :

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^\alpha (1+t)^\beta dt.$$

1. Pour quels $(\alpha; \beta)$ l'intégrale $F_{\alpha, \beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
2. Pour un tel couple $(\alpha; \beta)$, étudier la régularité de $F_{\alpha, \beta}(x)$.
3. On pose :

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g : x \in]0; 1[\mapsto \int_0^x \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha, \beta}$.

4. Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha, \beta}$ en $+\infty$.

I.3.396 ENS MP/MPI 2023

Soit $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n dx = +\infty.$$

2. Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n dx = -\frac{1}{a}.$$

I.3.397 CCINP MP 2026

1. (a) Montrer que $x \mapsto x^{2n+1}e^{-x^2}$ est intégrable.
 (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2} dx.$$

Calculer I_n .

2. On pose :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(xt) dt.$$

Étudier le domaine de définition de f , sa continuité et sa dérivabilité.

3. Rappeler le développement en série entière de $\sin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.
 4. Montrer que f est développable en série entière et déterminer son rayon de convergence.

I.3.398 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt.$$

1. Montrer que f est C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer f' .
 2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

I.3.399 Mines-Télécom MP 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}} dt.$$

1. Montrer que a_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
 3. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.

I.3.400 ENS PC 2024

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire, continue, telle que $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $\phi(x) = 0$ pour tout $x \geq 1$. Soit f une fonction de classe C^2 .

1. Montrer qu'il existe $a \geq 0$ tel que pour tout réel x l'on ait :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda(t-x))f(t) dt = af'(x).$$

2. Proposer une construction similaire dont la convergence donne $f''(x)$.

I.3.401 ENS PC 2024

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Calculer

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1+ax^p)^2 dx.$$

Que dire de sa valeur quand p tend vers $+\infty$?

2. Que dire de l'expression suivante ?

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2x}(1+ax^p)^2 dx$$

Quand l'infimum est-il atteint ?

I.3.402 ENS PC 2024

On note :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

On suppose qu'il existe des constantes réelles C_1, C_2, a, b strictement positives telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^a} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^b}.$$

1. À quelle condition sur ces constantes a-t-on que $f * g$ est bien définie ?
2. Montrer que si $a, b > 1$, alors il existe $C_3 > 0$ telle que

$$|f * g|(x) \leq \frac{C_3}{(1+|x|)^{\min(a;b)}}.$$

I.3.403 Mines-Télécom MP 2026

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$$

converge et calculer sa valeur.

I.3.404 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt.$$

1. Montrer que I est convergente.
2. Soit

$$F : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt.$$

- (a) Calculer $F'(x)$.
- (b) En déduire $F(x)$, puis I .

I.3.405 PT 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt.$$

On pose également, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Soit encore $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) = \cos(x \sin(t))$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
2. Montrer que f_t est développable en série entière et indiquer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
3. Montrer l'inégalité suivante, puis en déduire un développement en série entière de F :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!} \right| \leq e^{|x|} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}.$$

I.3.406 Centrale-Supélec MP 2025

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on définit :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt.$$

1. (a) Donner le théorème de la convergence dominée étendu à une famille indexée par un paramètre réel.
(b) Justifier que f est bien définie et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x).$$

I.3.407 Mines-Télécom 2025

Justifier l'existence puis calculer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx.$$

I.3.408 C.C.E. Mines PC 2014

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt.$$

Montrer que la fonction F est bien définie et qu'elle est de classe C^2 .

I.3.409 x

Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a; b]$. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications de classe C^2 de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque segment $[x_i; x_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus 3. Un élément de $\mathcal{S}$ est appelé une *fonction spline cubique*.

1. (a) Déterminer la nature de $\mathcal{S}$ et sa dimension.
 (b) Pour $y = (y_0; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose :

$$\mathcal{T}(y) = \{\varphi \in \mathcal{S} \mid \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(x_i) = y_i\}.$$

Déterminer la nature de $\mathcal{T}(y)$ et sa dimension.

- (c) Pour $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$, démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction $\varphi \in \mathcal{T}(y)$ telle que $\varphi'(a) = \lambda$ et $\varphi'(b) = \mu$ (considérer, pour $\varphi \in \mathcal{T}(0)$ telle que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$, l'intégrale $\int_a^b (\varphi''(x))^2 dx$).
2. Soit f une application C^2 de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = f'(b)$. Calculer

$$\int_a^b (\varphi''(x) - f''(x))^2 dx$$

en fonction d'intégrales portant sur f , φ et leurs dérivées. Interpréter.

I.3.410 ENS

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. On pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x) \sim \frac{x^\alpha}{\alpha}$ en $+\infty$.
 Montrer que $f(x) \sim x^{\alpha-1}$.
2. On suppose, toujours en $+\infty$, que $F(x) \sim \frac{x^2}{2} + o(x)$.
 Montrer que $f(x) = x + o(\sqrt{x})$.

I.3.411 C.C.E. Mines MP 2015

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

I.3.412 Mines-Télécom MP 2026

Justifier l'existence puis calculer :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x)) dx.$$

I.3.413 CCINP MP 2026

1. Montrer que pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = 0$ si $t > \frac{n\pi}{2}$, et $\left(1 - \sin\left(\frac{t}{n}\right)\right)$ si $t \in [0; \frac{n\pi}{2}]$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

I.3.414 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Donner le domaine de définition D_F de F .
2. Montrer que $F \in C^1(D_F)$.
3. Exprimer F avec des fonctions usuelles.

I.3.415 x

1. Soit $(x_1; \dots; x_n)$ et $(y_1; \dots; y_n)$ deux suites monotones de réels. Comparer

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) \quad \text{à} \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k\right).$$

2. Soit f et g deux fonctions monotones et continues par morceaux sur $[a; b]$. Comparer

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \quad \text{avec} \quad (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

I.3.416 x

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

On pose $\alpha = \min_{x \in [0; 1]} f(x)$ et $\beta = \max_{x \in [0; 1]} f(x)$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq -\alpha\beta$.

I.3.417 x

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et continue telle que $f(0) = 1$. Montrer que :

$$\int_0^1 x f(x) \, dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2.$$

I.3.418 x

Soit $E = C^1([a; b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a; b]$,

$$|f(x)^2 - f(a)^2| \leq C \int_a^b f(t)^2 \, dt + \varepsilon \int_a^b f'(t)^2 \, dt.$$

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D > 0$ tel que, pour tout $f \in E$,

$$\sup_{x \in [a; b]} f^2(x) \leq D \int_a^b f(t)^2 \, dt + \varepsilon \int_a^b f'(t)^2 \, dt.$$

I.3.419 x

Soit $f \in C([a; b], \mathbb{R})$ telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a; b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0; x_1; \dots; x_n)$ de $[a; b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) \, dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) \, dt.$$

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k)$.

I.3.420 ENS Ulm

Calculer :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_1^A A^{\frac{1}{x}} \, dx.$$

I.3.421 x

Soit $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux avec f positive et décroissante. Prouver l'existence de $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(a^+) \int_a^c g(t) \, dt,$$

où $f(a^+)$ désigne la limite à droite en a de f .

I.3.422 x

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \, dx.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis un équivalent et un développement asymptotique à deux termes de u_n .

I.3.423 x

1. Soit $0 < \varepsilon < 1$. On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x) + \varepsilon \cos^2(x)}} dx.$$

Calculer I . Donner un équivalent de I quand ε tend vers 0.

2. On pose

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x) + \varepsilon \cos^2(x)}} dx.$$

Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique de J quand ε tend vers 0.

I.3.424 x

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel a tel que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$f(t) \leq a \int_0^t f(u) du.$$

Que dire de f ?

I.3.425 x

Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive continue, a et b dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que pour $x \geq 1$,

$$f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b.$$

Trouver une fonction simple majorant f .

I.3.426 Mines-Ponts MP

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} dx.$$

I.3.427 Mines-Ponts PSI 2024

1. Montrer, pour tout $x \in [0; 1]$, que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln(2)}{2} \arctan(x) + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

2. En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

I.3.428 Mines-Ponts PSI 2024

Soit E l'ensemble des applications de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, 1-lipschitziennes et vérifiant l'égalité $u(0) = 0$. Déterminer

$$\sup_{u \in E} \int_0^1 u(t) - u(t)^2 \, dt.$$

I.3.429 CCINP PSI 2024

Soit

$$I = \int_0^1 \frac{t \ln(t)^2}{(1-t)^2} \, dt.$$

1. Justifier l'existence de I .
2. Montrer que :

$$I = 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right).$$

4 Équations différentielles

I.4.1 CCP MP

Soit l'équation différentielle $(E) : 4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à (E) .
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

I.4.2 X PC 2019

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \cos^2(t)$.

I.4.3 Mines-Ponts MP

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée.

Soit l'équation différentielle :

$$xy' - y + f(x) = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$.
Déterminer l'unique solution g telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$.
Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose désormais que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
3. Montrer que g^2 et gf sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.4.4 Centrale PSI

Soit l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0. \quad (1)$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution de (1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.
2. Déterminer les solutions de (1) qui sont développables en série entière.
3. En posant $x = \sinh(t)$, résoudre (1).

I.4.5 X

Résoudre l'équation différentielle

$$t^2y'(t) + y(t) = t^{-n} \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

I.4.6 ENS Lyon 2022

Soit $q \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$.

Montrer que l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ admet une solution non bornée.

I.4.7 CCP MP

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$(x - a)(x - b)y'(x) - nxy(x) = ky(x).$$

2. On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n(X), \quad f(P(X)) = (X - a)(X - b)P'(X) - nkP(X).$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer $\det(f)$.

I.4.8 CCINP 2018

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 telles que $f''' = f$.

Indication : justifier qu'il existe un nombre réel λ tel que $f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.9 ENS PC 2015

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq \alpha$.

Montrer que l'équation différentielle

$$\varphi y'' = \varphi'' y$$

admet une solution qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

I.4.10 Mines-Télécom MP

Montrer que les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

possèdent une limite en $-\infty$.

I.4.11 CCP MP

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t)) dt$ et $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E) .
3. Déterminer les solutions développables en série entière de (E) .
4. En déduire le développement en série entière de f .

I.4.12 CCP MP

Soit $F : t \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2(\theta)}} d\theta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$.

On admet que $W_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta) d\theta$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. La fonction F est-elle développable en série entière? Justifier.
Le cas échéant, calculer ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.
3. Montrer que F engendre l'espace vectoriel réel des solutions développables en série entière, solutions de l'équation différentielle $(t^3 - t)x'' + (3t^2 - 1)x' + tx = 0$.

I.4.13 Centrale MP

Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et l'équation différentielle $(E) : y''(x) = q(x)y(x)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note y_α l'unique solution de (E) vérifiant $y_\alpha(0) = 1$ et $y'_\alpha(0) = \alpha$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x)y'_0(x) > 0$.
Montrer que y_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_\alpha(x) = y_0(x) \left(1 + \int_0^x \frac{\alpha}{y_0(t)^2} dt \right).$$

3. Montrer qu'il existe $\alpha_1 < 0$ tel que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - i) y_α s'annule sur $\mathbb{R}_+$;
 - ii) $\alpha < \alpha_1$.
 Calculer α_1 .

I.4.14 CCP 2015

Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

I.4.15 Centrale 2015

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

I.4.16 Mines 2015

Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.

I.4.17 Mines 2015

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$$

On donne une solution particulière : $x \mapsto \exp(-2x)$.

I.4.18 CCINP MPI 2025

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de la variation des constantes.

I.4.19 CCP MP

Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r ; r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0 ; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1 ; 1[$?

I.4.20 CCP MP

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

I.4.21 Centrale PSI 2017

1. Montrer que l'équation différentielle $(E) : y'' = (1+x^4)y$ admet une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f^2(x)}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f^2(t)} dt$ est solution de (E) .
4. En déduire les solutions de (E) en fonction de f .

I.4.22 CCP 2017

Résoudre matriciellement le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y + 4e^t \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

I.4.23 Centrale 2012

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2 + 1)y' + y + x = 0$.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

2. Résoudre l'équation (E) . Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

I.4.24 Mines 2012

Montrer que l'équation différentielle $(E) : xy' = x + y^2$ admet une unique solution développable en série entière, et que son rayon de convergence appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

I.4.25 Centrale 2012

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$ qui admet une limite en $+\infty$. Préciser cette limite.

I.4.26 TPE/EIVP 2018

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - f(x) = e^x \int_0^1 f(t) dt.$$

I.4.27 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ noté (S) . Démontrer que toutes les solutions de (S) sont polynomiales si et seulement si A est nilpotente.

I.4.28 Mines

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. On considère l'équation différentielle notée (E) donnée par $y' = a(x)y + b(x)$. On note aussi, pour $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \int_0^x a(t) dt$ et $I = A(1)$.

1. Trouver une condition sur I pour que A soit 1-périodique.
2. Soit y une solution de (E) . Démontrer que $x \mapsto y(x + 1)$ est aussi une solution de (E) .
3. Soit $I \neq 0$. Démontrer que (E) admet une unique solution 1-périodique.
4. Si $I = 0$, que peut-on dire ?
5. Donner un exemple pour chacune des situations.

I.4.29 Mines

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Existe-t-il des solutions bornées ?

I.4.30 Centrale

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f :]0; +\infty[$ de classe C^1 et solutions de l'équation différentielle (non linéaire) E suivante :

$$xf' - |1 - f| = 1.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$.
2. Soit f une solution de (E) . Démontrer que f est strictement croissante.
3. On suppose que f est minorée par 1. Déterminer la forme de f , puis obtenir une contradiction.
4. On suppose que f est majorée par 1. Déterminer la forme de f , puis obtenir une contradiction.
5. En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in]0; +\infty[$ tel que $f(x_0) = 1$. Déterminer toutes les solutions de (E) .

I.4.31 INP

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} 2xy' - 3y = 0 & (H) \\ 2xy' - 3y = \sqrt{x} & (E) \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur $]0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0; +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0; +\infty[$?

I.4.32 X MP 2019

Soit x une fonction continûment différentiable au voisinage de 0, telle que

$$x'(t) = 3x(t) + 85 \cos(x(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = 77.$$

Montrer que x se prolonge en une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ entier.

I.4.33 Mines-Télécom MP 2016

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

I.4.34 Mines-Télécom MP 2024

Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E) : 2xy'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1.$$

I.4.35 Mines-Télécom MP 2019

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + \sinh(x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution paire sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0.

I.4.36 CCINP PC 2023

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \cos(t)y + \sin(t)y' = -\cos(t)\sin(t).$$

Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

I.4.37 ENSEA/ENSIIE PSI 2024

Résoudre l'équation différentielle

$$x'' + 6x' + 9x = 2te^{-3t},$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.

I.4.38 CCINP PSI 2022

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad \text{sur l'intervalle }]-1; 1[.$$

1. Chercher les solutions polynomiales.
2. Effectuer le changement $y(x) = xz(x)$, où z est une fonction inconnue. En déduire une équation différentielle vérifiée par z .
3. Donner $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 1}.$$

4. Donner l'expression de z .
5. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $] -1; 1[$.

I.4.39 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

Résoudre l'équation différentielle

$$t \frac{d\theta}{dt} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\cosh(t)}.$$

I.4.40 CCINP PC 2022

Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

I.4.41 Mines-ponts MP 2018

Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \cot(t)$.

I.4.42 CCINP PSI 2024

1. Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t - 1} + \frac{c}{t + 1}.$$

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t(t^2 - 1)x' + 2x = t^2$.

I.4.43 Mines-Télécom MP 2021

Déterminer les fonctions $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(t^2 + 1)x'' - 2x = 0.$$

I.4.44 Mines 2022

Montrer que la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène normalisée à coefficients constants.

I.4.45 ENS 2023

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions a et b continues sur I .

1. Soit x une solution non nulle de $y'' + ay' + by = 0$ sur I . Montrer que les zéros de x sont isolés.
2. On suppose a de classe C^1 . Montrer l'existence d'une fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I telle que $f(t) = x(t)e^{x(t)}$ soit une solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + qy = 0$, où q est continue sur I .
3. On note E_q l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$ sur I . Soit q_1 et q_2 deux fonctions continues sur I , vérifiant $q_1 \leq q_2$. On considère $y_1 \in E_{q_1} \setminus \{0\}$ et $y_2 \in E_{q_2} \setminus \{0\}$, ainsi que α et β deux zéros consécutifs de y_1 . Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha; \beta]$.

I.4.46 CCINP MP 2024

Soit

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

et

$$(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière qui vérifie (E) et la déterminer.
2. Montrer que $g : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est solution de (E).
3. On admet que $h : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{x^2}$ est solution de (H).
Déterminer toutes les solutions de (H).

I.4.47 Mines-Télécom MP 2024

On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 3y = \frac{\exp(-x^{-2})}{x^5}.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}^*$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

I.4.48 Mines-Télécom MP 2022

Soit l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière.
2. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que l'équation (E) est équivalente à $z'' - z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+$.
3. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que l'équation (E) est équivalente à $z'' + z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-$.
4. Faire le raccordement des solutions puis en déduire la solution sur $\mathbb{R}$.

I.4.49 Mines-Télécom MPI 2025

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' = (x^4 - 1)y.$$

1. Montrer que s'il existe une fonction f solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$, alors cette fonction est unique.
2. On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose :

$$g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt.$$

Montrer que g est solution de l'équation différentielle.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

I.4.50 CCINP TSI 2025

En posant $z = \ln \left(\frac{y}{y+1} \right)$, résoudre l'équation différentielle $y' = y(1+y)$.

I.4.51 Mines-Télécom PSI 2019

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

I.4.52 Mines-Ponts MP 2021

1. Résoudre sur $D =]-\infty; 1[$ l'équation différentielle :

$$(E) : xy' + y = \frac{1}{1-x}.$$

2. L'équation (E) a-t-elle une solution de classe C^∞ sur D ?

I.4.53 X MP 2017

Résoudre $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

I.4.54 Centrale-Supélec PC 2017

On considère l'équation différentielle :

$$\sqrt{1+t^2}y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0.$$

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales

$$(f(0); f'(0)) = (0; 1) \quad \text{et} \quad (g(0); g'(0)) = (1; 0).$$

L'une d'entre elles vous semble-t-elle évidente ?

2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une série entière.
3. Pour tout $t \in]-1; 1[$, prouver l'égalité $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.

I.4.55 CCINP MP 2017

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Montrer que $\phi_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est solution de (E) .
2. À l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E) .

I.4.56 CCINP TSI 2023

Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

On pourra poser $z = y'' - y$.

I.4.57 Mines-Ponts PSI 2012

Trouver les solutions 2π -périodiques de l'équation différentielle :

$$y'' + e^{ix}y = 0.$$

I.4.58 Centrale-Supélec PSI 2016

Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}.$$

I.4.59 CCINP PC 2016

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2(x - x^2)y''(x) + (x - 2)y'(x) - y(x) = 0.$$

1. Montrer que $y_0 : x \mapsto x - 2$ est solution.

Soit I l'intervalle $]1; 2[$ ou $]2; +\infty[$.

2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x - 2}$ est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.
3. (a) On pose $\varphi : x \mapsto -2\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$. Montrer que φ est dérivable sur I et calculer $\varphi'(x)$ sur I .
(b) Résoudre (E) sur I sachant que :

$$\frac{4 - 3x^2}{2x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x-2}.$$

- (c) Résoudre (E) sur $]1; +\infty[$.
- (d) Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

I.4.60 Mines-Ponts MP

1. Soit f une fonction de classe C^1 , à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$. On suppose que $f'(t) + af(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que f tend également vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.
2. Soit f une fonction de classe C^2 , à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $f''(t) + f'(t) + f(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que la fonction f tend également vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

I.4.61 X MP 2022

Soit λ un réel.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{1+2t}{1-t}y.$$

2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \frac{\exp(-2t)}{(1-t)^3}$.

Justifier que la fonction f est développable en série entière et donner un équivalent des coefficients de ce développement.

I.4.62 CCINP PSI 2023

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non nulle de (E) . Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$.
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \frac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x vérifiant (E) . Montrer que l'application qui à t associe

$$\frac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$$

est bornée et atteint sa borne supérieure. Sa borne inférieure est-elle atteinte ?

I.4.63 CCINP PSI 2022

Soit la fonction $f(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que cette fonction est C^1 sur un intervalle que l'on précisera et donner sa dérivée.
2. Trouver des polynômes non nuls a, b, c tels que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

3. Montrer que l'unique solution de cette équation, qui s'annule en 0, est une fonction impaire développable en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.
5. Donner ce développement en série entière.

I.4.64 Mines-Ponts MP 2021

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^3y' - 2y = 0$.

I.4.65 CCINP PC 2019

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{x + i}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2(x + i)}y = 0$.
3. On définit, pour x réel :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Montrer que l'on définit ainsi une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. Étudier le caractère C^1 et exprimer f' .

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x + i)}f(x).$$

5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Montrer l'existence de I_α .

Exprimer I_α en fonction de f .

En déduire le signe de I_α .

I.4.66 TPE/EIVP PSI 2016

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - (2 + 4x^2)y = 0.$$

Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall x \in]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Déterminer a_1 .
2. Déterminer une relation entre a_{n+1} , a_n et a_{n-1} .
3. Déterminer a_2 et a_3 . Faire une conjecture sur a_n et la démontrer.
4. Résoudre (E) en posant $y(x) = f(x)z(x)$.

I.4.67 Mines-Ponts PC 2015

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$x(y'' - y') + ay = 0.$$

I.4.68 CCINP MP 2021

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4.$$

1. Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.
2. Résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty ; 0[$, $]0 ; 4[$ et $]4 ; +\infty[$.
3. Trouver les solutions de (E) sur $] -\infty ; 4[$, $]0 ; +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

I.4.69 Mines-Télécom PSI 2017

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - 4y' + y = 0$.

I.4.70 Mines-Télécom MP 2025

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

I.4.71 Mines-Télécom MPI 2024

Soit $a > 0$ et $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée. L'équation $y' - ay = h(t)$ admet-elle une solution bornée dans $\mathbb{R}_+$? Donner ses solutions.

I.4.72 CCINP PC 2023

Soit S l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - (x^4 + 1)y(x) = 0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f^2(x)$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \geq 0$.
4. Montrer que $f^2(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Posons $h(x) = f(x) \int_0^x \frac{1}{g(t)} dt$. Montrer que h est définie et que $h \in S$.
6. Montrer que $\{f; h\}$ est une base de S .

I.4.73 ENSAM PSI 2016

On considère l'équation différentielle :

$$x(x+1)y' + y = \arctan(x).$$

1. Résoudre l'équation sur les intervalles ne contenant ni -1 ni 0 .
2. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

I.4.74 CCINP PC 2018

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation :

$$(E) : xy'' + xy' - y = 0.$$

1. Déterminer un réel α tel que $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ diverge.
3. Soit $G : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $s : x \mapsto xf(x)$. Montrer que s est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E') , que l'on précisera.
5. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la fonction G .

I.4.75 Mines-Ponts MP 2017

Donner le système à résoudre pour effectuer la variation des constantes dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

I.4.76 X MP 2018

Soit $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$x'' = \frac{1-x}{x^3}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x(0)$ et $x'(0)$ pour que x soit bornée.

I.4.77 CCINP MP 2015

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) = 1.$$

1. Rappeler la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
Résoudre (E) pour $x > 0$.
2. Montrer que (E) admet une solution f développable en série entière sur $] -2 ; 2[$.
Donner ce développement.
3. En déduire à l'aide des questions précédentes une expression de $f(x)$ pour $x \geq 0$.

I.4.78 Mines-Ponts PC 2014

Résoudre :

$$x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2.$$

I.4.79 Mines-Ponts PSI 2022

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' + xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

I.4.80 Mines-Ponts MP 2015

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y :

$$x(x^2 + 1)y'' - 2(x^2 + 1)y' + 2xy = 0.$$

I.4.81 Mines-Télécom PC 2022

On note (E) l'équation différentielle suivante :

$$xy'(x) + y(x) = e^x.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = e^x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sans calcul, déterminer le nombre de solutions de ce problème sur un intervalle bien choisi.

3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
4. Dans le cas $(x_0; y_0) = (0; 1)$, trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy de la question 2.

I.4.82 TPE/EIVP MP 2018

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .
En déduire une contradiction puis conclure.

I.4.83 CCINP PSI 2016

On donne l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0.$$

1. (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
(b) Pourquoi peut-on dire que (E) admet d'autres solutions ?
2. Résoudre entièrement l'équation différentielle en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \frac{z(x)}{1 - x}$. Effectuer les raccordements éventuels.

I.4.84 CCINP MP 2015

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 2ty' + y = 3t \cos\left(t^{\frac{3}{2}}\right).$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.
2. Résoudre (E) dans le cas général et en déduire une simplification de v .

I.4.85 Mines-Ponts PSI 2024

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y' + y = x^2.$$

1. Montrer que (E) n'a pas de solution développable en série entière (autour de zéro).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que (E) admet une unique solution y telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$.

I.4.86 Mines-Ponts PC 2016

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'' - (x+3)y' + 3y = 0.$$

Indication : on commencera par chercher une solution développable en série entière telle que $y(0) = 1$, dont on déterminera explicitement le rayon de convergence.

I.4.87 ENSEA/ENSIIE MP 2018

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' - 3xy' + 4x = x^2$$

et on note (H) l'équation homogène associée.

1. Trouver les solutions polynomiales de (H) .
2. Trouver toutes les solutions de (H) sur $]0; +\infty[$.
3. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0; +\infty[$.

I.4.88 Mines-Télécom MP 2019

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

I.4.89 CCINP PC 2017

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$ existe.
3. Montrer que les solutions de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}(h(x) + k),$$

où k est une constante réelle.

4. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité suivante :

$$e^{\frac{1}{x}} h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du.$$

On pourra considérer le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$.

5. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$$

est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

6. Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $[0; +\infty[$ et que c'est la seule.
7. Montrer que g est de classe C^∞ sur $[0; +\infty[$.
8. Trouver la limite de g en $+\infty$.

I.4.90 CCINP MP 2015

Résoudre le système différentiel suivant par résolution matricielle (diagonalisation) :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - \exp(-t) \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

I.4.91 Mines-Ponts PC 2016

Résoudre le système différence homogène $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Quelle méthode utiliser dans le cas où il y a un second membre ?

I.4.92 CCINP PC 2018

Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $] - r ; r[$. Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}.$$

Pour tout $x \in]0 ; r[$, on pose :

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u) du.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation $y' + \frac{\alpha}{y} = 0$.
2. Pour tout $x \in]0 ; r[$, montrer l'existence de $M_x \geq 0$ tel que, pour tout $t \in [0 ; x]$, $|f(t)| \leq M_x$. En déduire que pour tout $x \in]0 ; r[$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $]0 ; x]$.
3. Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0 ; r[$, puis résoudre (E) sur cet intervalle.
4. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]0 ; 1[, \quad T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n + \alpha} x^n.$$

5. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0 ; r[$ qui possède une limite finie en 0.

I.4.93 Mines-Télécom PSI 2016

On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

Déterminer une solution développable en série entière et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

I.4.94 Mines-Ponts 2013

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution maximale. On note f cette solution.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est définie sur un intervalle $] - a ; a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de f .

I.4.95 Mines-Télécom MP 2024

On pose $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!}(n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Justifier que f est définie et de classe C^∞ sur $] -1 ; 1[$.
2. En déterminant une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n , montrer que f vérifie l'équation différentielle :

$$f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x).$$

En déduire l'expression de f .

I.4.96 TPE/EIVP PC 2015

On considère l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ avec $y(0)$ et $y'(0) = 0$. Résoudre l'équation différentielle en utilisant des séries entières.

I.4.97 ENS PC 2025

Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0 ; 1]$ qui satisfait l'équation

$$y' = -\sin(y), \quad y(0) = 1.$$

Montrer que la limite suivante existe et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)e^t < +\infty.$$

I.4.98 X MP 2008

Soit $q \in C(I, \mathbb{R})$ telle que $q \leq 0$ sur I . On s'intéresse aux solutions sur I de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' + q(x)y = 0.$$

1. Soit $a < b$ dans I , et y une solution de (E) telle que $y(a) = y(b) = 0$.
Montrer que y est nulle sur I .
2. Soit $I = \mathbb{R}$, et on suppose $q \leq 0$, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la seule solution bornée de (E) est la fonction nulle.

I.4.99 ENS PC 2025

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $[-\pi ; \pi]$:

$$x''(t) - x(t) = \cos(2t).$$

2. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(t) = 0$ si $|t| \geq C$. Montrer qu'il existe une solution à l'équation

$$x''(t) - x(t) = f(t)$$

telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

I.4.100 X ESPCI 2013

On considère une solution f bornée de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \frac{xy}{1+x^3} = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

I.4.101 Navale MP 2019

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$ et h sa fonction somme sur $] -R; R[$.

1. Déterminer R .
2. Montrer que h vérifie sur $] -R; R[$ l'équation différentielle :

$$(1 - 4x)h'(x) - 2h(x) = 0.$$

3. On pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 6x + x^2}}.$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Montrer que f est développable en série entière en zéro et déterminer son développement en série entière.

I.4.102 PT 2022

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Déterminer les solutions de (E) sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$.
2. Donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$.

I.4.103 ENS MP 2014

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $] 0; +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

I.4.104 Mines-Télécom 2022

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : xy'' + (x-2)y' - 2y = 0.$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E) .
2. Déterminer une solution de (E) sous la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $] 0; +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

I.4.105 ENS MP 2025

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle et deux fois dérivable telle que

$$f'' + af' + bf = 0,$$

où $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Soit $a, b : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $a > b$. On considère des solutions $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ non nulles des équations :

$$\begin{cases} f'' + af = 0 \\ g'' + bg = 0 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $t_0, t_1 \in [0; 1]$ tels que $t_0 < t_1$ et $g(t_0) = g(t_1) = 0$.

Montrer qu'il existe $t_2 \in]t_0; t_1[$ tel que $f(t_2) = 0$.

3. Soit $p : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f_λ l'unique solution de :

$$\begin{cases} f_\lambda'' + (p(t) + \lambda)f_\lambda = 0 \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f_\lambda'(0) = 1 \end{cases}$$

On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de f_λ dans $[0; 1]$.

- (a) Montrer que $N(\lambda)$ est strictement croissant en λ .
 - (b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} N(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} N(\lambda)$.
4. On pose :

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f_\lambda(1) = 0\}.$$

Montrer que $S = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

On admet que $(\lambda; t) \mapsto f_\lambda(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$.

I.4.106 X ESPCI 2015

Soit l'équation différentielle

$$(E) : f'' + af' + bf = 0,$$

avec a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe f et g solutions de (E) telles que $fg = 1$;
- ii) la fonction b est de classe C^1 , négative et $b' = -2ab$.

I.4.107 X MP 2025

On considère l'équation différentielle

$$y'' + e^x y = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Montrer que y s'annule au moins une fois.

I.4.108 CCINP MP 2012

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.
2. Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit

$$h : x \mapsto \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x - t) dt.$$

- (a) Montrer que $h'' + 4h = g$.
 - (b) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = g$.
3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f > 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

I.4.109 ENS MP 2014

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = -x(t) + x(t)^2 \sin(t), \quad |x(0)| < 1.$$

Montrer que x est définie au moins sur $\mathbb{R}_+$.

I.4.110 ENS PC 2013

Soit φ une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \alpha < 0$.
Soit l'équation différentielle :

$$(E) : f'' + \varphi f = 0.$$

Montrer que si f est solution de (E) , alors f admet un nombre fini de zéros.
Que se passe-t-il si l'on suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \alpha > 0$?

I.4.111 ENS Ulm MP 2025

Soit $\psi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 croissante et $y : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$y'' + \psi(x)y = 0.$$

Montrer que les extrema de $|y|$ forment une suite croissante.

I.4.112 Centrale/Mines MP/PC/PSI

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = x(t) \sin^2(x(t)).$$

1. Quelles sont les fonctions constantes solutions de cette équation ?
2. Soit x une solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$.
Montrer que x est bornée et monotone.
3. Démontrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. Montrer que x admet des limites en $\pm\infty$. Les déterminer.

I.4.113 Centrale-Supélec PC 2026

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : |x|y' + (1-x)y = x.$$

Montrer que (E) admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

I.4.114 CCP PC 2016

On pose $J(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$.

1. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $t > 0$, prouver l'inégalité $J(t) > 0$. Montrer que $J(t) - 1$ est équivalent à t quand t tend vers 0.
3. Montrer qu'il est possible, pour tout $t > 0$, de poser

$$N(t) = J(t) \int_1^t \frac{1}{uJ(u)^2} du.$$

Vérifier alors l'identité :

$$\forall t > 0, \quad N(t) - J(t) \ln(t) = J(t) \int_t^1 \frac{J(u)^2 - 1}{uJ(u)^2} du.$$

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0.$$

- (a) Vérifier que J est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0; +\infty[$. On pose $z = \frac{y}{J}$.

Montrer que y est solution de (E) sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1 à préciser.

- (c) En déduire une écriture de l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ à l'aide des fonctions J et N .

5. Montrer que la fonction

$$u \longmapsto \frac{J(u)^2 - 1}{uJ(u)^2}$$

admet un prolongement par continuité en 0.

En déduire que la fonction $t \mapsto N(t) - J(t) \ln(t)$ est bornée sur $]0; 1]$.

6. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

I.4.115 CCP PC 2016

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2,$$

notée f .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f^{(n+1)}(0)$. Trouver une relation de récurrence sur les u_n .

I.4.116 Mines-Télécom PC 2016

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

I.4.117 CCP PC 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

On admet la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.

On considère encore l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (x^2 - 1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0.$$

1. Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(t)$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_{2n+1} x^{2n+1}$.

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

4. Pour tout $x \in]-1; 1[$, prouver l'égalité suivante :

$$(x^2-1)g''(x)+2xg'(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^2 u_{2n+1} - (2n+2)(2n+3) u_{2n+3} \right) x^{2n+1}.$$

En déduire que g est solution de (E) sur $] - 1 ; 1[$.

On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ est également solution de (E) sur $] - 1 ; 1[$.

5. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) sur $] - 1 ; 1[$ à l'aide des fonctions f et g .

6. Pour tout $x \in]-1; 1[$, prouver l'égalité $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - x^2 \cos^2(t)} \cos(t) dt$.

7. En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

I.4.118 CCP PC 2016

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, à valeurs réelles, telles que :

$$\forall x > 0, \quad xf'(x) - |1 - f(x)| = 1.$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $xy'(x) - y(x) = 0$.
2. On considère une solution f du problème posé en préambule.
 - (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante.
 - (b) Dans cette question, on suppose que f est minorée par 1. Montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle de la première question. Trouver la limite de f en 0 et en déduire une contradiction.
 - (c) Dans cette question, on suppose que f est majorée par 1. Trouver une expression de f et en déduire une contradiction.
 - (d) Conclure qu'il existe un unique $x_0 \in]0; +\infty[$ tel que $f(x_0) = 1$.
 - (e) Déterminer f .
3. Trouver l'ensemble des solutions du problème posé en préambule.

I.4.119 Mines-Télécom MP 2025

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(\mathbb{R})$ τ -périodique. On considère l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) : y' + \alpha y = \varphi.$$

1. Soit $y_\tau : t \mapsto y(t + \tau)$. Montrer que si y est solution de (E_α) , alors y_τ l'est aussi.
2. Si y est solution de (E_α) , montrer que y est τ -périodique si et seulement si $y(0) = y(\tau)$.
3. Discuter de l'existence d'une solution τ -périodique.

I.4.120 CCINP MP 2026

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : f'(x) + 2f(x) = \exp(-2x).$$

2. Soit f une solution de (E) . Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Résoudre l'équation différentielle

$$f'(x) + \alpha f(x) = g(x),$$

où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

4. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \alpha f(x) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

I.4.121 X-ENS Cachan PSI 2026

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On suppose que :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) \leq e^{-x} f(x), x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq e$.

Indication : on pourra poser $g(x) = f'(x) - e^{-x} f(x)$.

2. Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose que :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(x) = (1 + e^{-x})y(x) \end{cases}$$

Justifier qu'il existe une unique fonction y qui vérifie ce système.

Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad y(x) = e^x + \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-2t} y(t) dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x y(t) dt.$$

3. On pose $z(x) = e^{-x}|y(x)|$. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad z(x) \leq 1 + \int_0^x e^{-t} |z(t)| dt.$$

Puis en déduire que :

$$y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(e^x).$$

I.4.122 Mines-Télécom PC 2026

Déterminer les solutions développables en série entières de l'équation différentielle :

$$(E) : x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0.$$

I.4.123 CCINP PSI 2026

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Trigonaliser explicitement A .
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y + \sinh(t) \\ y' = x + 3y + te^t \end{cases}$$

I.4.124 X ESPCI 2021

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit :

$$(E_n) : \begin{cases} y' = -\frac{1}{n}y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On note f_n une solution de (E_n) .

1. Y a-t-il existence et unicité des f_n ? Vers quelle fonction les f_n convergent-elles simplement ?
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

I.4.125 ENS PC 2024

On considère l'équation différentielle

$$u'(t) + u(t) = f(t)$$

avec $u(0) = 1$.

1. Soit $\tau > 0$. Montrer qu'il existe f_τ telle que la solution vérifie $u(\tau) = 0$.
2. Si on impose $\|f\|_{L^\infty} \leq a$ avec $a > 0$, quelle est la valeur minimale de τ telle qu'il existe une solution satisfaisant $u(\tau) = 0$?
3. Pour $u'(t) + u^2(t) = -a$, avec $a > 0$ et $u(0) = 1$, montrer que pour tout $\tau > 0$ il existe $a > 0$ tel que $u(\tau) = 0$.

I.4.126 ENS PC 2024

On considère l'équation différentielle :

$$u'(x) = f(u(x))$$

avec $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 0$, $f'(z) \neq 0$.

Donc $u(z) = z$ est solution de l'équation.

1. À quelle condition sur f a-t-on la propriété suivante : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $z_0 \in [z - \varepsilon_0 ; z + \varepsilon_0]$, la solution de $u'(x) = f(u(x))$, $u(0) = z_0$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = z$?
2. On suppose qu'il existe $z_0 < z_1 < z_2$ avec $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = 0$ et $f > 0$ sur $]z_0 ; z_1[$ et $f < 0$ sur $]z_1 ; z_2[$.
Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ si u vérifie $u'(x) = f(u(x))$, $u_0 \in [z_0 ; z_2]$?

I.4.127 Mines-Ponts MP 2026

Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' = y,$$

sachant qu'il existe deux solutions inverses l'une de l'autre.

I.4.128 CCP 2016

Soit (E) l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

1. Trouver la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide du changement de fonction $z = x^2 y$.
2. (a) Trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, calculer la valeur en 0.
(b) Donner le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$$

sur $\mathbb{R}^*$.

3. Montrer que la fonction précédente se prolonge en une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

I.4.129 CCINP 2019

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} L_u : C^k(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^{k-1}(I, \mathbb{R}) \\ y &\longmapsto y' + uy \end{aligned}$$

1. Montrer que L_u est linéaire.
2. À quelles conditions sur a et b l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ s'écrit-elle sous la forme $(L_u \circ L_u)(y) = 0$?
3. Résoudre $y'' + 2 \tanh(x)y' + y = 0$.

I.4.130 ENS MP 2026

Soit l'équation différentielle suivante, pour $q > 0$ fixé :

$$\begin{cases} f'(x) = f(qx) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions développables en série entière au voisinage de 0.
2. Montrer qu'il existe une solution C^1 sur $\mathbb{R}$.

I.4.131 ENS 2021

Soit u une fonction développable en série entière au voisinage de 0, avec

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit φ vérifiant l'équation différentielle $x\varphi'' = u\varphi$.

1. Y a-t-il unicité de la solution en 0 ?
2. Existe-t-il une solution φ développable en série entière au voisinage de 0 ?

I.4.132 Mines-Ponts 2018

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : xy'' + y' + y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière. On note f celle qui vérifie de plus $f(0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0; 2]$ tel que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in]0; x_0[$, $f(x) > 0$.
3. Soit la fonction $g \mapsto xf'(x)^2 + f(x)^2$.
Montrer que g possède une limite finie positive en $+\infty$.

4. Montrer que

$$x \longmapsto \frac{f(x)f'(x)}{x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{f(x)^2}{x}$$

sont intégrables sur $[1; +\infty[$.

I.4.133 CCINP 2025

On considère l'équation différentielle

$$(E) : t^2y'' + 4ty' + 2y = 0,$$

d'inconnue y et de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

1. Trouver les solutions de (E) de la forme $t \mapsto t^r$, $r \in \mathbb{R}$.
2. Linéariser (E) sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. À l'aide de la méthode de la variation de la constante, résoudre :

$$(E') : ty'' + 4ty' + 2y = e^t.$$

I.4.134 TPE/EIVP MP 2017

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1-t \\ 1-t & 1 & 1-t \\ t-1 & t-1 & 2t-1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.
2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + (1-t)y(t) + (1-t)z(t) \\ y'(t) = (1-t)x(t) + y(t) + (1-t)z(t) \\ z'(t) = (t-1)x(t) + (t-1)y(t) + (2t-1)z(t) \end{cases}$$

I.4.135 ENS 2018

Soit f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. Existe-t-il une fonction u 1-périodique telle que $u + u' = f$? Si oui, y a-t-il unicité ?

I.4.136 Mines-Télécom 2025

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 4tx'' + 2x' - x = 0.$$

1. Vérifier que $t \mapsto \sinh(\sqrt{t})$ est solution de (E) .
2. Trouver les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
3. Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.4.137 Mines-Ponts MPI 2026

On cherche à donner des expressions des solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' = xy.$$

1. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Déterminer les solutions développables en séries entières de cette équation. On pourra notamment justifier, si a_n désigne le terme général de cette équation entière, que $a_2 = 0$ et que pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$$

3. Existe-t-il des solutions bornées à cette équation ?
4. Montrer que

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

est une solution de (E) . On donnera notamment le domaine de définition de cette fonction.

5. Donner une expression intégrale de l'ensemble des solutions de (E) .

I.4.138 Mines-Télécom PSI 2024

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) : x^2 y' - y = x^2 - x + 1.$$

On note F la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 de

$$f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

1. Déterminer les solutions de (E) .
2. Trouver une solution polynomiale de (E) .
3. En déduire F .

5 Fonctions de plusieurs variables

I.5.1 CCP MP

Déterminer les coordonnées et la nature des extrema de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x^2 - (y^3 - y)^2 \end{aligned}$$

I.5.2 Mines-Ponts/X MP

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $h = a \frac{\partial h}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial y}$.

On suppose que h est bornée. Montrer que h est nulle.

I.5.3 CCP 2015

On considère le disque $\mathcal{D} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et la fonction f définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathcal{D}, \quad f(x; y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

La fonction f admet-elle sur $\mathcal{D}$ des extrema globaux ou des extrema locaux ?

I.5.4 CCP MP

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0; 0)$.
 - (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0; 0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

I.5.5 CCP MP

On pose, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$, $f(x; y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0; 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

I.5.6 CCP MP

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ \alpha & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

1. Prouver que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
 (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
- (a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et les calculer.
- (b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0; 0)$ et donner leur valeur.
- (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

I.5.7 CCP MP

1. Soit E et F deux espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n .

Soit $e = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E .

On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On pose : $\forall (x; y) \in E \times E, \|(x; y)\| = \max(\|x\|_\infty; \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

- (a) Prouver que :

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x; y) \in E \times E, \quad |B(x; y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

- (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0; v_0) \in E \times E$.

I.5.8 Mines 2016

On considère l'ensemble $\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ et la fonction f définie sur Δ par :

$$\forall (x; y) \in \Delta, \quad f(x; y) = x^2 y (x + y - 4).$$

1. Représenter le domaine Δ .
2. Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ .

I.5.9 CCINP 2024

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x; y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0; 1] \times [0; 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K , puis le déterminer.

I.5.10 X-ENS/Mines-Ponts MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note : $f(M) = (\text{Tr}(M); \text{Tr}(M^2); \dots; \text{Tr}(M^n)) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle $df(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal annulateur de M , noté π_M .
3. Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \pi_M\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

I.5.11 Mines-Ponts MP

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la fonction g admet un minimum global.
3. En déduire que la fonction f est surjective.

I.5.12 Mines-Ponts PSI

L'application $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x; y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x; y) \neq (0; 0)$, et $H(0; 0) = 0$ est-elle continue ? de classe C^1 ?

I.5.13 CCINP MP 2023

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x; y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.

Soit $C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un minimum sur C .
2. Soit $(u; v) \in C$ où f atteint l'un de ses extrema.
 - (a) Justifier avec un théorème de votre programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$\begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

- (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
3. Déterminer les valeurs possibles de $(u; v)$, puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

I.5.14 CCINP PC 2017

On pose $f(x; y) = x \ln(y) - y \ln(x)$ pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.
Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.

I.5.15 Mines-Ponts MP 2021

Soit $\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ et $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\}$.

1. Représenter Δ et D dans $\mathbb{R}^2$.
2. Les ensembles Δ et D sont-ils ouverts ? fermés ?
3. Montrer que

$$f : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1 + \sin(xy))}{xy} & \text{si } (x; y) \notin \Delta \\ 1 & \text{si } (x; y) \in \Delta \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur D .

I.5.16 CCINP TSI

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x^4 + y^4 - 4xy \end{aligned}$$

Déterminer les points où f admet des extrema locaux.

I.5.17 Mines 2024

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto \min(x^2; y^2) \end{aligned}$$

Quel est le domaine de continuité de f ? de différentiabilité de f ? La fonction f est-elle de classe C^1 ?

I.5.18 Centrale-Supélec PC 2023

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \ln(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x; y) = f(x) - f(y).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et que l'équation $f'(x) = a$ d'inconnue x admet au plus deux solutions.
2. Déterminer les points critiques de F .
3. Quelle est la nature des points critiques ?

I.5.19 ENSEA/ENSIIE MP 2015

Rechercher les éventuels extrema de la fonction $f(x; y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

I.5.20 Mines 2024

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) &\longmapsto \left(\frac{1}{2} \sin(x+y); \frac{1}{2} \cos(x-y) \right) \end{aligned}$$

1. Déterminer la différentielle de f .
2. Montrer que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|df(x; y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire que le système

$$\begin{cases} 2x = \sin(x+y) \\ 2y = \cos(x-y) \end{cases}$$

admet au plus une solution.

I.5.21 Mines 2023

Étudier l'existence, la continuité et les extrema de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+x)}{t+y} dt \end{aligned}$$

I.5.22 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

Étudier les extrema de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x(y^2 + \ln^2(x)) \end{aligned}$$

I.5.23 Mines-Ponts MP 2022

On pose :

$$f(x; y) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f admet-elle des extrema globaux ? locaux ?

I.5.24 Mines-Ponts MP 2022

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ?

I.5.25 Mines-Télécom MP 2024

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto 3xy - x^3 - y^3 \end{aligned}$$

Étudier les extrema de la fonction f .**I.5.26 CCINP PSI 2019**Soit $f : (x; y) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x; y) \neq (0; 0)$, et $f(0; 0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

I.5.27 Mines-Ponts MP 2023

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 telle que f admet un extremum en x_0 . Montrer que $f'(x_0) = 0$.
2. Énoncer un théorème semblable pour U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3. Étudier les extrema de

$$f : (x; y) \longmapsto |\sin(x + iy)|^2$$

sur l'ensemble $\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.**I.5.28 Mines-Ponts PSI 2025**On pose $f(x; y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les dérivées partielles de f .

I.5.29 CCINP PSI 2019

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x^3 y^2 (x + y - 1) \end{aligned}$$

1. Trouver les points critiques de f .
2. Déterminer les extrema locaux de f .

I.5.30 CCINP MP 2027Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

I.5.31 CCINP PSI 2015

On considère les deux ensembles suivants :

$$K = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \pi\},$$

$$T = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < \pi\}.$$

On considère la fonction $F(x; y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leq x \leq y \leq \pi$ et $F(x; y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leq y \leq x \leq \pi$.

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum ? Si oui, déterminer leur valeur.

I.5.32 CCINP MP 2022

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x; y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les points critiques de f . La fonction f admet-elle un extremum global ?
2. Soit $(a; b)$ un point critique de f . Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a; b; f(a; b))$.
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1; 1; 1)$.
4. Exprimer la différentielle en $(1; 1)$, puis g telle que $g(x; y) = (f(x; y); f(x; y))$.

I.5.33 Mines-Ponts PSI 2014

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

1. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.
2. En est-il de même pour deux points de $\mathcal{C}$ séparés d'un quart de tour ?

I.5.34 CCINP PSI 2017

On note f la fonction :

$$(x; y) \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2).$$

1. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ un unique point critique.
2. On note $g : x \mapsto f(x; x^3) - f(0; 0)$. Trouver un équivalent simple de g en 0.
3. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?

I.5.35 Centrale-Supélec PC 2023

On définit :

$$\begin{aligned} f &: [-2; 2] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto \frac{x^2}{2} - \sqrt{4 - x^2} \cos(y) \end{aligned}$$

Montrer que f possède un maximum et un minimum, puis déterminer leur valeur.

I.5.36 CCINP PC 2019

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x; y) = \cosh(2x) - \cos(2y).$$

On considère les deux ensembles suivants :

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D' = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\sinh(t) \geq t$.
2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D .
4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D' .
5. En déduire qu'il existe $t_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0); \sin(t_0))$.
6. Étudier les variations sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta); \sin(\theta))$.
Conclure.

I.5.37 CCINP TSI 2019

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x; y; z) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est régulière en tout point.
2. Soit $M(3; 0; 0)$. Trouver une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par M .

I.5.38 Centrale-Supélec PC 2016

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et

$$f : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \longmapsto \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose que h est de classe C^1 . Montrer que f se prolonge en une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose que h est de classe C^2 . Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

I.5.39 Mines-Ponts MP 2023

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne usuelle. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq aN(x - y)^2.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $N(x)$ tend vers $+\infty$.

I.5.40 ENS MP 2022

1. Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\Delta u > 0$ sur $\overline{B}(0, 1)$. Montrer que u atteint son maximum sur la sphère $S(0; 1)$.
2. Démontrer le même résultat en supposant uniquement que $\Delta u \geq 0$ sur $\overline{B}(0, 1)$.
3. Soit V telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\Delta V = 0$.

I.5.41 CCINP PC 2018

1. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_-^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp(x) \end{aligned}$$

Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x \exp(y) + y \exp(x) \end{aligned}$$

Montrer que si $(x_0; y_0)$ est un point critique, alors $x_0 < 0$, $x_0 y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).

3. Soit $x \mapsto f(-1 + ax; -1 + x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5. Notons $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

I.5.42 Mines-Télécom PSI 2022

Étudier la continuité en $(0; 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0; 0)$. Elles sont définies pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ par :

$$f(x; y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \quad g(x; y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad h(x; y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}.$$

I.5.43 TPE/EIVP PSI 2017

Posons $f(x; y) = (x - y)^2(1 - x^2 - y^2)$ pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Préciser le signe de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?
4. Montrer que f possède un maximum global et préciser les points où il est atteint.
5. Préciser les extrema locaux de f .

I.5.44 CCINP PC 2015

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto e^x + e^y + e^{-x-y} \end{aligned}$$

1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geq 1 + t.$$

2. Déterminer tous les points critiques de f et donner leur nature. Existe-t-il un maximum ?

I.5.45 CCINP MP 2023

On note, pour tous réels x et y :

$$f(x; y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x; 0) = 0.$$

1. On pose $X_0 = (x_0; 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que f est continue en $(x_0; 0)$.
 - (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.
 - (a) Calculer les dérivées partielles de f en X_1 .
 - (b) La fonction f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1 , puis en $(0; 1)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0 . Si on suppose que f est différentiable en X_0 , que vaut sa différentielle ?

I.5.46 CCINP MP 2012

1. Déterminer les extrema de la fonction

$$f : (x; y) \longmapsto \sin(x) \cos(x) \cos(x + y)$$

sur le domaine

$$\Delta = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

2. Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x + y + z \leq \frac{\pi}{2}$.
Montrer que $\sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}$.

I.5.47 Mines-Ponts MP 2014

Montrer que

$$f(x; y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 - nx - y)^2}{2^n}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle possède un minimum et trouver pour quel couple $(x; y)$ elle l'atteint.

I.5.48 CCINP PC 2024

Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives, de classe C^2 , convexe et de dérivée strictement négative.

1. Montrer que $x \mapsto e^{-x}$ vérifie ces hypothèses.
2. Soit

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + h'(x) \end{aligned}$$

- (a) Montrer que g est strictement croissante, et vérifier que $g(0) < 0$.
 - (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution. On la notera α .
3. Soit f l'application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à $(x; y)$ associe $x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
 - (a) Montrer que $(\alpha; \frac{\alpha}{2})$ est l'unique point critique de f .
 - (b) Montrer que f admet un extremum local et déterminer sa nature.
 4. On pose :

$$\phi : ((x; y); (x'; y')) \longmapsto xx' - xy' - x'y + 2yy'.$$

On admet que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\exists k > 0, \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 - 2xy + 2y^2 \geq k(x^2 + y^2).$$

5. Montrer que l'extremum de f est global.

I.5.49 ENSAM 2015

Déterminer les fonctions $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que le champ de vecteurs

$$V(x; y) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix}$$

soit le gradient d'une fonction f . Calculer alors cette (ces) fonction(s) f .

I.5.50 ENS MP 2019

On définit les intégrales doubles des fonctions de $[0; 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ continues : on intègre successivement et les deux variables jouent des rôles équivalents i.e.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x; y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x; y) \, dy \, dx.$$

On définit une norme :

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 f(x; y)^2 \, dy \, dx}.$$

On considère l'ensemble A des $g \in C([0; 1]^2, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $r, s : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec, pour tous x, y , $g(x; y) = r(x)s(y)$.

Soit $f \in C([0; 1]^2, \mathbb{R})$. Supposons que, pour tout $g \in A$, $\|f + g\| \geq \|f\|$.

Montrer que f est la fonction nulle.

I.5.51 CCINP PC 2024

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x^3 - y^2 \end{aligned}$$

Soit l'ensemble $C = \{(x; y) \mid h(x; y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe C^1 , puis montrer que $(0; 0)$ est le seul point critique de h . La fonction h admet-elle un extremum local en $(0; 0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1 telle que $f(x; y) = 0$ pour tout $(x; y) \in C$.

(a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t^2; t^3) = 0$.

(b) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = 0$.

3. Soit

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f(t^2; u) \end{aligned}$$

Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3; t^3[$ tel que $\varphi'_t(\gamma(t)) = 0$.

4. Conclure que $(0; 0)$ est un point critique pour f .
5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C .

I.5.52 Mines-Ponts MP 2024

Posons $D = \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrer que l'ensemble

$$S = \left\{ g \in C^1(D, \mathbb{R}) \mid \exists f \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \forall (x; y) \in D, g(x; y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \right\}$$

est l'ensemble des solutions sur D d'une équation aux dérivées partielles à préciser.

I.5.53 CCINP PSI 2014

On pose $\mathcal{D} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 + xy \leq 1\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il borné ?
2. À l'aide du changement de variable $u = x + \frac{y}{2}$ et $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$, calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

I.5.54 TPE/EIVP MP 2018

On définit :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}_+^*)^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1; \dots; x_n) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \end{aligned}$$

La fonction f admet-elle des extrema ? Si oui, lesquels ?

I.5.55 Mines-Télécom MP 2018

Étudier la fonction f définie par :

$$f(x; y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

I.5.56 Mines-Ponts MP 2019

Soit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit, pour tout $(u; v) \in D$:

$$\phi(u; v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}; \frac{u}{v} \right).$$

1. Montrer que ϕ est une bijection de D dans Δ .
2. Montrer que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1 .

I.5.57 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $f \in C^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$. On définit :

$$\begin{aligned} \Phi &:]0; +\infty[^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right) \end{aligned}$$

Déterminer les choix de f tels que :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

I.5.58 CCINP PC 2018

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique, c'est-à-dire g est de classe C^2 et :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

1. Trouver a, b des réels tels que :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = f \circ g$.

3. Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4. On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique si et seulement si g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et :

$$G(x; y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\cosh(y)}\right).$$

5. Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

I.5.59 Mines 2015

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2)$$

dans le domaine $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; 0) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$, en passant en coordonnées polaires.

I.5.60 Mines-Ponts PSI 2019

Soit

$$f : (x; y) \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les extrema locaux de f .

I.5.61 ENS MP 2013

On suppose disposer d'une fonction f de deux variables $(t; x) \in \mathbb{R}_+^2$, positive, de classe C^1 , telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(0; x) = 0$, et vérifiant l'inégalité :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \leq K f,$$

où c et K sont deux constantes réelles avec $c > 0$. Montrer que f est nulle.

I.5.62 ENS MP 2013

Soit v une fonction de deux variables $(t; x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, lipschitzienne et bornée. Montrer qu'étant donnée une fonction $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = 0 \\ u(0; \cdot) = u_0 \end{cases}$$

I.5.63 Centrale-Supélec MP 2013

On considère $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien.

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

On note $N : x \mapsto \|x\|$ et $F : x \mapsto f(\|x\|)x$.

1. La fonction N est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?
Quelle est la différentielle de N ?
2. La fonction F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?
Quelle est la différentielle de F ?
3. La fonction F est-elle continue en 0 ? Est-elle différentiable en 0 ?

I.5.64 CCINP MP 2023

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0; 0) = 0$ et

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) > \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) \right|.$$

On pose $u : x \mapsto f(x; x)$, $v : x \mapsto f(x; -x)$ et $w_x : y \mapsto f(x; y)$.

1. Calculer les dérivées de u , v et w_x .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leq |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \mapsto y_x$. On suppose que φ est dérivable.
Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x; \varphi(x))$. Montrer que φ est de classe C^1 .

I.5.65 ENS MP 2014

Soit $\mu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $\chi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi\mu)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla(\chi)\|^2 \mu^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \chi^2 \mu \Delta \mu.$$

I.5.66 TPE/EIVP MP 2016

Soit S une matrice symétrique réelle. On note

$$R(X) = \frac{X^T S X}{X^T X}$$

pour tout vecteur colonne X non nul.

Montrer que $P(x) = \det(S - xI_n)$ admet comme racines les valeurs prises par la fonction R en ses points critiques.

I.5.67 Mines-Ponts PC 2013

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-2\} \\ z &\longmapsto \frac{2z+1}{z+2} \end{aligned}$$

On pose $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que sous réserve de restrictions, f définit une bijection sur chacun de ces ensembles.
2. On pose $z = x + iy$, $u : (x; y) \mapsto \operatorname{Re}(f(z))$ et $v : (x; y) \mapsto \operatorname{Im}(f(z))$.
Montrer que u et v sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-2; 0)\}$.
3. Déterminer f^{-1} .
4. Déterminer le jacobien de $(x; y) \mapsto (u(x; y); v(x; y))$.
5. Calculer $\iint_D \frac{1}{|(z+2)^4|} dx dy$

I.5.68 CCINP PSI 2019

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f . Montrer qu'elles sont continues en $(0; 0)$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Interpréter le résultat.

I.5.69 CCINP MP 2022Soit $\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$(x; y) \longmapsto \left(xy; \frac{x}{y}\right)$$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1} .
2. On pose $(u; v) = \Phi(x; y)$ et $f(x; y) = F(u; v)$.

Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F .

3. Résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) - 2f(x; y) + 2 = 0.$$

4. Résoudre :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

I.5.70 CCINP MP 2022

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Prouver que $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. On pose $\vec{u}_\theta = (\cos(\theta); \sin(\theta))$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$.
Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0; 0)$ selon $\vec{u}_\theta$ existe.
3. Existe-t-il des dérivées partielles de f en $(0; 0)$?
4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ avec $(x; y) \neq (0; 0)$.
5. Est-ce qu'il existe des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

I.5.71 Mines-Ponts PSI 2013

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $(p; q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(p; q) \neq (0; 0)$, et $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que les restrictions de f aux droites d'équation $px + qy = c$ sont constantes si et seulement si $q \frac{\partial f}{\partial x} = p \frac{\partial f}{\partial y}$.

I.5.72 Mines-Ponts MP 2021

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 .

I.5.73 Centrale-Supélec PSI 2013

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]^2$ telle que :

$$\forall (x; y) \in [0; 1]^2 \setminus \{(1; 1)\}, \quad f(x; y) = \frac{xy(1-y)(1-x)}{1-xy} \quad \text{et} \quad f(1; 1) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; 1]^2$.
2. Déterminer $\sup(f)$ sur son ensemble de définition.

I.5.74 ENS PC 2025

Soit

$$f(x; y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \sin(yr)}{(1+r)^2} dr.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
3. Montrer que $x \mapsto f(x; x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
4. Bonus : la fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$?

I.5.75 ENS PC 2025

Soit $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$|h(x)| \leq \frac{1}{1+|x|} \quad \text{et} \quad |h'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| dx dy < +\infty.$$

I.5.76 Mines-Ponts MP 2016

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x; y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

et donner leur nature.

I.5.77 CCINP TSI 2024

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x; y) = h(x - y)$.

1. Montrer que f est solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. On pose $\varphi(t) = f(x + t; y + t)$. Calculer $\varphi'(t)$.

I.5.78 ENS MP 2014

Soit $f(r; \theta) = f(z) = f(re^{i\theta})$ à valeurs réelles et de Laplacien nul.

On rappelle que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Montrer qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \bar{z}^n.$$

I.5.79 Navale PSI 2022

Trouver toutes les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 0.$$

I.5.80 ENS MP 2013

On suppose disposer d'une fonction f de deux variables $(t; x) \in \mathbb{R}_+^2$, positive, de classe C^1 , telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(0; x) = 0$, et vérifiant l'inégalité

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \leq K f,$$

où c et K sont deux constantes réelles avec $c > 0$. Montrer que f est nulle.

I.5.81 ENS MP 2013

Soit v une fonction de deux variables $(t; x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, lipschitzienne et bornée. Montrer qu'étant donnée une fonction $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ unique vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = 0 \\ u(0; \cdot) = u_0 \end{cases}$$

I.5.82 ENS Ulm MP 2025

Trouver toutes les fonctions harmoniques et α -homogènes à deux variables réelles.

I.5.83 PT 2019

On souhaite déterminer les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall (x; y) \in U, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x; y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x; y) = 0.$$

On considère le changement de variables $(u; v) = (xy; xy^{-1})$ et on définit, pour tout $(u; v) \in U$, $F(u; v) = f(x; y)$.

1. Exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de F .
2. Montrer que l'équation de départ devient $\frac{\partial F}{\partial v} - 2u \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$, puis la résoudre.

I.5.84 ENSEA/ENSIIE MP 2019

Déterminer les fonctions $\Psi \in C^1(]0; +\infty[^2; \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x; y) \in]0; +\infty[^2, \quad x \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x; y) + y \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

I.5.85 Mines-Ponts MP 2015

Soit P la fonction de $] -1; 1[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(r; t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}.$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la fonction qui à r associe $P(r; t)$ est développable en série entière sur $] -1; 1[$. Calculer ce développement.
2. Soit r appartenant $]0; 1[$ fixé.
 - (a) Justifier que la fonction qui à t associe $P(r; t)$ est continue, positive, paire et 2π -périodique.
 - (b) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r; t) dt = 1$.
3. Soit $a \in [0; \pi]$. Montrer que :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-a}^a P(r; t) dt = 1.$$

4. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodique. Montrer que :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) P(r; t) dt = f(x).$$

I.5.86 Mines-Ponts MP 2019

On considère la fonction

$$(x; y) \mapsto \int_0^\pi \ln(x + y \cos(t)) \, dt.$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est différentiable.
3. Comment expliciter l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{x + y \cos(t)} \, dt = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) ?$$

I.5.87 X-ENS Cachan PSI 2017

Soit $a = (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, dx.$$

1. Montrer que f est définie, de classe C^1 , positive.
2. Montrer que $f(a) \rightarrow +\infty$ quand $\|a\| \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que f admet un minimum.

On note $a^* = (a_1^*; \dots; a_n^*)$ un point où ce minimum est atteint.

4. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i! + (i+1)!a_1^* + \dots + (i+n)!a_n^* = 0.$$

5. Soit $P(X) = 1 + a_1^*(X+1) + a_2^*(X+1)(X+2) + \dots + a_n^*(X+1)\dots(X+n)$.
Montrer que $P(X) = a_n^*(X-1)\dots(X-n)$.

Calculer $P(-1)$, puis en déduire que $a_n^* = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

6. Montrer que :

$$f(a_1^*; \dots; a_n^*) = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1^* x + \dots + a_n^* x^n) \, dx.$$

En déduire que $f(a^*) = \frac{1}{n+1}$.

I.5.88 CCP PC 2016

On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto xe^y + ye^x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t + \exp\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f .

I.5.89 X ESPCI

Soit a et b réels tels que $|ab| < 1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule :

$$f(x; y) = (x + a \sin(y); y + b \sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

I.5.90 Mines-Télécom MP 2025

Soit f la fonction définie par :

$$f(x; y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y).$$

Déterminer les extrema globaux de f sur $[0; \pi] \times [0; \pi]$.

I.5.91 Mines-Ponts MPI 2026

1. Soit f et h deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction g telle que :

$$f = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad h = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

2. Soit f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(tx; ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx; ty) \right) dt.$$

- (a) Simplifier cette intégrale (en supposant f de classe C^1).
- (b) Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Montrer qu'il existe une fonction h de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Q.$$

3. Trouver une telle fonction h avec $P(x; y) = x$ et $Q(x; y) = y$, telle que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

I.5.92 CCINP PSI 2026

On considère la fonction

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto x^2 y + y(\ln(y))^2$$

où

$$D = \mathbb{R} \times]0; +\infty[.$$

1. Déterminer les points critiques de f sur D .
2. La fonction f admet-elle un maximum global sur D ? un minimum global sur D ?

I.5.93 Mines-Ponts MP 2026

Soit $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \cup \{(0; 0)\}$.

Montrer qu'il n'existe aucun réel α tel que l'application :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x-y}} & \text{si } x > y \\ \alpha & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

soit continue en $(0; 0)$.

I.5.94 ENS MP 2013

Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. On considère un voisinage Ω de D et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de jacobien strictement positif sur Ω .

La fonction f est-elle injective sur D ?

I.5.95 Mines-Ponts MPI 2026

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x; y) = e^{x^2+y^2} - \ln(x) - \ln(y).$$

Déterminer le nombre de points critiques de la fonction f et préciser leur nature.

I.5.96 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$f(x; y) = yx^3 - xy + xy^2 - y^3x.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit T le domaine triangulaire fermé de $\mathbb{R}^2$ délimité par les droites d'équations $x = 1$, $y = 1$ et $y = 1 - x$. Déterminer les extrema globaux de f sur T .

I.5.97 Centrale-Supélec PSI 2026

Soit $\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto \int_0^\pi \ln(x + y \cos(t)) dt$$

1. Représenter graphiquement Ω . Montrer que f est bien définie et que ses dérivées partielles existent.
2. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, montrer que f est de classe C^1 .

I.5.98 ENS 2018

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, il existe une sphère qui coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $(a; f(a))$ et qui est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

I.5.99 ENS 2018

Soit $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) = g(a)$ et $f \leq g$. Montrer que G_f et G_g admettent le même plan tangent en a .

I.5.100 ENS 2017

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a > 0$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq aN(x - y)^2.$$

Montrer que $\lim_{N(x) \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

I.5.101 X 2017

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par l'égalité $f(X) = g(\|X\|^2)$. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = 0$.

I.5.102 CCINP 2025

Soit a, b, α, β des réels strictement positifs. On pose, pour tous $x, y > 0$:

$$\begin{cases} f(x) = -\alpha \ln(x) + \beta x \\ g(y) = -a \ln(y) + by \\ F(x; y) = f(x) + g(y) \end{cases}$$

1. (a) Étudier les variations de f et g sur $\mathbb{R}_+^*$. On note m_f et m_g leurs minima respectifs.
- (b) Montrer que F admet un minimum m_F . Donner l'ensemble des points en lesquels F atteint ce minimum.
2. Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma_c = \{(x; y) \in]0; +\infty[^2 \mid F(x; y) = c\}$.
- (a) Que vaut Γ_c si $c < m_F$? si $c = m_F$?
- (b) On suppose $c > m_F$.

Montrer qu'il existe un unique couple $(u_c; v_c) \in]0; +\infty[^2$ tel que :

$$u_c < \frac{\alpha}{\beta} < v_c \quad \text{et} \quad m_g = c - f(u_c) = c - f(v_c).$$

- (c) Soit $K_c = \{x \in]0; +\infty[\mid \exists y \in]0; +\infty[, F(x; y) = c\}$.
Montrer que $K_c = [u_c; v_c]$.
- (d) On suppose que $x \in]u_c; v_c[$. Montrer qu'il existe au moins deux réels y tels que $F(x; y) = c$.
Qu'en est-il si $x = u_c$? si $x = v_c$?
- (e) Montrer qu'il existe h_1 et h_2 deux applications définies de façon unique, telles que $h_1(x) < \frac{a}{b} < h_2(x)$ et :

$$\forall x \in]u_c; v_c[, \quad F(x; h_1(x)) = c = F(x; h_2(x)).$$

- (f) Étudier la continuité et la dérivabilité de h_1 et h_2 .

I.5.103 Mines-Ponts MP 2026

Soit $f : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x; y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f atteint son minimum et son maximum sur $[0; 1] \times [0; 1]$. Les déterminer.

I.5.104 TPE/EIVP 2016

Rechercher les extrema locaux puis globaux de la fonction f définie par :

$$f(x; y) = x^4 + y^3 - 3y - 2.$$

I.5.105 CCINP 2025

1. Soit E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$ une application différentiable en $X_0 \in U$. Soit $u \in E$. Montrer que f est dérivable selon le vecteur u au point X_0 .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \quad f(x; y) = \frac{2x^3 + xy^3 + 5x^6y^3}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

- (a) Étudier la prolongeabilité de f en $(0; 0)$ en fonction de α .
- (b) Étudier l'existence des dérivées partielles en $(0; 0)$ en fonction de α .
- (c) La fonction f est-elle différentiable en $(0; 0)$?

I.5.106 Mines-Télécom MP 2026

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x^3 + y^3 - 3xy \end{aligned}$$

Étudier les extrema locaux de f .

I.5.107 Centrale PSI 2024

Soit

$$\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 8\} \quad \text{et} \quad f : (x; y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2.$$

1. Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.
2. Étudier les extrema de f sur Δ .
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ .

6 Topologie

I.6.1 CCP

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
(b) On suppose $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbb{R}$.

I.6.2 CCP MP

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

I.6.3 CCP MP

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E . On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
(b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose, pour tout $x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

(a) Soit $x \in E$. Prouver que :

$$d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}.$$

(b) On suppose que A est fermée et que, pour tout $(x; y) \in E^2$, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$d_A(tx + (1 - t)y) \leq td_A(x) + (1 - t)d_A(y).$$

Prouver que A est convexe.

I.6.4 X PC 2019

On considère l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant une famille libre. Montrer que cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

I.6.5 Mines-Ponts MP 2024

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer qu'une intersection décroissante de boules fermées de E est encore une boule fermée.

I.6.6 CCP MP

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$. On munit E des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définies par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On pose $O = \{f \in E \mid f(1) > 0\}$ et $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt \leq 0\}$.

1. Montrer que O est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.
3. L'ensemble O est-il ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$?

I.6.7 CCINP 2024

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - (a) Soit $u : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$.
Prouver que u est une application continue sur E .
 - (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $c : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
- (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et on note $\overline{F}$ l'adhérence de F .
Prouver que $c \in \overline{F}$. L'ensemble F est-il fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$?

I.6.8 X-ENS

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que tout $a \in A$ est isolé. Montrer que l'ensemble A est au plus dénombrable.

I.6.9 X-ENS

Donner un exemple de forme linéaire non continue.

I.6.10 CCP MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact d'intérieur vide de $M_n(\mathbb{R})$.

I.6.11 CCP MP

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel réel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que, } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

3. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

I.6.12 CCP MP

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Soit f une application de E dans F et a un point de E .
Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :
 - i) L'application f est continue en a .
 - ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$,
on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense dans E , et soit f et g deux applications continues de E dans F . Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, on a $f = g$.

I.6.13 CCP MP

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - i) L'application f est continue sur E .
 - ii) L'application f est continue en 0_E .
 - iii) Il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

I.6.14 CCP MP

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

On considère l'ensemble $A = \left\{ f \in E \mid f(0) \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E .
2. Montrer que si $f \in A$, alors $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n > 1$. On considère

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f_n \in A$.

En déduire la distance de O_E à A .

I.6.15 CCINP 2024

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \text{ de } E \text{ par } \|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

- (a) Justifier que $S(0; 1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E .

- (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n des entiers naturels distincts.

L'ensemble $S(0; 1)$ est-il une partie compacte de E ? Justifier.

I.6.16 Mines-Ponts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application

$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

réalise une bijection continue de E dans la boule ouverte centrée en O et de rayon 1.

I.6.17 Mines-Ponts MP 2021

Soit X une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

I.6.18 CCP PSI

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées complexes.

1. Montrer que $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E .
2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

I.6.19 Centrale PSI

On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? un groupe multiplicatif ? un fermé de $M_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$?

I.6.20 X-ENS

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

I.6.21 X-ENS

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension finie, K un compact non vide de E . Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K . Cette boule est-elle unique ?

I.6.22 x

Décrire les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ et de $GL_n(\mathbb{R})$.

I.6.23 x

Décrire les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$.

I.6.24 x

Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

I.6.25 Mines-Télécom MP 2024

Soit E le plan euclidien.

1. L'ensemble $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ est-il un fermé de E ?
2. Donner la définition d'une partie connexe par arcs.
3. Montrer que le cercle de centre O et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée, est un segment.

I.6.26 x

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{A} = \{u \in L(\mathbb{R}^n) \mid u(K) \subset K\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est compact.
2. Montrer que, pour $u \in \mathcal{A}$, $|\det(u)| \leq 1$.

I.6.27 x

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ convexe non vide et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(K) \subset K$. Montrer que u admet un point fixe dans K .

I.6.28 Centrale-Supélec MP 2025

1. Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Soit Ω une partie de $E = \mathbb{R}$. On note (C) la propriété suivante :

Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ continue sur Ω , f est constante.

2. Montrer que si Ω est connexe par arcs, alors Ω vérifie (C) .

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\Omega = \left\{ \left(x; \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\} \cup (\{0\} \times [-1; 1])$.

3. (a) Montrer que Ω vérifie (C) .
(b) Montrer que Ω n'est pas connexe par arcs.

I.6.29 Centrale

Soit E un espace vectoriel réel normé et f une forme linéaire de E . Montrer que :

$$f \text{ est continue} \iff \text{Ker}(f) \text{ est fermé.}$$

I.6.30 Mines-Télécom PSI 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n et scindés sur $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer que U_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n . Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\text{Im}(z)|^n \leq |P(z)|.$$

2. Conclure.

I.6.31 Mines-Télécom MP 2024

Soit E un espace euclidien de dimension n . On identifiera $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit M une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = X^T A X$, pour $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :

$$\forall X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}), \quad \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2.$$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.

I.6.32 Mines-Télécom MPI 2024

Soit E un espace vectoriel réel normé et A, B des sous-ensembles de E . On pose :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

I.6.33 ENS MPI 2025

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E , non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide.

I.6.34 Mines-Ponts MP 2023

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un fermé de ℓ^∞ .

I.6.35 CCINP MP 2018

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A .

1. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
2. On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E . Montrer que, si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors $A = E$.
3. On pose $E = M_n(\mathbb{R})$ et A l'ensemble des matrices nilpotentes de E . On veut montrer que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
 - (a) Montrer que si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors l'intérieur de $\text{Vect}(A)$ est non vide.
 - (b) Aboutir à une contradiction.

I.6.36 CCINP PC 2018

On étudie $E = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x; y) \in E$.
2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.6.37 Mines-Télécom MP 2019

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un ouvert de E .
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E .
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes.

I.6.38 Mines-Ponts MP 2023

Soit p un entier naturel non nul et a, b des réels tels que $a < b$.

On note $Z_p = \left\{ f \in C([a; b], \mathbb{R}) \mid \text{Card}(\{x \in [a; b]\} \mid f(x) = 0) \geq p \right\}$.
Déterminer l'adhérence de Z_p pour la norme infinie.

I.6.39 Mines-Ponts MP 2021

1. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à r (avec $0 \leq r \leq n$) est un fermé.
2. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang exactement r .

I.6.40 X MP 2018

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1; 0; 1\}$. Notons A l'ensemble des racines des polynômes de E . Quelle est l'adhérence de A ?

I.6.41 Centrale-Supélec MP 2018

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit A un compact de E .

1. Montrer que $A \times A$ est un compact.
2. Soit $f : A \rightarrow A$ telle que :

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

3. Soit $f : A \rightarrow A$ telle que :

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

Montrer que f est bijective et préserve les distances. (Montrer que l'inégalité de l'hypothèse est un fait une égalité.)

I.6.42 ENS Ulm 2022

Montrer que l'application $M \mapsto \text{Tr}(\exp(M))$ est convexe sur $S_n(\mathbb{R})$.

I.6.43 Centrale 2023

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *connexe* s'il n'existe aucun couple de fermés disjoints non vides $(F; G)$ tel que $A = F \cup G$.

1. Montrer que l'on peut remplacer « fermés » par « ouverts » dans la définition ci-dessus.
2. Montrer que A est connexe si, et seulement si, toute application continue de A dans $\mathbb{N}$ est constante.
3. Montrer que si A est connexe par arcs, alors A est connexe.
4. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?
5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u . Montrer que $V(u)$ est un intervalle.
6. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que $V(u)$ est connexe.

I.6.44 Centrale 2022

Soit B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $u(B) \subset B$.

On pose $u_0 = \text{Id}$, et $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour $n \geq 1$.

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?
2. On pose $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} u_n(B)$. Montrer que $x \in A$ si, et seulement si, $u(x) = x$ et $x \in B$.
3. Montrer que $A \neq \emptyset$.

I.6.45 ENS 2022

Montrer que les morphismes continus de $SL_n(\mathbb{R})$ vers $GL_n(\mathbb{R})$ sont à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

I.6.46 Mines 2024

On note $I = [1; +\infty[$ et on considère les ensembles :

- $E = \{f \in C(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ a une limite en } +\infty\}$,
- $F = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \forall t \in I, f(t) = P(t)t^{-n}\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, et que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que F est dense dans E .

I.6.47 ENS 2022

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ bornée et $x \in \text{conv}(A)$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que :

$$\left\| x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \frac{\text{diam}(A)}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

I.6.48 Mines-Télécom PSI 2023

1. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N(x; y) = \max \left(|y|; \left| x + \frac{y}{2} \right|; |x + y| \right).$$

Représenter la boule unité pour cette norme.

2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit $\{\varphi_1; \dots; \varphi_p\}$ une famille de formes linéaires sur E . À quelle condition l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, qui à x associe $\max_{1 \leq i \leq p} |\varphi_i(x)|$, est-elle une norme ?

I.6.49 Mines-Télécom MP 2018

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

On pose $A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1\}$. Montrer que A est un fermé de E .

I.6.50 ENS MP 2018

Que dire d'un sous-groupe strict fermé de $\mathbb{U}$?

I.6.51 TPE/EIVP MP 2018

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.
2. Soit F un hyperplan de E . Montrer que F est fermé ou dense dans E .

I.6.52 Centrale-Supélec MP 2021

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Montrer que les deux applications suivantes sont des normes sur E :

- La norme infinie des suites ;

- $N : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

1. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
2. Soit Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que l'intérieur de Z est vide, et déterminer son adhérence.

I.6.53 Centrale-Supélec MP 2016

Soit I un segment de $]0; 1[$ et $E = C(I, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.
2. On pose $f(x) = 2x(1 - x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E .

I.6.54 ENS MP 2019

Existe-t-il un espace vectoriel muni de deux normes et une suite dans cet espace tels que cette suite converge pour les deux normes mais vers des limites différentes ?

I.6.55 CCINP

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact de E .

Soit $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x; y) \in K^2, \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. (a) Montrer que si f admet un point fixe, alors ce point est unique.
(b) En étudiant l'application $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K , montrer que f admet un unique point fixe.
2. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Montrer, à partir de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \|x_n - a\|,$$

où a est le point fixe de f , que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.

I.6.56 X MP 2019

On note E l'ensemble des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme infinie sur $[0; 1]$. Pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on définit :

$$\Omega_{m,\varepsilon} = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], \exists y \in]x - \varepsilon; x + \varepsilon[, |f(x) - f(y)| > m|x - y|\}.$$

1. Montrer que, pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, $\Omega_{m,\varepsilon}$ est un ouvert dense.
2. On admet le théorème de Baire : une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Montrer que l'ensemble des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle part dérivables est dense dans E .

I.6.57 X MP 2013

On note C_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal.

1. Démontrer que C_n est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.
2. L'application qui à une matrice associe son polynôme minimal est-elle continue ?
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

I.6.58 Mines-Ponts MP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les ensembles suivants :

$$\Lambda_n = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = n\} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \{(x; y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}.$$

1. L'ensemble Δ_1 est-il dense dans Λ_1 ?
2. L'ensemble Δ_2 est-il dense dans Λ_2 ?
3. L'ensemble Δ_3 est-il dense dans Λ_3 ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_n soit dense dans Λ_n .

I.6.59 Mines-Ponts MP 2018

Soit E un espace vectoriel réel de dimension infinie.

1. Soit C un convexe de E et D un ensemble tel que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.
2. Soit H un hyperplan de E . Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

I.6.60 Centrale-Supélec MP 2017

On note A_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note B_n l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est $\prod_{i=1}^n (X - m_{ii})$.

1. Rappeler la définition d'un fermé.
2. Montrer que B_n est un fermé. Montrer que A_n est un ouvert.
3. Quelle est la dimension maximale d'un espace vectoriel inclus dans B_n ?

I.6.61 Mines-Ponts MP 2022

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, A une partie de E et f une fonction continue de $[0; 1]$ dans E telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer qu'il existe un élément de $f([0; 1])$ qui appartient à la frontière de A .

I.6.62 X MP 2024

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et G_f son graphe. Les deux affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction f est continue si et seulement G_f est fermé.
2. La fonction f est continue si et seulement G_f est compact.

I.6.63 Mines-Ponts MP 2018

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E . Montrer qu'il existe un segment de longueur maximale dans K .

On rappelle que $[a; b] = \{ta + (1 - t)b \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

I.6.64 X MP 2019

1. Montrer que l'ensemble A défini par

$$A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P \text{ simplement scindé et } \deg(P) = n\}$$

est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Quelle est l'adhérence de A ?

I.6.65 Mines-Ponts

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ et $(f; g) \in E^2$. On pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

I.6.66 ENS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P d'une partie fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{C}$ est fermée (resp. ouverte).

I.6.67 ENSEA/ENSIIE 2012

Un espace vectoriel réel normé E est dit *uniformément convexe* si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x; y) \in E^2,$$

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Étudier si $\mathbb{R}^2$, pour les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, est uniformément convexe.

I.6.68 Mines-Ponts

Soit $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

I.6.69 Mines-Ponts

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. Soit :

$$P = \{u \in L(E) \mid u^2 = \text{Id}_E\}.$$

1. L'ensemble P est-il fermé ? compact ?

Soit E un espace topologique, A une partie non vide de E et $a \in A$. On dit que le point $a \in A$ est *isolé* dans A s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap A = \{a\}$.

2. Caractériser $T = \{\text{Tr}(u) \mid u \in P\}$. En déduire que Id_E est un point isolé de P .
3. Déterminer tous les points isolés de P .

I.6.70 Centrale-Supélec MP 2023

Soit (E, N) et (E', N') des espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Soit $d \in \mathbb{N}$. On note $\|\cdot\|$ l'application de $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\left\| \sum_{k=0}^d a_k X^k \right\| = \max_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket} |a_k|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \ell$.
Montrer que $Y = \{\ell\} \cup \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E' .
(b) Soit $f : E \rightarrow E'$ continue telle que pour tout compact K de E' , $f^{-1}(K)$ soit un compact de E . Montrer alors que pour tout fermé F de E , $f(F)$ est un fermé de E' .
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ unitaire, x une racine réelle de P telle que $|x| > 1$. Montrer que $|x| \leq \|P\| + 1$.
En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$.

I.6.71 Mines-Ponts MP 2013

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles.

I.6.72 Mines-Ponts MP 2017

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie n . Pour $u \in L(E)$, on pose :

$$\|u\| = \sup\{N(u(x)) \mid x \in E, N(x) \leq 1\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et que :

$$\forall y \in E, \quad N(u(y)) \leq \|u\|N(y).$$

2. Montrer que l'on a ainsi bien défini une norme sur $L(E)$.
3. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L(E)$. Montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement pour N .

I.6.73 Mines-Télécom MP 2018

1. Dans un espace vectoriel normé, donner la définition d'un point adhérent à une partie, et une caractérisation de l'adhérence d'une partie.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est adhérent à $GL_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $M_n(\mathbb{R})$?

I.6.74 Mines-Ponts MP 2017

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ une forme linéaire positive non nulle. Soit

$$p_\phi : f \longmapsto |\phi(f)| + \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

Par exemple, pour $\phi : f \mapsto f(0)$, on note p_0 la fonction associée.

1. Montrer que pour tout f :

$$|\phi(f)| \leq \phi(1)\|f\|_\infty.$$

En déduire que p_ϕ est une norme.

2. Montrer que p_0 et p_ϕ sont équivalentes.

I.6.75 Mines-Ponts MP 2024

Soit E un espace euclidien, A un compact et u un endomorphisme orthogonal tel que $u(A) \subset A$.

1. Montrer que $u(A) = A$.
2. On note :

$$r = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in E, A \subset B(x, s)\}.$$

Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon r contenant A .

3. Montrer que u admet un point fixe.

I.6.76 X MP 2025

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Montrer que tout convexe fermé non borné contient une demi-droite.
2. Montrer que le résultat est encore vrai sans l'hypothèse « fermé ».

I.6.77 Mines-Télécom MP 2024

On appelle *matrice stochastique* de $M_n(\mathbb{R})$ toute matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des réels positifs et la somme de chaque coefficient de la même ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit matriciel.
2. Étudier la topologie de $\mathcal{S}$ (ouvert, fermé, compact, connexité par arcs).

I.6.78 Mines-Ponts PSI 2023

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note :

$$\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \quad \|\varphi(f)\|_\infty \leq k \|f\|_\infty.$$

3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \quad \|\varphi(f)\|_\infty \leq k \|f\|_1.$$

I.6.79 Centrale-Supélec MP 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Rappeler la définition de $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$.
(b) On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme ?

2. Montrer que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

3. Soit N une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} |N(A^k)|^{\frac{1}{k}}.$$

I.6.80 Mines-Ponts MP 2023

Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^2 de S dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe si, et seulement si, il existe une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f .

I.6.81 X MP 2021

Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E . On dit que K est *précompacte* lorsque, pour tout $\delta > 0$, il existe une liste finie $(x_1; \dots; x_n)$ d'éléments de E telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta),$$

et on note alors $n(K, \delta)$ le plus petit de ces entiers n .

1. Montrer que si K est compact alors il est précompact.
2. On suppose E de dimension finie d . Soit K un compact d'intérieur non vide. Déterminer un équivalent de $\ln(n(K, \delta))$ lorsque δ tend vers 0^+ .
On pourra commencer par le cas où $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme infinie.
3. On considère ici l'espace vectoriel $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note K l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0. Montrer que K est précompact, puis déterminer un équivalent de $\ln(\ln(n(K, \delta)))$ quand δ tend vers 0^+ .

I.6.82 ENS MP 2025

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitziennes et 1-périodiques. Pour tout $a \in]0; 1]$, on note :

$$\|f\|_a = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^a}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur E pour tout $a \in]0; 1]$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-périodiques est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_1$.

I.6.83 Mines-Ponts PC 2022

1. Donner la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$?

Dans la suite, la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\cdot\|$. La sphère unité correspondante est notée S .

2. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur S . Ce maximum est noté $\|f\|$.
3. Pour tout couple $(f; g)$ d'éléments de $L(\mathbb{R}^n)$, prouver l'inégalité :

$$\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

4. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f\| < 1$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} f^k$ est convergente et que sa somme est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.6.84 Mines-Télécom MP 2022

On pose pour tout l'exercice $E = C([a; b], \mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E .
2. Justifier, oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

I.6.85 CCINP MP 2022

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E .

Montrer que K est fermé et borné.

On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C([0; 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

2. On admet dans un premier temps que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{inx}$.

- (a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
 - (b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.
3. (a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité :

$$|uv| \leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}.$$

En déduire que pour toutes fonctions f et g de E , et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx.$$

- (b) Soit $(f; g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :

$$h : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx,$$

démontrer que $\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

- (c) En déduire que $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

I.6.86 TPE/EIVP MP 2016

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E \setminus \{0\}, N(x) > 0$
- $N(0) = 0$
- $\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x + y) \leq |\lambda|N(x) + N(y)$

Montrer que N est une norme sur E .

I.6.87 Mines-Ponts MP

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in [a; b]^{\llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \in [a; b]^{\llbracket 1, n \rrbracket}$. On note E l'ensemble $C([a; b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'adhérence de l'ensemble

$$\{p \in P \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(x_i) = y_i\}$$

est

$$\{f \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_i) = y_i\}.$$

I.6.88 Centrale-Supélec MP 2018

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit K un compact de E .

Soit $f : K \rightarrow K$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x; y) \in K^2, \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un point fixe.

1. Montrer que l'hypothèse K compact est nécessaire, en considérant la fonction :

$$\begin{aligned} f : [1; +\infty[&\longrightarrow [1; +\infty[\\ x &\longmapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2. Montrer que, si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.
3. Montrer que f admet un point fixe.
4. On considère $x_0 \in \mathbb{K}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$U_N = \{u_n \mid n \geq N\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{U_N}.$$

- (a) Montrer que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
- (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points fixes de f . Conclure.

I.6.89 TPE/EIVP MP 2012

1. Soit $N_A : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $P \mapsto \sup_{x \in A} |P(x)|$.

À quelle condition sur A , l'application N_A est-elle une norme ?

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que N_A et N_B soient des normes. Comparer N_A et N_B .

I.6.90 ENS MP 2023

Montrer que l'intervalle $]0; 1[$ n'est pas réunion disjointe de fermés d'intérieur non vide.

I.6.91 X MP 2017

Soit $\omega = (\omega_1; \dots; \omega_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et G_ω le groupe défini par $G_\omega = \omega\mathbb{R} + 2\pi\mathbb{Z}^n$. On suppose que les ω_i sont liés dans $\mathbb{Q}$. Montrer que G_ω n'est pas dense dans $\mathbb{R}^n$.

I.6.92 ENS MP 2014

Pouvez-vous imaginer un espace topologique X connexe par arcs tel qu'il existe $x \in X$ tel que X ne soit pas localement connexe au voisinage de x ?

I.6.93 C.C.E. Mines PC 2015

Au point $(x; y)$ on associe $\sup\{|x + ty| \mid t \in [0; 1]\}$.

Montrer que cette application définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et préciser la boule centrée en $(0; 0)$ de rayon 1.

I.6.94 Navale MP 2018

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| \, dx.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E .

On dit qu'une suite $(f_p)_{p \geq 0}$ est une *suite de Cauchy* pour N_1 si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies N_1(f_{n+p} - f_n) \leq \varepsilon.$$

2. Montrer que, si la suite $(f_p)_{p \geq 0}$ est convergente pour la norme N_1 , alors c'est une suite de Cauchy pour la norme N_1 .
3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$

Montrer que la suite $(f_p)_{p \geq 1}$ est une suite de Cauchy pour la norme N_1 . Est-elle convergente pour cette même norme ?

I.6.95 X MP 2025

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $D \in \mathbb{N}$. Soit $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^d$, avec $p_0 = 0$.

On dit que $\{p_0, \dots, p_m\}$ se *plonge isométriquement* dans $\mathbb{R}^D$ s'il existe $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{R}^D$ tels que :

$$\forall i, j \in \{0; \dots; m\}, \quad \|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|.$$

1. On suppose que $p_0, \dots, p_m$ se plongent isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels des p_i . Montrer que $\{p; p_0; \dots; p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$.
2. On suppose que $\|p_i - p_j\| \in \mathbb{Q}$ pour tous i, j . Montrer que $\{p_0; \dots; p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4D}$.

On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que

$$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

I.6.96 ENS MP 2014

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K .

I.6.97 X-ENS Cachan PSI 2021

On considère $L^2([-1; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f; g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ et de la norme associée.

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers f si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers f si :

$$\forall \varphi \in C^1([-1; 1], \mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

1. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers f .
La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers f .
3. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers f de classe C^1 et si la suite $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|f\|$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers f .
4. Montrer que si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 qui converge uniformément vers φ , si $(\varphi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi uniformément et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge faiblement vers f , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi \rangle$.
5. On pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers la fonction nulle.

I.6.98 X-ENS Cachan PSI 2017

Soit $E = \{f \in C^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$.

2. Montrer que :

$$\forall t \in [0; 1], \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t (t-x)e^x g(x) dx.$$

3. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq a\|f\|.$$

Trouver le plus petit a vérifiant la relation précédente.

4. Existe-t-il $b > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\| \leq b\|f\|_\infty ?$$

I.6.99 ENS Lyon MP 2025

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ (avec $\|\cdot\|$ la norme 2).
 Soit $\Gamma = \{\gamma : [0; 1] \rightarrow S \text{ continu tel que } \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$.

Montrer qu'il existe une fonction $\theta : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $t \in [0; 1]$, $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$.

2. Soit $(\gamma_1; \gamma_2) \in \Gamma^2$.

On dit que γ_1 et γ_2 sont *homotopiques* si et seulement s'il existe $h : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continu tel que :

- $\forall t \in [0; 1]$ on a $h(t; \cdot) \in \Gamma$;
- $h(0; \cdot) = \gamma_1$;
- $h(1; \cdot) = \gamma_2$.

Est-ce que $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0; 1]$ sont homotopiques ?

3. Existe-t-il $F : B \rightarrow S$ continue telle que $F(x) = x$ pour $x \in S$?
4. Soit $f : B \rightarrow B$ continue.

Montrer que f admet un point fixe.

I.6.100 Mines-Ponts MP 2022

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ et N la norme sur E définie par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Vérifier que f est une norme.
2. La norme N est-elle équivalente à N_1 ?

On rappelle que, pour tout $f \in E$, $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

3. Soit

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & E \longrightarrow E \\ & & f \longmapsto f^2 \end{array}$$

L'application ϕ est-elle continue pour la norme N_1 ?

I.6.101 Centrale-Supélec MP 2012

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer les parties convexes de $\mathbb{R}$.
2. Soit K_0 et K_1 deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0; 1]$.

Montrer que $\theta K_0 + (1 - \theta)K_1$ est aussi un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$. On pose $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 1\}$.

Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $(A(K))^* = (A^{-1})^T(K^*)$.

3. Soit K un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$, contenant une boule ouverte de centre O . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists y \in K, x = \lambda y\}$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.6.102 ENS MP 2022

Étant donné $A > 0$, on dit qu'une partie V de $GL_n(\mathbb{C})$ est *A-bornée* si :

$$\forall M \in V, \quad \|M - I_n\| \leq A.$$

Quel est le plus petit $A > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial et A -borné de $GL_n(\mathbb{C})$?

I.6.103 ENS MP 2016

Soit p et q deux réels supérieurs à 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On admet sur $\mathbb{R}^n$ la relation :

$$\|x\|_q = \sup(\{\langle x, y \rangle \mid \|y\|_p \leq 1\}).$$

1. Soit u une isométrie pour $\|\cdot\|_p$ et A sa matrice dans la base canonique. Que peut-on dire de A^T ?
2. Dorénavant $p \neq 2$. Montrer que l'ensemble des isométries pour $\|\cdot\|_p$ est fini et calculer son cardinal.

I.6.104 ENS MPI 2022

On considère $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on note $\|P\|_0 = \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. On ne redémontrera pas qu'il s'agit d'une norme sur E . On note :

$$\|P\| = \|P\|_0 + \|P'\|_0 + \cdots + \|P^{(n)}\|_0.$$

Soit $S = \{P \in E \mid \deg(P) = n \text{ et } P \text{ a } n \text{ racines distinctes}\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
2. Montrer que S est un ouvert de E .

I.6.105 ENS MP 2026

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un compact de $L(E)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Un endomorphisme f de E est dit ε -isométrie si :

$$\forall x \in E, x \neq 0, \quad \left| \|f(x)\| - \|x\| \right| < \varepsilon \|x\|.$$

2. Montrer que si f est une ε -isométrie avec $\varepsilon < 1$, alors f^* est une ε -isométrie.
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$f \text{ est une } \varepsilon\text{-isométrie} \implies \text{dist}(f; \mathcal{O}(E)) \leq \delta.$$

I.6.106 Mines-Télécom MP 2025

Soit $E = \ell^1(\mathbb{C})$ (l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge).

Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Soit $F = \ell^\infty$ (l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées à valeurs dans $\mathbb{C}$).

Pour $u \in F$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$.

On définit pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = w$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que $\varphi : E \rightarrow F$ est continue et calculer sa somme.

I.6.107 Mines-Ponts PSI 2026

Soit E un espace vectoriel normé et H un hyperplan de E . On rappelle que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

1. Soit $a \in E \setminus H$. Montrer que H et $\text{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E .
2. Montrer que l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E contenant H .
3. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .
4. On considère $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

Soit encore

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Pour quelle norme H est-il fermé ou dense dans E ?

I.6.108 Mines-Télécom MP 2026

Soit E un espace vectoriel normé, $B = B(x_0, R)$ avec $x_0 \in E$ et $R > 0$.

Soit encore $A \subset B$, avec A compact non vide.

Montrer qu'il existe $R' \in]0; R[$ tel que $A \subset B(x_0, R')$.

I.6.109 X MP 2023

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|X\| \leq 1 \\ \|Y\| \leq 1}} |\langle AX, Y \rangle|.$$

3. On considère la matrice $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Majorer $\|M\|$ par une constante indépendante de n .

I.6.110 Mines-Télécom MP 2025

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux.

1. Soit p un projecteur.

Montrer que :

$$p \in \mathcal{K} \iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

2. Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie compacte.

I.6.111 Centrale-Supélec PSI 2026

On considère les applications $\mathcal{N} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définies comme suit :

$$\mathcal{N}(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|X\| = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme.
2. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\|AX\| \leq \mathcal{N}(A)\|X\|.$$

3. Soit $\alpha \in]0; 1[$. On considère l'ensemble

$$K_\alpha = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathcal{N}(A - I_n) \leq \alpha\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : K_\alpha &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A^{-1}) \end{aligned}$$

Montrer que φ est bornée et atteint ses bornes.

I.6.112 ENS MP 2024

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne. On considère un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$,

$$L_f(x; r) = \sup_{\|y-x\| < r} \|f(y) - f(x)\| \quad \text{et} \quad \ell_f(x; r) = \inf_{\|y-x\| \geq r} \|f(y) - f(x)\|.$$

1. Montrer que $L_f(x; r) = \sup_{\|y-x\|=r} \|f(y) - f(x)\|$.
2. De même, montrer que $\ell_f(x; r) = \inf_{\|y-x\|=r} \|f(y) - f(x)\|$.
3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé,

$$r \longmapsto L_f(x; r) \quad \text{et} \quad r \longmapsto \ell_f(x; r)$$

sont strictement monotones.

I.6.113 X 2018

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide.

Montrer que $\sup\{|P(z)| \mid z \in K\}$ est atteint sur la frontière de K .

I.6.114 Mines-Ponts MP 2026

Existe-t-il une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui soit invariante par similitude ?

I.6.115 Mines-Ponts 2019

Soit E un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E . Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

I.6.116 TPE/EIVP 2018

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E différent de E . Montrer que F est d'intérieur vide.

I.6.117 TPE/EIVP 2018

On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé constitué des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, C le sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. Calculer la distance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à C .

I.6.118 X 2025

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver les fonctions φ de E dans $\mathbb{R}$ linéaires et continues telles que :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(fg) = 0 \implies \varphi(f) = 0 \text{ ou } \varphi(g) = 0.$$

I.6.119 ENS

Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

I.6.120 X

Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.6.121 ENS

Trouver l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices cycliques de $M_n(\mathbb{C})$.

I.6.122 X

Trouver l'adhérence de $\mathcal{A} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$.

I.6.123 X

Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

I.6.124 ENS

Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.6.125 ENS

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière $\delta(K)$ est une courbe fermée de classe C^∞ . Montrer que, pour tout $n \geq 2$ on peut, en jouant au billard dans K , faire n rebonds et revenir au même endroit.

I.6.126 ENS

Soit M une partie majorée de $\mathbb{R}_+^*$ contenant au moins deux éléments et telle que pour tout $(a; b) \in M^2, \sqrt{ab} \in M$. Montrer que $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $[\inf M; \sup M]$.

I.6.127 ENS

1. Montrer qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion d'une famille d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints et que cette famille est au plus dénombrable.
2. Montrer que le segment $[0; 1]$ n'est pas réunion dénombrable de fermés non vides deux à deux disjoints.

I.6.128 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$;
- ii) pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est compact.

I.6.129 x

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de E , $a \in E$ et $d = \text{dist}(a; \mathcal{C})$.

1. Établir le *lemme de la médiane* : pour trois points A, B et C de E , et I le milieu de BC , on a

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

2. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $\|h - a\| = d$. Vérifier l'unicité de h . Le point h est le *projeté orthogonal de a sur $\mathcal{C}$* .
3. Soit $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\langle h - a, h - x \rangle \leq 0$.
4. En déduire lorsque $a \notin \mathcal{C}$, l'existence d'un demi-espace fermé qui contient $\mathcal{C}$ mais pas a .

I.6.130 Centrale PSI

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que les boules de E sont convexes.
2. Soit C une partie convexe de E . On suppose que C est dense dans E .
Montrer que $C = E$:
 - (a) dans le cas où $E = \mathbb{R}$;
 - (b) dans le cas général.

I.6.131 ENS MP

On appelle *parfait de $\mathbb{R}$* toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé.

1. Donner un exemple de parfait d'intérieur vide de $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de parfait de $\mathbb{R}$ ne coupant pas $\mathbb{Q}$.

I.6.132 ENS MP

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E et $C = \mathbb{R}_+ v_1 + \dots + \mathbb{R}_+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E .