

QUESTIONS D'ORAUX DE MATHÉMATIQUES DE CONCOURS D'ENTRÉE À DE GRANDES ÉCOLES FRANÇAISES

Partie III

Dénombrement et probabilités
Nombres complexes
Équations fonctionnelles
Divers

848 exercices



Hugo Duminil-Copin (né en 1985)

Vincent Genilloud

Dernière mise à jour : 25 octobre 2026

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Dénombrement et probabilités	7
2 Nombres complexes	86
3 Équations fonctionnelles	102
4 Divers	116

Introduction

Ce document est un recueil de questions d'oraux de mathématiques des concours d'entrée aux ENS (Écoles normales supérieures) et à de grandes écoles d'ingénieurs françaises. Il rassemble notamment des questions provenant de :

ENS (Ulm (Paris), Lyon, Paris-Saclay, Rennes)

X (École Polytechnique (Paris))

Centrale

Centrale-Supélec

Mines

Mines-Ponts

Mines-Télécom

ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État)

EIVP (École des Ingénieurs de la Ville de Paris)

ENSEA (École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications)

ENSIIE (École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise)

ENSAM (École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers)

CCINP (anciennement CCP) : Concours Commun INP (Instituts Nationaux Polytechniques)

La majorité des questions provient du site BEOS (Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles) ainsi que de vidéos disponibles en ligne. Je remercie chaleureusement tous les internautes dont les contributions ont permis la réalisation de ce document.

Les exercices sont numérotés et, dans la mesure du possible, chaque énoncé est précédé du nom de l'école, de la filière (par exemple MP, PC, PSI, etc.) ainsi que de l'année du concours. Aucune des questions présentées dans ce document ne requiert la maîtrise du langage de programmation Python ni d'un quelconque autre logiciel.

Une grande partie des exercices est issue des concours de mathématiques du CCINP (anciennement CCP) destinés aux étudiants de classes préparatoires scientifiques et visant l'admission dans les écoles d'ingénieurs du groupe INP.

Les questions ne se sont classées ni par école, ni par filière, ni par année, ni par niveau de difficulté !

Certaines questions comportaient un temps de préparation, tandis que d'autres devaient être traitées immédiatement.

Presque toutes les questions devaient être résolues sans recours à une calculatrice, à un formulaire ou à un dictionnaire.

En règle générale, les exercices les plus exigeants proviennent des concours des ENS (en particulier celui de Ulm) et de l'École Polytechnique, notamment pour la filière MP.

Notations

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}_-$	ensemble des entiers relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{R}_-$	ensemble des nombres réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{U}$	ensemble des nombres complexes de module 1
$\mathbb{U}_n$	ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité
$\llbracket a, b \rrbracket$	ensemble des nombres entiers k avec $a \leq k \leq b$ (a, b entiers)
i	le nombre complexe solution de l'équation $x^2 = -1$, d'affixe $(0, 1)$ dans un repère orthonormé direct
e	nombre d'Euler
j	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$
$\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$	plus petit commun multiple de $a_1, \dots, a_n$
$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$	plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_n$
$a \wedge b$	le plus grand commun diviseur de a et b
$a \mid b$	a divise b
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (coefficient binomial)
$\sigma(n)$	somme des diviseurs de n
$\text{Card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
$ E $	cardinal de l'ensemble E
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E
$[x]$	partie entière de x
$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\text{sgn}(x)$	signe de x
$\mathbb{K}$	corps commutatif
$\mathbb{K}^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\deg(P)$	degré du polynôme P

$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$	ensemble des polynômes en $X_1, \dots, X_n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{Z}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$c(P)$	contenu du polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$
$\mathbb{K}(X)$	corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$\mathbb{K}_{=n}[X]$	ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré égal à n
$\mathbb{K}_{<n}[X]$	ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur à n
$a \equiv b \pmod n$	a et b congrus modulo n
$\bar{x}$	classe de l'entier x modulo n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau des entiers modulo n
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_p$	corps des entiers modulo p (p premier)
$\mathbb{F}_p^*$	ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$
$\text{Nil}(A)$	ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A
$\text{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes de G
S_n	groupe symétrique de $\llbracket 1, n \rrbracket$
A_n	groupe alterné de degré n
$\varepsilon(\sigma)$	signature de la permutation σ
$A \cong B$	A isomorphe à B
D_f	ensemble de définition de f
Z_f	ensemble des zéros de f
G_f	graphe de f
$f \sim g$	f équivalent à g
$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ ne croît pas plus vite que $g(x)$
∇f	gradient de f
Δf	Laplacien de f
H_f	matrice hessienne de f
$J_f(x)$	jacobienne de f en x
χ_u	polynôme caractéristique de u
π_u	polynôme minimal de u
$\text{Ker}(u)$	noyau de u
$\text{Im}(u)$	image de u
$\text{rang}(u)$	rang de u
$\det(u)$	déterminant de u
$ A $	déterminant de la matrice A
$\text{perm}(A)$	permanent de la matrice A
$[x_1, \dots, x_n]$	produit mixte de $x_1, \dots, x_n$
$\text{com}(A)$	comatrice de A
$A \otimes B$	produit tensoriel de A et B
$C(u)$	commutant de u
$C^2(u)$	bicommutant de u

$\text{Tr}(u)$	trace de u
$\text{Sp}(u)$	spectre de u
$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$	spectre de u sur $\mathbb{K}$
$\text{Vect}(v)$	espace vectoriel engendré par le vecteur v
$\text{Vect}(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S
$\text{Vect}_A(S)$	espace vectoriel engendré par les éléments de S sur A
$S^\perp$	orthogonal de l'ensemble S
$\dim(E)$	dimension de l'espace vectoriel E
$\dim_{\mathbb{K}}(E)$	dimension du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E
$G \oplus H$	somme directe de G et H
$G \boxplus H$	somme directe orthogonale de G et H
$L(E)$	ensemble des endomorphismes de E
$GL(E)$	groupe linéaire général de l'espace vectoriel E
E^*	dual (algébrique) de E
$L(E, F)$	ensemble des applications linéaires de E vers F
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{Z})$	ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$
$SL_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$
$SL_n(\mathbb{Z})$	noyau du morphisme de groupes $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$
f^*	adjoint de f
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$	matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\ A\ $	norme subordonnée (à la norme $\ \cdot\ $) de A
$\text{cond}(A)$	conditionnement de la matrice A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire de x et y
$x \wedge y$	produit vectoriel de x et y ($x, y \in \mathbb{R}^3$)
$S_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^+(\mathbb{R})$	ensemble des matrices positives (semi-définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices définies positives de $M_n(\mathbb{R})$
$O_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$
$SO_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$
$A_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{O}(E)$	ensemble des isométries de E
$\mathcal{A}_n(E)$	ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .
ℓ^∞	ensemble des suites bornées
ℓ^p	ensemble des suites sommables pour la norme $\ \cdot\ _p$
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie

$\ \cdot\ _p$	p -norme
$B(x, R)$	boule ouverte de centre x et de rayon R
$B_f(x, R)$	boule fermée de centre x et de rayon R
$S(x, R)$	sphère de centre x et de rayon R
$\mathcal{P}$	ensemble des nombres premiers
$v_p(n)$	valuation p -adique de n ($p \in \mathcal{P}$)
$ \cdot _p$	valeur absolue p -adique
$ x - y _p$	distance p -adique entre x et y
$\mathbb{Q}_p$	complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance p -adique
F^E	ensemble des fonctions f de E vers F
$f _A$	restriction de la fonction f à A ($A \subset E$)
$\mathbf{1}_E$	fonction indicatrice de E
$C(E)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs réelles
$C(E, F)$	ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans F
$C^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe C^k sur E à valeurs dans F
$C^\infty(E, F)$	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur E , à valeurs dans F
$D^1(E, F)$	ensemble des fonctions différentiables sur E à valeurs dans F
$L^1(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles Lebesgue-intégrables sur E
$L^2(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles de carré Lebesgue-intégrable sur E
$L^\infty(E, \mathbb{R})$	ensemble des fonctions réelles bornées et Lebesgue-mesurables sur E
$\cos$	cosinus
$\sin$	sinus
$\tan$	tangente
$\cot$	cotangente
$\arccos$	arccosinus
$\arcsin$	arcsinus
$\arctan$	arctangente
arccot	arccotangente
$\cosh$	cosinus hyperbolique
$\sinh$	sinus hyperbolique
$\tanh$	tangente hyperbolique
arcosh	argument cosinus hyperbolique
arsinh	argument sinus hyperbolique
artanh	argument tangente hyperbolique
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\overset{\circ}{A}$	intérieur de l'ensemble A
$\operatorname{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\operatorname{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$\operatorname{dist}(A, B)$	distance entre A et B
$\mathbb{P}(E)$	probabilité de l'évènement E

$\mathbb{P}(E \mid F)$	probabilité conditionnelle de E sachant F
$\overline{E}$	complémentaire de l'évènement E
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\text{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\text{Cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
G_X	fonction génératrice des probabilités de X
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ
$X \hookrightarrow \mathcal{L}$	la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$

1 Dénombrement et probabilités

III.1.1 X-ENS

1. Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2 .
2. Montrer que si n est assez grand, a_n est la partie entière de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

III.1.2 Mines-Ponts MP 2021

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\mathbb{E} \left(\frac{X}{Y} \right) \geq 1$.

III.1.3 X-ENS

Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G pris au hasard commutent est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

III.1.4 Mines-Ponts

On suppose que la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{a \cdot 2^n}{n!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Trouver a .
2. Quelle est la probabilité que la famille ait au moins un garçon ?
3. La famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux enfants ?

III.1.5 Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ensemble qu'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que d divise n . On note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω .

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$.
2. Soit $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en nombres premiers de n . Les événements $(D_{p_i})_{i \in \{1, \dots, r\}}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n .

$$\text{Montrer que } \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

III.1.6 Mines-Ponts PC 2016

Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

III.1.7 x

On suppose que 80 hommes et 40 femmes défilent dans un ordre aléatoire. Montrer que la probabilité de ne jamais avoir deux hommes et deux femmes successivement est de l'ordre de 1 sur le nombre d'Avogadro.

III.1.8 Mines-Ponts PC 2024

Soit Ω un univers au plus dénombrable.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Caractériser les événements A indépendants de tout événement B .
2. Existe-t-il une probabilité sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que tous les événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants? Le cas échéant, caractériser toutes ces probabilités.

III.1.9 ENS MP

Soit un tirage aléatoire indépendant avec probabilité uniforme de deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelle est la probabilité que le produit de ces deux nombres soit nul?

III.1.10 Mines-Ponts MP

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{T}^2$. Calculer :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cup \overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{T}^n$. On pose $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$. Calculer :

$$\sum_{(B_1, \dots, B_n) \in \Gamma_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n).$$

III.1.11 CCINP PSI 2021

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. En développant de deux manières $(1 + X)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. En déduire la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.12 Mines-Télécom MP 2024

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.13 CCINP PC 2022

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.14 Mines-Ponts PSI 2019

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = P(Y = -n)$
- $|Y| \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \ (\lambda > 0)$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\text{rang}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.15 Mines-Ponts PSI 2019

Soit X, Y, Z, T des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de $\text{Tr}(A)$.
2. Calculer la probabilité que A soit inversible.
3. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.16 Centrale PC 2023

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \ (\lambda > 0)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.17 Mines-Télécom PC 2024

Soit X_1 , X_2 et Y des variables aléatoires indépendantes telles que X_1 et X_2 suivent la même loi, $P(Y = 1) = p$, $P(Y = -1) = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$).

On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $X_1 + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$. Calculer la probabilité que A soit inversible.
2. On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).
Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

III.1.18 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se réalise est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$.

III.1.19 ENS PC 2019

On lance cinq dés à six faces. Chaque dé affichant un 6 est écarté. On recommence cela jusqu'à ne plus avoir de dé et on note K la variable aléatoire égale au nombre d'étapes de cette expérience. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(K \leq n)$. En déduire la loi de K .

III.1.20 X MP/PC/PSI 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de S_n .

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la loi de X_n .
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left| \mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k) \right| = 0.$$

III.1.21 CCP MP

Soit $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On pose, pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Y_i = 1 + (e - 1)X_i \quad S_n = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \quad M_n = \left(\prod_{i=1}^n Y_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Déterminer les lois de Y_i et de $\ln(Y_i)$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{E}(t^{\ln(X_i)}) = G_{X_i}(t)$ et que $\mathbb{E}(t^{\ln(Y_i)}) = G_{\ln(Y_i)}(t)$.
 - (b) Calculer $G_{S_n}(t)$.
 - (c) Donner $\mathbb{E}(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
2. Trouver une relation entre S_n et M_n .
3. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(M_n^2)$ à l'aide de G_{S_n} , puis en déduire $\text{Var}(M_n)$.

III.1.22 Mines-Ponts MP

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs strictement positives, avec $X(\Omega)$ fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes suivant la loi de X . Calculer l'espérance de

$$\frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\sum_{k=1}^n X_k}.$$

III.1.23 Mines-Ponts 2023

Soit $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. (*fonction zêta*)

On définit la probabilité $\mathbb{P}_\alpha$ sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\mathbb{P}_\alpha(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, soit $A_m = \{qm \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}_\alpha(A_m)$.
2. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que les évènements A_{p_k} sont indépendants.
3. En déduire le *produit eulérien* :

$$\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}.$$

III.1.24 CCP MP

On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes des lois de Bernoulli de paramètre p_i non nécessairement tous égaux. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$.
2. Déterminer les valeurs de $p_1, \dots, p_n$ pour que $\text{Var}(S)$ soit maximale.
3. Déterminer la loi de S dans le cas où $\text{Var}(S)$ est maximale, et calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$.

III.1.25 Mines-Télécom MP 2023

On considère n tulipes qui ont chaque année une probabilité $p \in]0, 1[$ de fleurir. Si une tulipe fleurit une année, alors elle fleurira toutes les années suivantes. Soit les variables aléatoires suivantes :

- X_i : année de la première floraison de la $i^{\text{ème}}$ tulipe
- X : année à partir de laquelle toutes les tulipes ont fleuri

1. Exprimer X en fonction des X_i .
2. Donner la loi des X_i .
3. Si $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$.
4. En déduire que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.26 X MP 2023

Soit X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, soit $u_n(r) = \mathbb{P}(X_n \neq Y_n, (X_n Y_n) \text{ de pente } r)$. Trouver un équivalent de $u_n(r)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

III.1.27 CCINP MP 2025

Un homme peint un mur en étant placé sur un échafaudage, des passants passent sous son échafaudage et ont chacun une probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire toucher par une goutte de peinture. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées en une journée et Y celui du nombre de personnes qui ne sont pas touchées. On suppose que n personnes passent dans la journée.

1. Donner les lois de X et Y , puis dire si X et Y sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que N personnes passent dans la journée et que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y , puis l'espérance et la variance de X .
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\text{Cov}(X, N)$. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

III.1.28 CCP

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
 - (b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

III.1.29 CCINP

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 . Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « La boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche. » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

III.1.30 CCP MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

III.1.31 CCP MP

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par

$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

2. Calculer λ .
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Justifier.

III.1.32 CCP MP

On admet, dans cet exercice, que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et } \forall x \in]0, 1[, \quad \sum_{k=q}^{+\infty} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).

On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.

Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.

La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.

Les tirs de laser sont indépendants.

La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.

Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X .
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

III.1.33 CCP MP

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

III.1.34 CCP MP

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C .

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A .

Quand il a puisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'évènement « L'animal est en A après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On note B_n l'évènement « L'animal est en B après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On note C_n l'évènement « L'animal est en C après son $n^{\text{ème}}$ trajet. ».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
(b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

$$2. \text{ On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
- (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
- (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n .

III.1.35 Mines 2016

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Montrer que $\frac{1}{X}$ est bien définie et calculer son espérance.

III.1.36 CCP MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

III.1.37 CCP MP

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

III.1.38 CCP 2016

Une machine à sous tire au hasard un entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$: si T est l'entier tiré, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}$. Si le nombre tiré n est pair, le joueur gagne n points, si le nombre tiré n est impair, le joueur perd n points.

1. Justifier qu'une telle loi de probabilité est cohérente. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Soit G la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer l'espérance de G .

III.1.39 CCP 2016

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire qui a pour loi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer la constante a .
2. La variable X admet-elle une espérance ? une variance ? Expliciter sa fonction génératrice.

III.1.40 Mines-Télécom PC 2018

Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires. On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2. Soit l'évènement : « Tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. » et $P_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer P_1 .
2. Calculer P_{n+1} en fonction de P_n .
3. Calculer P_n en fonction de n .

III.1.41 X PC 2019

On munit l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ de la distribution uniforme. On note P_n la probabilité qu'une permutation n'ait aucun point fixe. Calculer P_n et sa limite pour $n \rightarrow +\infty$.

III.1.42 X ESPCI 2017

La durée de vie d'une ampoule électrique comptée en années est représentée par une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Si l'ampoule fonctionne toujours au bout de n années, quelle est la durée moyenne pendant laquelle elle fonctionnera encore ?

III.1.43 TPE/EIVP 2016

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Donner la fonction génératrice de X . Quel est son rayon de convergence ?
3. La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

III.1.44 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

III.1.45 Mines-Ponts PC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

III.1.46 X ESPCI

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

III.1.47 ENSEA/ENSIIE PSI

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que :

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}, \quad \text{avec } N = \lfloor \lambda \rfloor.$$

III.1.48 Mines-Télécom

On pose une série de questions indépendantes, et on note p_k la probabilité de répondre correctement à la question k . On pose $r_k = p_1 \cdots p_k$.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions justes avant le premier échec. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge. Prouver qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$.

III.1.49 Centrale PC

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose, de plus, que $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k^2) = \sigma \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note T_1 la fonction indicatrice de l'ensemble $(|S_1| > \alpha)$, et pour tout $m \geq 2$, T_m la fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{m-1} (|S_k| \leq \alpha) \cap (|S_m| > \alpha)$.

- (a) Montrer que $\sum_{i=1}^n T_i$ est l'indicatrice de l'évènement :

$$\exists k \in \{1, \dots, n\}, |S_k| > \alpha.$$

- (b) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T_i S_n^2) \leq \sigma^2.$$

- (c) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathbb{E}(T_k S_k^2) \leq \mathbb{E}(T_k S_n^2).$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1, \dots, n\}, |S_k| > \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Conclure que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |S_n| > \alpha\right) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

III.1.50 Mines-Télécom PC 2017

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme ?

III.1.51 X-ENS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$,

$$|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Quel est le cas d'égalité ?

III.1.52 CCINP MP

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'évènement : « La puce est en O après n sauts. ». On note $\mathbb{P}(C_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(C_{2n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{2n})$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$ en admettant que $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.
3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{n}^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.
 - (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$.

III.1.53 Mines-Télécom PSI 2024

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p , avec $p \in]0, 1[$. On pose $Z = \frac{X}{Y}$.

1. Montrer que $Z \leq X$ et que Z admet une espérance et une variance finies.
2. Calculer l'espérance de Z .
3. Donner la loi de Z .

III.1.54 Mines-Télécom MPI 2025

Soit une matrice aléatoire $M \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix},$$

où X et Y sont deux variables indépendantes, suivant une même loi géométrique. Déterminer la probabilité que la matrice M soit nilpotente.

III.1.55 Mines-Ponts PC 2022

On choisit au hasard $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $n \geq 2$. Quelle est la probabilité que f soit surjective ?

III.1.56 Mines-Télécom PSI 2022

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

III.1.57 Mines-Télécom PSI 2024

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall i, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = k) = a \frac{i + k}{2^{i+k}}.$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

III.1.58 Mines-Télécom MP 2021

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Soit $p \in]0, 1[$. On pose :

$$\forall n \geq k, \quad \mathbb{P}(n) = \binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}.$$

Montrer que P définit bien une loi de probabilité.

III.1.59 Mines-Ponts MP 2016

On considère un meuble à huit tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p . Lorsque cet objet est dans le meuble, il a autant de chances de se trouver dans un tiroir que dans un autre. On a ouvert sept tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble.

III.1.60 ENSAE MPI 2025

Soit A_2 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 dont les coefficients sont contenus dans $\{-1, 0, 1\}$. On munit A_2 de la probabilité uniforme.

1. Quel est le cardinal de A_2 ?
2. Quelle est la probabilité qu'une matrice de A_2 soit inversible ?
3. Quelle est la probabilité que la matrice soit exactement de rang 1 ?

III.1.61 TPE/EIVP MP 2017

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$. On tire au hasard et avec remise A, B des parties de E , les deux tirages étant successifs et indépendants. Calculer la probabilité que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

III.1.62 Mines-Ponts MP 2024

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(|X|) = 0$.

Montrer que X est *presque-sûrement nulle*, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|X| > 0) = 0$.

III.1.63 CCINP MP 2023

On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec une probabilité de $\frac{1}{2^n}$. On note A_k l'évènement : « Le nombre n est un multiple de k . ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

III.1.64 Mines-Télécom MP 2024

On dispose de N coffres. Il y a une probabilité p que le trésor se trouve dans ces coffres. Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor. Sachant que le trésor n'était pas dans les $N - 1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

III.1.65 CCINP PSI 2025

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. En admettant la formule de Vandermonde, déterminer l'espérance de X .

III.1.66 Mines 2022

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n . On tire une poignée de boules. On replace cette poignée dans l'urne et on mélange. On tire une deuxième poignée. Déterminer la probabilité que les deux poignées n'aient aucune boule en commun.

III.1.67 CCINP PC 2021

Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant être ou non correcte) avec la probabilité p , ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1 - p$. On note A_n l'évènement « La $n^{\text{ème}}$ personne reçoit correctement l'information initiale. », et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis exprimer p_n en fonction de n .

III.1.68 ENS PC 2023

On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « pile », la probabilité d'obtenir « pile » à chaque lancer étant p . On note ℓ le rang du lancer auquel « pile » est obtenu. Puis, on lance ℓ fois un dé à 6 faces et pour gagner le jeu il faut obtenir 6 une seule fois. Déterminer p de sorte que la probabilité de gagner soit maximale.

III.1.69 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note Y le reste de la division euclidienne de X par p . Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

III.1.70 Mines PSI 2024

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4k!}.$$

1. Déterminer a .
2. Déterminer l'espérance de X .
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

III.1.71 Mines-Télécom MP 2024

On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On pioche les boules 2 par 2 et sans remise. Quelle est la probabilité que l'on tire exactement une boule blanche et une boule noire à chaque tirage ?

III.1.72 Mines-Télécom PC 2022

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Rappeler la loi de X et son espérance.
2. Trouver la loi de V et son espérance.
3. Que vaut $U + V$? En déduire l'espérance de U .

III.1.73 CCINP TSI 2022

On considère un dé truqué à $2n$ faces, pour lequel la probabilité de tomber sur la face k est proportionnelle à k^3 .

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Calculer la probabilité que le dé tombe sur la face k .

III.1.74 Mines-Ponts MP 2022

Montrer qu'une intersection dénombrable d'évènements presque certains est un évènement presque certain.

III.1.75 X MP 2021

On considère une urne avec 10 000 boules dont 6 000 rouges et 4 000 vertes. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré toutes les boules. Déterminer la probabilité que l'on ait en permanence plus de boules rouges que de boules vertes durant ces tirages.

III.1.76 Mines-Télécom MP 2024

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2)$. On pose $Z = XY$.

1. Donner l'espérance de Z .
2. Donner la loi de Z .

III.1.77 Mines-Télécom MP 2025

On a un QCM de 40 questions. Chaque question comporte 4 choix et 1 seule bonne réponse existe. Un élève y répond au hasard. Chaque bonne réponse rapporte 3 points et chaque mauvaise en fait perdre 1. On note les variables aléatoires X_i qui valent 1 si la réponse à la $i^{\text{ème}}$ question est bonne, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de points.

1. Donner la loi de X_i .
2. Donner la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y .
4. En utilisant l'inégalité de Pafnouti (Tchebychev), majorer p , la probabilité d'avoir une note supérieure à 60.

III.1.78 Mines-Ponts MP 2018

Soit $r > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^r dx.$$

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

III.1.79 Mines-Ponts MP 2022

On considère $2p + 1$ lumières disposées en cercle. À l'instant initial, seules deux lumières adjacentes sont allumées. À chaque instant, on éteint toutes les lumières et, pour chaque lumière qui était allumée à l'instant précédent, on allume une des deux lumières adjacentes avec une équiprobabilité. On note N la variable aléatoire indiquant le premier instant où une seule lumière est allumée. Déterminer la loi de N , puis son espérance pour $p = 2$.

III.1.80 Mines-Télécom PSI 2023

Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\frac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n clients durant sa journée de travail. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N .
2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

III.1.81 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que X et λX suivent la même loi. Que dire de X et λ ?

III.1.82 Mines-Télécom MP 2021

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On considère X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X(\Omega)$ est fini. Montrer que :

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

2. On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et que X et $f(X)$ admettent des espérances finies. Montrer que l'inégalité ci-dessus reste vraie.

III.1.83 CCINP MP 2018

Une puce se déplace sur un triangle équilatéral ABC . Elle se situe initialement en A .

Si elle est en A à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement « La puce est en A (resp. B, C) à l'instant n . ».

On note u_n (resp. v_n, w_n) le nombre $\mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$).

1. (a) Déterminer $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ en fonction de u_n, v_n, w_n .

- (b) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X_n = M^n X_0$.

2. (a) Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n .
(b) Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow +\infty$? Expliquer.

III.1.84 Mines-Ponts MP 2023

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X_1$, avec $X_1 \geq 0$.

Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

III.1.85 Mines-Télécom MP 2018

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\exp(-b)a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

1. Donner les lois de X et de Y , ainsi que leur espérance.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
3. Donner la loi de $Z = X - Y$.

III.1.86 CCINP TSI 2022

On pose 20 questions sous forme de QCM à un candidat. Pour chaque question, il y a k ($k > 2$) réponses possibles, une seule est correcte.

Si le candidat trouve la bonne réponse du premier coup, il marque 1 point.

Si le candidat trouve la bonne réponse au second essai, il marque 0,5 point.

Sinon il ne marque aucun point.

Déterminer la valeur de k pour que le candidat, qui répond au hasard, ait 5/20 en moyenne.

III.1.87 CCINP MP 2021

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On pose $Y = (-1)^X$.

1. Calculer la loi de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

III.1.88 TPE/EIVP PC 2021

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire sans remise une à une les boules. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée porte le numéro i et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i .
2. Lorsque l'on vide entièrement l'urne, combien de fois peut-on espérer que le numéro d'une boule ait coïncidé avec son rang dans le tirage?

III.1.89 Mines-Télécom MP 2025

1. Calculer

$$\text{Card} \left(\left\{ (A, B) \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})^2 \mid A \subset B \right\} \right).$$

2. On choisit au hasard deux parties A et B de $\{1, \dots, n\}$.
Quelle est la probabilité que l'une soit incluse dans l'autre?

III.1.90 TPE/EIVP MP 2017

On dispose d'une urne contenant n boules. À chaque tirage, on tire une boule, on la marque et on la remet dans l'urne. Les tirages sont indépendants. On note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules marquées au bout de n tirages.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Trouver un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.91 Centrale-Supélec PC 2017

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir pile, donc une probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir face. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs (et l'expérience s'arrête). Donner la loi de X et son espérance.

III.1.92 Mines-Télécom MP 2019

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$.

Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Donner le domaine de définition de la fonction génératrice G_X , son expression et étudier sa continuité.

III.1.93 Mines-Ponts MP 2019

Soit n un entier naturel non nul. On organise un tournoi de football entre $2n$ équipes : n de première division, n de deuxième division.

1. On note a_n la probabilité que chaque match fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer a_n , en donner un équivalent.
2. On note b_n la probabilité qu'aucun match ne fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer b_n , en donner un équivalent.

III.1.94 ENSEA/ENSIIE MP 2025

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Interpréter.
2. Trouver les lois de U et V .
3. Calculer l'espérance de U . Interpréter.

III.1.95 ENSEA/ENSIIE MP 2016

Alice et Bob sont des correspondants téléphoniques. Ils appellent au hasard des clients. Alice a une probabilité $p_A \in]0, 1[$ de signer un contrat et une probabilité $q_A \in]0, 1[$ d'effectuer une erreur de saisie dans le contrat. On définit de même p_B et q_B pour Bob. Alice étant plus avenante, on a $p_A > p_B$. Un contrat a été signé et comporte une erreur de saisie.

1. Quelle est la probabilité qu'Alice s'en soit chargée ?
2. On suppose que ce contrat a été traité par Alice ou Bob avec la même probabilité. Comparer q_A et q_B .

III.1.96 CCINP MP 2016

Marcel effectue N tirages dans une urne contenant b boules blanches en ivoire et n boules noires en chocolat. Lorsqu'il tire une boule en chocolat, il la mange.

1. (a) Quelle est la probabilité que Marcel mange au moins une boule en chocolat ?
(b) Quelle est la probabilité que Marcel mange une et une seule boule en chocolat ?
2. Marcel mange une et une seule boule en chocolat. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la dernière boule tirée ?

III.1.97 x ESPCI

On considère n droites vectorielles de $\mathbb{R}^d$. On suppose que les angles qu'elles forment deux par deux sont tous égaux. Montrer que :

$$n \leq \binom{d+1}{2}.$$

III.1.98 ENS MP 2016

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer :

$$A_n = \left\{ (x_i)_{i \in [1, r]} \in (\mathbb{N}^*)^r \mid \sum_{i=1}^r x_i = n, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer :

$$B_{n,k} = \left\{ (x_i)_{i \in [1, k]} \in (\mathbb{N}^*)^k \mid \sum_{i=1}^k x_i = n, r \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

III.1.99 Mines-Télécom MP 2023

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On suppose aussi que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi de Y conditionnée à $X = i$ est la loi binomiale de paramètre $n - i$ et p . Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

III.1.100 Mines-Télécom MP 2017

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Montrer que :

$$\mathbb{P} \left(\frac{X}{n} - p \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\varepsilon}.$$

III.1.101 Mines-Télécom MPI 2025

On lance n boules dans N boîtes de manière indépendante. La probabilité qu'une boule tombe dans une boîte suit une loi uniforme.

1. On pose Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans la boîte k , et Z_k la variable aléatoire valant 0 si la $k^{\text{ème}}$ boîte est vide, et 1 sinon. Déterminer les lois des variables Y_k et Z_k .
2. Les variables Z_k sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. On pose T_n la variable aléatoire comptant le nombre de boîtes contenant au moins une boule à l'issue de n lancers. Calculer l'espérance de T_n .
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

III.1.102 CCINP PSI 2022

Soit $p, q \in [0, 1]$ tels que $p + q = 1$.

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires réelles telles que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et :

$$\forall (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}((X = j) \cap (Y = k)) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Quelles sont les lois marginales de X et Y ? Que vaut $\mathbb{E}(Y)$?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$.

III.1.103 CCINP TSI 2022

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant une *loi de Rademacher*, c'est-à-dire :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = -1) = 1 - p.$$

Déterminer la loi de $Y = \prod_{k=1}^n X_k$.

III.1.104 Mines-Télécom PC 2024

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit $Z = X + Y + 1$ qui suit une loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler l'espérance, la variance et la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
2. Donner l'espérance et la variance de X .

III.1.105 Mines-Ponts MP 2022

On considère un mobile Z qui se déplace aléatoirement à droite ou à gauche, sur un axe orienté. À l'instant 0, le mobile est à l'origine. Lorsqu'il est à l'abscisse $n \in \mathbb{Z}$, le mobile fait un bond B_n dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(B_n = k) = ap^{|k|} \text{ avec } p \in]0, 1[.$$

On suppose que les bonds sont indépendants.

1. Déterminer a .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse où se trouve le mobile après n bonds. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_n \geq n) \leq \frac{p}{n(1-p)^2}.$$

III.1.106 Mines-Ponts MP 2022

Soit a, b, m trois nombres réels vérifiant $a \leq m \leq b$. On considère l'ensemble des variables aléatoires discrètes X qui vérifient $\mathbb{E}(X) = m$ et $a \leq X \leq b$.

1. Qualitativement, que caractérise la variance ?
2. Déterminer le maximum des $\mathbb{E}(X^2)$ pour X dans l'ensemble considéré.

III.1.107 Centrale-Supélec TSI 2025

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = XX^T$.

1. Soit R la variable aléatoire égale au rang de la matrice M . Déterminer la loi de R .
2. Soit T la variable aléatoire égale à la trace de la matrice M . Déterminer la loi de T .
3. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur.

III.1.108 Mines-Ponts MP 2024

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in]0, 1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, et telles que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent la loi géométrique de paramètre p . Soit enfin Z la variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) + Y(\omega) \\ X(\omega) \end{pmatrix}.$$

À quelle(s) condition(s) Z admet-elle une espérance finie ? une variance finie ? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ quand elle est finie.

III.1.109 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $p \in]0, 1[$. Un petit garçon se promène dans un jardin et ramasse un nombre aléatoire N de feuilles. Pour une feuille donnée, la probabilité qu'il la trouve jolie vaut p .

1. Déterminer la probabilité qu'il trouve toutes les feuilles jolies.
2. Le nombre de feuilles qu'il trouve jolies est une variable aléatoire notée X . Exprimer sa loi à partir de la loi de N .
3. Dans chacun des trois cas suivants, déterminer la loi de X .
 - (a) La loi de N est une loi de Poisson.
 - (b) La loi de N est une loi géométrique.
 - (c) La loi de N est une loi binomiale.

III.1.110 Centrale-Supélec PC 2016

Soit N une variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ . La probabilité qu'un œuf éclore est p .

1. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule. Déterminer la loi de D .
2. Les variables D et N sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de $N - D$ et D ?
3. Comment retrouve-t-on la loi de N à partir de celles de $N - D$ et de D ?

III.1.111 Centrale-Supélec PSI 2017

Soit X une variable aléatoire. S'il existe, on note $\mu(n) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n)$ son moment centré d'ordre n . On dit que X admet un *Kurtosis*, si X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et des moments centrés $\mu(2), \mu(3), \mu(4)$. Dans ce cas on note

$$K(X) = -3 + \frac{\mu(4)}{\mu(2)^2} = -3 + \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)}{(\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2))^2}$$

son Kurtosis.

1. Montrer que si X admet un Kurtosis, alors $aX + b$ admet aussi un Kurtosis et que $K(aX + b) = K(X)$.
2. Calculer $K(X)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
3. Montrer que pour toute variable aléatoire X , on a $K(X) \geq -2$.
4. Existe-t-il $M > 0$ tel que pour toute variable aléatoire X , on ait $K(X) \leq M$?

III.1.112 Mines-Télécom MP 2017

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ .

1. Donner la fonction génératrice de X et de $3Y$.
2. Soit $Z = 3Y + X$. Donner la fonction génératrice de Z .
3. Donner l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ et la variance $\text{Var}(Z)$ de Z .
4. Donner le minimum de $\text{Var}(Z + tX)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

III.1.113 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probablisé. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. Soit encore $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant la même loi et admettant une variance. On pose :

$$S_n = \sum_{\ell=0}^n X_\ell \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{\ell=0}^n X'_\ell.$$

En supposant $\mathbb{E}(X_1) \neq \mathbb{E}(X'_1)$, étudier la convergence de $\mathbb{P}(S_n < S'_n)$.

III.1.114 Mines-Ponts MP 2017

Une bactérie mortelle menace l'espèce humaine d'extinction. Heureusement, des scientifiques ont développé un remède miracle pour la combattre : un super rayon laser. En sachant qu'ils ont une probabilité $p \in]0, 1[$ de toucher la bactérie à chaque tir, et que la bactérie a $r \in \mathbb{N}^*$ points de vie, donner la probabilité que la bactérie meure lors du $k^{\text{ème}}$ tir, puis déterminer l'espérance du nombre de tirs nécessaires pour que les scientifiques viennent à bout de la bactérie, et sauvent ainsi l'humanité.

III.1.115 TPE/EIVP MP 2019

Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise et si on tire une boule rouge, on la remet avec 2 autres boules rouges. Soit l'évènement $A_n = \ll \text{Lors des } n \text{ premiers tirages, on a eu des boules rouges.} \gg$. On convient que $\mathbb{P}(A_0) = 1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_n)$.
3. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

III.1.116 CCINP TSI 2019

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = q^n p$, où $q = 1 - p$. On note aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, $Y + 1$ et S .
2. Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p , puis donner $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.
3. Déterminer la loi de S .
4. Soit $I = \min(X, Y)$. Montrer que $\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2k}$ et en déduire la loi de I . Calculer $\mathbb{E}(I)$ et $\text{Var}(I)$.

III.1.117 CCINP PSI 2018

Soit $p \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k (1 - p)^{k-1}$.

1. Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.
 - (a) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}(X - 1)$.
 - (b) En examinant son existence, déterminer $\mathbb{E}((X - 1)(X - 2))$.
3. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

III.1.118 Mines-Ponts PC 2018

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p . On note A_n : « Au $n^{\text{ème}}$ lancé on obtient pour la première fois deux piles consécutifs. ». On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 .
2. Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n .
3. Pourquoi est-il quasi certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

III.1.119 ENS MP 2018

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que XY suit une loi de Poisson. Montrer que X ou Y ne prend presque sûrement que la valeur 0 et 1, c'est-à-dire que X ou Y appartient presque sûrement à $\{0, 1\}$.

III.1.120 Mines-Ponts PC 2018

Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (respectivement 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0, 1[$, (respectivement $p_2 \in]0, 1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
2. Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
3. Pour quelles valeur de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

III.1.121 Mines-Ponts MP 2015

Soit n couples (homme/femme) de danseurs. Lorsque la musique change, les membres des couples doivent trouver un nouveau partenaire de sexe opposé. Déterminer la probabilité que tous les couples nouvellement formés soient différents des couples initiaux. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.122 Centrale-Supélec MP 2016

Soit x, y et n trois entiers naturels vérifiant $0 \leq x, y \leq n$. On considère deux joueurs E et F et un chapeau dans lequel on dispose de n jetons, dont x jetons sont marqués d'un X et y jetons d'un Y . Le jeu se décompose en deux temps :

Le joueur E tire consécutivement deux jetons avec remise. S'il tire deux fois un jeton marqué d'un X , il a gagné.

Si le joueur E n'a pas gagné, alors c'est au joueur F de tirer consécutivement deux jetons avec remise. Si il tire deux fois un jeton marqué d'un Y , alors il a gagné.

Si aucun des joueurs n'a gagné, alors on recommence.

1. Déterminer la probabilité q qu'aucun des deux joueurs ne gagne au premier tour.
2. Déterminer la probabilité que le joueur E gagne, que le joueur F gagne puis qu'aucun des deux joueurs ne gagne.

Un triplet (a, b, c) d'entiers est dit *pythagoricien* s'il vérifie $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Montrer que le jeu est équilibré, c'est-à-dire que les deux joueurs ont la même probabilité de gagner, si et seulement s'il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) tel que $x = ab$, $y = ac$ et $n = bc$.

III.1.123 Mines-Ponts MP 2017

Des personnes $P_1, \dots, P_n$ se transmettent un signe $+$ ou $-$ avec la probabilité p de le passer inchangé et la probabilité $q = 1 - p$ de le changer. La personne 1 reçoit le signe $+$. Sachant que la personne n a reçu un signe $+$, quelle est la probabilité que P_1 ait transmis son signe sans le changer ?

III.1.124 CCINP PC 2021

1. Soit Y une variable aléatoire discrète telle que :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}, \mathbb{E}(Y) = 1 \text{ et } \mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{3}.$$

Calculer p_0, p_1, p_2 , où $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

2. Soit X un variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

On suppose connaître $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2), \dots, \mathbb{E}(X^n)$.

Comment faire pour calculer $p_0, p_1, \dots, p_n$?

III.1.125 CCINP MP 2017

On dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n . On tire p boules simultanément. Les variables aléatoires X et Y représentent respectivement le maximum et le minimum des numéros tirés.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^n \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}.$$

2. (a) Quel est le nombre de tirages différents ?
(b) En déduire la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{n!} \frac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}.$$

(c) Déterminer l'espérance de X .

3. (a) Déterminer la loi de Y .
(b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{p+1}$.

III.1.126 CCINP MP 2017

1. En exprimant $(X+1)^{2n}$ de deux manières, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
2. Deux joueurs tirent chacun une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus de « pile ». Quelle loi suit le nombre de « pile » obtenu par un joueur ? Donner son espérance et sa variance.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un gagnant.
4. Donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de la probabilité calculée précédemment.

III.1.127 Mines-Ponts MP 2023

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

III.1.128 ENS MP 2024

Soit G un groupe fini de cardinal N . On considère A une partie aléatoire de G . On note $AA = \{ab \mid (a, b) \in A^2\}$.

1. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(1 \in AA) = 1$.
2. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(AA = G) = 1$.

III.1.129 Mines-Ponts MP 2021

On étudie la diffusion d'une information. Il y a une probabilité p qu'une personne trouve cette information intéressante à tout instant. Si une personne trouve cette information intéressante à un instant n , elle la diffuse à N personnes, qui sont alors au courant à l'instant $n+1$. À l'instant $n=0$, une seule personne a l'information. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant reçu l'information à l'instant n et qui l'ont trouvée intéressante. On pose $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
2. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1} , p et N .
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III.1.130 Mines-Ponts MP 2021

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leq m \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Établir la loi de Z .
2. Établir les espérances de X, Y et Z .
3. Trouver les valeurs de m maximisant $\mathbb{E}(Z)$.

III.1.131 Mines-Ponts MP 2018

On tire n fois une pièce à pile ou face. La variable aléatoire X compte le nombre de « face » obtenus. À partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver n tel que la probabilité que

$$\left| \frac{X}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{100}$$

soit supérieure à 0,99.

III.1.132 Mines-Ponts PC 2017

On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel. On effectue une deuxième vague d'appels à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel. On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la $j^{\text{ème}}$ personne a répondu.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Donner la loi de Y_j .
3. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .

III.1.133 Mines 2022

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définisse une distribution de probabilité. L'hypothèse « f de classe C^1 » est-elle nécessaire ?

III.1.134 CCINP PSI 2022

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . On note :

$$Y_n = X_{n+1} + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Énoncer la loi faible des grands nombres.
2. Les variables Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n .
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - 2p| \geq \varepsilon) = 0.$$

III.1.135 CCINP PSI 2021

Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N .
2. Pour tout $(k, n) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = k, N = n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$. En déduire la loi de X .
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

III.1.136 Mines-Ponts MP 2017

On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a \left(\frac{\alpha^k + \beta^k}{k!} \right)$ avec $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de α et β peut-on définir un $a \in \mathbb{R}$ pour lequel la probabilité est bien définie ? Quelle est alors cette valeur de a ?
2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson ?

III.1.137 ENS MP 2019

Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n possède un cycle de taille strictement supérieure à $\frac{n}{2}$.

III.1.138 ENSAM PSI 2018

On considère un jeu de ballon et trois joueurs, notés A , B et C . Le joueur A envoie le ballon à B avec une probabilité de 0.75, B envoie toujours le ballon à C , C envoie le ballon à A avec une probabilité de 0.25 et à B avec une probabilité de 0.75.

On note A_n l'évènement « Le joueur A possède le ballon à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer. » et on considère de même B_n et C_n . On note a_n la probabilité de l'évènement A_n et on note de même b_n et c_n .

Au début du jeu, c'est le joueur A qui a le ballon.

1. Donner a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n . Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} .
2. Montrer que :

$$\exists M \in M_3(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer M .

3. Déterminer la limite de a_n, b_n, c_n , quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.139 TPE/EIVP MP 2016

On a une urne avec 2 boules vertes et 6 boules blanches et on effectue des tirages avec remise. On note X_n le nombre de boules vertes obtenues après n tirages et $F_n = \frac{X_n}{n}$

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance, ainsi que l'espérance et la variance de F_n .
3. Pour $n = 10\,000$, notons : $A = \{F_n \in]0.22, 0.26[\}$.
Minorer $\mathbb{P}(A)$.
4. Trouver n tel que $\mathbb{P}(A) \geq 0.99$.

III.1.140 CCINP MP 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dont la loi de couple est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X .
4. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$.
 - (a) Justifier que B est diagonalisable.
 - (b) En calculant B^2 , déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espaces propres associés.

III.1.141 ENS MP 2017

Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que X et $X + \varepsilon$ soient de même loi, où ε est une variable aléatoire indépendante de X qui vaut $+1$ ou -1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$?

III.1.142 Mines-Ponts PC 2015

On considère une urne contenant une proportion p dans $]0, 1[$ de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X la longueur de la première suite de même couleur, Y la longueur de la deuxième.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X .
3. Idem pour Y .
4. Vérifier rapidement que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.

III.1.143 CCINP PSI 2016

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur. Donner G et calculer son espérance.

III.1.144 Centrale-Supélec MP 2015

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $\mathbb{P}$ une probabilité. Montrer que Y admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n)$ converge.

III.1.145 ENSEA/ENSIIE MP 2015

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$.

Déterminer le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^{N+1}}$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi de probabilité :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}.$$

Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.146 TPE/EIVP MP 2018

On dispose de n pièces numérotées. La $k^{\text{ème}}$ pièce a une probabilité $\frac{1}{2k+1}$ de donner « pile ».

- On note u_i la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » après avoir lancé les i premières pièces. Exprimer u_{i+1} en fonction de i et u_i .
- Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de « pile » en lançant toutes les pièces ?

III.1.147 CCINP PC 2023

On pose :

$$\forall x \in]0, 1], \quad \varphi(x) = -x \ln(x).$$

1. Donner le tableau de variations de φ sur $]0, 1]$.

Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

On appelle *entropie* de X , lorsqu'elle existe, la quantité :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n).$$

2. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p . Montrer que X admet une entropie et la calculer.

On revient au cas général d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que celle-ci est d'espérance finie.

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = 0$.
(b) Montrer que $\sqrt{p_n} \ln^2(p_n) \leq 4$.
- Déduire de la question 3 que :

$$0 \leq -p_n \ln(p_n) \leq np_n + \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}} \sqrt{np_n}.$$

5. En déduire que X admet une entropie.

III.1.148 Mines-Ponts MP 2021

Soit $r > 0$.

1. Montrer que la relation

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^1 r x^{k-1} (1-x)^r dx$$

définit bien une probabilité d'une variable aléatoire X dans $\mathbb{N}^*$.

2. Préciser pour quelle valeur de r la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

III.1.149 CCINP PC 2022

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n + 2) = 4\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

Déterminer la loi de X .

III.1.150 Mines-Ponts PSI 2025

Déterminer le nombre de parties A de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad i \in A \text{ ou } i+1 \in A.$$

III.1.151 X MP 2017

Un polygone à $2n$ sommets est inscrit dans un cercle. On trace n cordes de telle sorte qu'elles ne se croisent pas (même en un point). On note p_n le nombre d'arrangements de ces cordes.

1. Montrer que $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k}$.
2. Calculer p_n .
3. Donner un développement asymptotique de p_n .

III.1.152 Mines-Ponts MP 2018

Soit une urne remplie de a boules blanches et de b boules d'une autre couleur. On tire successivement et sans remise toutes les boules de cette urne. On note X la variable aléatoire représentant le numéro du tirage où la dernière boule blanche a été tirée.

1. Soit $p < q$. Vérifier que $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Soit $n \in X(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$.

III.1.153 Mines-Télécom MP 2018

On dispose de deux boîtes A et B . Initialement, A contient deux jetons marqués « 0 », et B deux jetons marqués « 1 ». On tire un jeton au hasard de A , que l'on échange avec un jeton tiré au hasard de B . On répète l'expérience indéfiniment. On note X_n la somme des valeurs des jetons situés dans A au bout de n tirages.

Pour tout n , on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout n , exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
2. Pour tout n , exprimer U_n en fonction de n .
3. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

III.1.154 Mines-Ponts MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $]0, 1[$. On considère n variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes suivant chacune une loi binomiale : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m_i, p_i)$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale si, et seulement si, les p_i sont tous égaux.

III.1.155 Mines-Télécom MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = \mathbb{P}(X_{ij} = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $m_{ij} = X_{ij}$ pour tout (i, j) .

1. Calculer l'espérance de $\text{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
3. Calculer la probabilité que $\text{rang}(M) = 1$.

III.1.156 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $p \in]0, 1[$. On considère des cellules susceptibles de se diviser en deux (avec une probabilité p) ou de mourir (avec une probabilité $1 - p$).

On suppose qu'il y a exactement une cellule à la génération 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la génération n . En particulier, la variable aléatoire X_0 vaut 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n .

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .
2. Déterminer l'univers image $X_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, montrer l'égalité $g_{n+1}(t) = g_n(g_1(t))$.

III.1.157 CCINP MP/MPI 2026

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

III.1.158 Mines-Télécom PC 2024

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, μ et $Z = X + Y$.

1. Lequel de ces deux événements est le plus probable :
 - X est pair ;
 - X est impair ?
2. Déterminer $\max_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)$.
3. Montrer de deux façons différentes que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En donner l'espérance et la variance.

III.1.159 Mines-Ponts MP 2024

1. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Calculer de deux manières l'espérance de S_n^4 .

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
Montrer que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement presque sûrement vers la loi constante $\frac{1}{2}$.

III.1.160 X MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note T_n le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, n)$ et $(n, 0)$.

1. On note R_n l'ensemble des rectangles inclus dans T_n , dont les sommets sont à coordonnées entières et dont les côtés sont horizontaux et verticaux. Calculer $|R_n|$.
2. Soit U_n l'ensemble des rectangles dont les sommets sont à coordonnées entières et qui sont inclus dans un rectangle de R_n . Les côtés des rectangles de U_n ne sont pas nécessairement horizontaux ou verticaux. Calculer $|U_n|$. En donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.161 Mines-Ponts PC 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C des points d'affixes a, b, c dans $\mathbb{U}_n$.

1. Combien y a-t-il de triangles non aplatis de sommets A, B, C ?
2. Combien d'entre eux sont rectangles ?

III.1.162 Mines-Ponts MP 2019

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, de cardinal n . On définit $B = A + A$ par :

$$B = \{a + a' \mid (a, a') \in A^2\}.$$

1. Montrer que $2n - 1 \leq \text{Card}(B) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ et que ces inégalités sont optimales.
2. Peut-on généraliser pour $B = kA = \underbrace{A + \cdots + A}_{k \text{ fois } A}$?

III.1.163 Mines-Ponts MP 2022

Soit $p \in]0, 1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On note Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \min(m, (X - 1)(\omega)).$$

Calculer l'espérance et la variance de Y .

III.1.164 CCINP MP 2015

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3×3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 2$. Montrer que la classe du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes r_{ij} de la division euclidienne de a_{ij} par 2.
2. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\text{Card}(\mathcal{M})$.
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M} \mid \det(M) \text{ est impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\text{Card}(\Omega)$ et $\text{Card}(\Delta)$.
4. Détermination de $\text{Card}(\Delta)$.
 - (a) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1. Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
 - (b) On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
 - (c) Calculer $\text{Card}(\Delta)$.
 - (d) En déduire $\text{Card}(\Omega)$.
5. Déterminer la probabilité p .

III.1.165 CCINP MP 2019

Soit E un ensemble à n éléments. On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E .

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$.

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence non nul.

3. Calculer $e^x f(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n .

5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'évènement « Aucun des n élèves n'a sa propre copie. ».

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

III.1.166 Mines-Ponts MP 2019

Soit $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = a \frac{\alpha^n + \beta^n}{n!}$.

1. Déterminer une condition sur (α, β) pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que vaut alors a ?

2. La variable X peut-elle suivre une loi de Poisson ?

3. Généraliser à $p_n = a \frac{\alpha_1^n + \dots + \alpha_k^n}{n!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

III.1.167 ENS Lyon

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Les variables X et Y sont indépendantes.

ii) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\mathbb{E}(P(X)Q(Y)) = \mathbb{E}(P(X))\mathbb{E}(Q(Y))$.

III.1.168 Mines-Ponts MP

Soit p_1, p_2 et p des réels de $]0, 1[$, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2 . Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?

2. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soit réelles ?

3. Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la probabilité que les valeurs propres de M soient dans l'ensemble $S = \{\rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}_+^*, |\theta| \leq \theta_0\}$?

III.1.169 TPE/EIVP

Soit X, Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de même loi uniforme sur $E = \{0, \dots, n\}$. Soit encore $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

En déduire $\mathbb{E}(T)$.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs entières dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer une relation entre $\sum_{j=1}^k \mathbb{P}(U \geq j)$ et $\mathbb{E}(U)$.

(b) Trouver de même une relation entre $\sum_{j=1}^k j^2 \mathbb{P}(U \geq j)$ et $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(U^2)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.

Retrouver $\mathbb{E}(T)$ à l'aide de la question 2(a).

III.1.170 Centrale-Supélec PSI 2022

Soit ξ une variable aléatoire discrète suivant la loi de Rademacher, ne prenant que les valeurs -1 et 1 , avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(u\xi)) \leq \exp\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

- On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par le produit scalaire sur $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- Soit $M = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.
- On considère une matrice colonne $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ telle que $\|X\| = 1$.
- Soit $\zeta = MX$ et $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de ζ dans la base canonique de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{P}(|\zeta_i| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

3. En déduire l'existence d'une constante $C \geq 0$, indépendante de n , telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\zeta_i^2}{4}\right)\right) \leq C.$$

III.1.171 Mines-Télécom PC 2019

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

III.1.172 Mines-Ponts

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance, centrée avec $|X| \leq 1$.
Montrer que e^{tX} admet une espérance et que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose de plus, que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|X_i| \leq a_i$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

III.1.173 Mines-Télécom MP 2017

Considérons un dé équilibré à six faces.

1. Dans cette première question, on effectue 10 lancers de dé indépendants. Soit T la variable aléatoire qui donne le premier lancer où l'on obtient 6. (On supposera que si l'on n'obtient aucun 6, alors $T = 0$.)

Déterminer la loi de T .

Dans les questions suivantes, on ne limite plus le nombre de lancers de dés. Notons T_n la variable aléatoire renvoyant le numéro de lancer où l'on obtient le $n^{\text{ème}}$ 6.

2. (a) Déterminer la loi de T_1 .
(b) Calculer la fonction génératrice de T_1 , son rayon de convergence et sa somme.
3. (a) Déterminer la loi de $T_2 - T_1$.
(b) Calculer la fonction génératrice de $T_2 - T_1$, son rayon de convergence et sa somme.
(c) En déduire la loi de T_2 .

III.1.174 X-ENS Cachan PSI 2021

Soit A, B deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & A - B & 0 \\ 0 & A & A - 1 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

III.1.175 ENS PC 2025

Une urne contient n boules, dont r rouges. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, notons N_k le nombre de boules tirées au moment où on tire la $k^{\text{ème}}$ boule rouge. Calculer $\mathbb{E}(N_k)$.

III.1.176 CCINP MP 2023

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, 5 boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Déterminer la loi de Y .

III.1.177 Centrale-Supélec MP 2015

Soit Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Montrer que Y admet une espérance si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq k)$$

converge et que dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

III.1.178 Centrale-Supélec MP 2015

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ admettant une variance et telle que l'on ait $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit encore $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X < k)$.

Montrer que $S_n \sim n$ et préciser cette propriété asymptotique.

III.1.179 Centrale-Supélec MP 2017

On considère une urne contenant n boules. Il y a b boules blanches et les autres sont rouges. On effectue une succession de tirages avec remise et à chaque tirage on tire sans remise et dans l'ordre deux boules de l'urne. Si les deux sont de la même couleur on les remet dans l'urne, si elles sont de couleurs différentes on remet deux boules de la première couleur tirée.

On note X_k la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches et on note $U_k = (\mathbb{P}(X_k = i))_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur associé à l'état de l'urne après le $k^{\text{ème}}$ tirage.

1. Calculer la matrice A_n telle que $U_{k+1} = A_n U_k$.
2. On se place dans le cas où $n = 4$. Calculer A_4 et son polynôme caractéristique.
3. Étudier la limite de A_4^m quand m tend vers l'infini.

III.1.180 ENS PC 2025

Soit f une fonction convexe avec $f'' \geq 2a$ et X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que :

$$\mathbb{E}(f(X)) - f(\mathbb{E}(X)) \geq a \text{Var}(X).$$

III.1.181 ENS PC 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$X_n = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2} \right\} \right|.$$

Estimer X_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.1.182 ENS PC 2025

Soit X de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour un réel $\lambda > 0$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = O_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{e}{4} \right)^\lambda \right).$$

III.1.183 ENS PC 2025

Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tirée aléatoirement parmi les $n!$ permutations possibles avec une loi uniforme.

1. Donner la loi de la longueur du cycle de σ contenant 1.
Par exemple, si $\sigma = (1 \ 4 \ 2)(3 \ 5)$, la longueur est 3.
2. Calculer l'espérance du nombre de cycles de σ .

III.1.184 ENS PC 2025

On note S_{2n} l'ensemble des permutations sur $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. Calculer la moyenne :

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + \dots + |\sigma(2n-1) - \sigma(2n)|).$$

III.1.185 ENS PC 2025

Considérons deux joueurs de tennis étant du même niveau (chaque jeu est gagné avec la probabilité $\frac{1}{2}$).

1. Quelle est la probabilité qu'ils atteignent le tie-break (6-6) ?
2. Calculer :

$$\sum_{k < n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}}.$$

III.1.186 ENS PC 2025

Soit N une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On lance N pile ou face équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de faces ?

III.1.187 ENS PC 2025

Une urne contient n boules, dont une seule rouge. On tire, sans remise, des boules uniformément au hasard, l'une après l'autre. Quand on tire la boule rouge, on a une chance sur deux de s'arrêter, et une sur deux de la remettre dans l'urne, remélanger, et poursuivre le tirage. Combien de boules auront été tirées, en espérance, quand on s'arrête ?

III.1.188 ENS PC 2025

Calculer l'espérance de la norme 1 d'un point pris uniformément dans l'hypercube $\llbracket -n, n \rrbracket^d$, et en calculer un équivalent quand n tend vers $+\infty$. Faire le même exercice avec la norme infinie.

III.1.189 ENS PC 2025

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$ dont les entrées sont aléatoires avec $(M_{ij})_{i \leq j}$ indépendantes qui suivent une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note $\lambda_1(M)$ sa plus grande valeur propre. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que pour k suffisamment grand,

$$c(1-p)^k \leq \mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \leq C(1-p)^{\frac{k}{3}}.$$

1. Montrer que $\lambda_1(M) \geq M_{11}$.
2. Montrer que $\lambda_1(M)^2 \leq \text{Tr}(M^2)$.
3. Conclure.

III.1.190 ENS PC 2025

On dit qu'une variable aléatoire est de *Rademacher* si elle prend les valeurs 1 et -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Soit X une variable aléatoire de Rademacher. Montrer que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(e^{\gamma X}) \leq e^{\gamma^2}.$$

2. Soit $(X_n)_{n=1}^{2025}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes et $(c_n)_{n=1}^{2025}$ une suite de réels (non triviale). On pose :

$$Y = \sum_{n=1}^{2025} c_n X_n.$$

Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{t^2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}.$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y| > \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{4(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}}.$$

III.1.191 ENS PC 2025

On joue à pile ou face et on note p la probabilité d'avoir « Face », $q = 1-p$ la probabilité d'avoir « Pile » et l'évènement A_n suivant :

« Il n'y a pas eu 2 résultats « Face » de suite lors de n lancers. »

Donner un équivalent de $\mathbb{P}(A_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.1.192 ENS PC 2025

On note $C(Z) = \mathbb{E}(Z^4) - 3\mathbb{E}(Z^2)^2$.

1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$.
Montrer que :

$$C(X + Y) = C(X) + C(Y).$$

2. Soit $(h_n)_{n=1}^N$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Montrer que :

$$\left(\sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^2 \leq \mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=1}^N c_n h_n \right)^4 \right).$$

III.1.193 ENS PC 2025

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un point A dans $\left\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\right\}$ uniformément. On considère la fonction $t \mapsto x(t)$ définie sur $t \in [0, 1]$ par $x(0) = 1$, $x'(t) = -1$ pour $t \in [0, A]$, $x'(t) = x(t)$ pour $t \in [A, 1]$.

1. Montrer que l'on a toujours $x(t) \geq 0$.
2. Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x(1))$.

III.1.194 ENS PC 2025

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires bornées indépendantes et identiquement distribuées, et $\lambda \in]0, 1[$. On pose :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - \lambda)u_n + X_n.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f avec $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = 0$ telle que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\lambda u_n - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq f(\lambda).$$

III.1.195 ENS PC 2025

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ de carré intégrable et $t > 0$. Montrer que pour tout $c > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + t) \leq \frac{\text{Var}(X) + c^2}{(t + c)^2}.$$

En déduire que :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X) + t^2}.$$

III.1.196 ENS PC 2025

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_0, A_1, \dots, A_d$ des variables aléatoires indépendantes telles que A_k est de loi géométrique de paramètre e^{-k} , et soit P le polynôme $P = \sum_{k=0}^d A_k X^k$ (vu comme polynôme dans $\mathbb{C}[X]$). On tire aléatoirement une racine de P et selon une loi uniforme (avec multiplicité) et l'on note R cette racine. Calculer $\mathbb{E}(R)$.

III.1.197 ENS PC 2025

Soit $N \in \mathbb{N}$. On prend un point $X = (x_1, x_2)$ aléatoirement dans la grille $\llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket$ uniformément. On définit une fonction f sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ par $f(0) = 0$ et pour $x \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$f(x+1) = f(x) + 1 + \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq x_1 \text{ et } x_2 \leq f(x_1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{f(N)}{N} \right)$.
2. On prend maintenant k points aléatoirement, on note P_k l'ensemble de ces points et on prend

$$f_k(x+1) = f_k(x) + 1 + \text{Card}(\{(x_1, x_2) \in P_k \mid x \geq x_1 \text{ et } x_2 \leq f(x_1)\}).$$

Montrer qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tous $k \geq 1$ et $N \geq 1$,

$$C_1 \leq \frac{\mathbb{E}(f_k(N))}{kN} \leq C_2.$$

III.1.198 C.C.E. Mines PC 2019

1. Rappeler la loi de Poisson. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance (avec démonstration).
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

III.1.199 C.C.E. Mines PC 2016

Soit N le nombre de visiteurs d'un parc par jour. Le nombre N suit une loi de Poisson de paramètre 4000. Le parc possède 4 entrées et chaque visiteur se dirige vers une entrée indépendamment des autres visiteurs. Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes empruntant l'entrée 1 chaque jour.

1. Donner le nombre moyen de visiteurs empruntant les entrées du parc chaque jour.
2. Donner la loi de probabilité de X .

III.1.200 Navale MP 2021

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $\lambda > 0$ et N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que si g est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(Ng(N)) = \lambda \mathbb{E}(g(N+1))$.
2. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et telle que pour toute fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(Tg(T)) = \lambda \mathbb{E}(g(T+1))$ et telle que $\mathbb{E}(g(T+1)) < +\infty$. Montrer que T suit une loi de Poisson.

III.1.201 X MP 2025

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et identiquement distribuées. On pose :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad V_m = \frac{1}{S_1} + \cdots + \frac{1}{S_m}.$$

1. Montrer que, avec une probabilité de 1, la suite $(V_m)_{m \geq 1}$ converge dans l'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
2. On suppose désormais que $X_1 \in L^2$. Construire une suite $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que :

$$\begin{cases} n_k \geq 2n_{k-1} \\ \mathbb{P}(S_{n_k} \geq 2n_k \mathbb{E}(X_1)) \leq 2^{-k} \end{cases}$$

3. Montrer, qu'avec une probabilité de 1, on a :

$$\exists K > 0, \forall k > K, \quad S_{n_k} \leq 2n_k \mathbb{E}(X_1).$$

4. Soit ℓ la limite de la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ (c'est une variable aléatoire). Montrer que :

$$\mathbb{P}(\ell = +\infty) = 1.$$

5. Montrer que :

$$\text{Var}(V_m) \leq \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \left(\frac{1}{S_k^2} \right).$$

III.1.202 PT 2026

La cible d'un jeu de fléchettes est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte. Lorsque la cible est atteinte par le joueur, la probabilité d'atteindre la zone verte est de $\frac{1}{2}$. Le joueur A atteint toujours la cible et le joueur B atteint la cible avec la probabilité $p \in [0, 1]$.

1. On note X le nombre de lancers nécessaires pour que le joueur A atteigne la zone verte. Donner la loi de la variable aléatoire X , son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que le joueur B atteigne la zone verte.
3. Le gagnant est celui qui atteint la zone verte le premier. Le joueur A joue en premier.
 - (a) Calculer la probabilité que le joueur A gagne le jeu.
 - (b) Le jeu se finit-il presque sûrement ?

III.1.203 Navale MP 2017

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\mathbb{P}(X \geq kY)$.

III.1.204 PT 2016

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne accompagnée de $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X_1 .

Que représente $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$ où $p \in \mathbb{N}^*$?

2. Soit $(p, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k)$ et en déduire que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c \mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$.

3. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.1.205 PT 2017

Coralie se lève tous les matins pour aller au lycée avec une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être en retard. Lorsque c'est le cas, elle prend toujours le bus, sinon elle s'y rend à pied avec une probabilité de $\frac{2}{5}$. On désigne par B l'évènement « Coralie prend le bus » et par R l'évènement « Coralie est en retard ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(R \mid B)$.

On observe ces faits pendant 180 jours et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Coralie prend le bus.

2. Reconnaître la loi de X . Calculer son espérance et sa variance.
3. Combien de fois, en moyenne, est-elle allée au lycée à pied ?

III.1.206 ENS MP 2017

Soit U_n une variable aléatoire entière suivant une loi uniforme entre 1 et n . On note T_n le plus grand diviseur premier de U_n . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n^2 \mid U_n) = 0$.

III.1.207 C.C.E. Mines MP 2019

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Donner les lois de $\text{rang}(M)$ et de $\text{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

III.1.208 Mines-Ponts MPI 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n . On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de boules différentes piochées avant d'avoir un doublon, donc de piocher une boule déjà piochée auparavant. On travaille évidemment avec remise dans cet exercice.

1. Donner la loi de N .
2. Montrer que :

$$1 + \mathbb{E}(N) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

III.1.209 Mines-Télécom PC 2025

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \mathbb{P}(X = n) \quad \text{et} \quad r_n = \mathbb{P}(X > n).$$

On note G la fonction génératrice de X .

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} r_n t^n$ vaut au moins 1.

Sa somme est notée H .

2. Pour tout $t \in]-1, 1[$, justifier l'égalité $H(t) = \frac{1 - G(t)}{1 - t}$.

III.1.210 CCINP PC 2023

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$. Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes.

III.1.211 Centrale-Supélec MP 2022

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit les variables aléatoires suivantes : X_n et Y_n à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\mathbb{P}(X_n = p, Y_n = q) = \begin{cases} \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!} a^p b^q c^{n-p-q} & \text{si } p + q \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec a, b et c dans $]0, 1[$ tels que $a + b + c = 1$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; on note G sa fonction génératrice et on suppose que N est indépendante des variables X_n et Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $U = X_N$ et $V = Y_N$.

1. Soit $x, y \in [0, 1]$. Montrer que la variable $x^U y^V$ admet une espérance finie notée $e(x, y)$ et que :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad e(x, y) = G(ax + by + c).$$

2. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$.

Justifier que l'on a :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad e(x, y) = e(x, 1)e(1, y).$$

3. Réciproquement, on suppose que :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad e(x, y) = e(x, 1)e(1, y).$$

Montrer que N suit une loi de Poisson.

III.1.212 CCP PC 2016

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On considère une variable aléatoire Y telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $X = n$ soit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Trouver la loi de Y .

III.1.213 Mines-Ponts MP 2025

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Rademacher uniforme :

$$X_1(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_2 = X_1 + \dots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}(e^{tS_n})$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées et centrées telles que $|X_1| \leq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

III.1.214 Mines-Ponts PSI 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

On pose :

$$A = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

1. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. On suppose désormais que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. De plus, on suppose les A_n indépendants.
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} \geq 1 - x$.
 - (b) Montrer que, pour tout $(N, M) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N \leq M$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=N}^M \bar{A}_n\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=N}^M \mathbb{P}(A_n)\right)$$

- (c) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

III.1.215 Mines-Télécom PC 2016

On considère trois urnes.

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 boules noires.

L'urne U_2 contient 5 boules blanches et 5 boules noires.

L'urne U_3 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

On pioche une boule dans U_1 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_2 .

On pioche ensuite une boule dans U_2 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_3 . On pioche enfin une boule dans U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité que les trois boules piochées soient de la même couleur.

III.1.216 Mines-Ponts PC 2016

Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.

Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ tel que $\mathbb{P}(Z = k) \geq \frac{4}{9}$.

III.1.217 Mines-Ponts PC 2016

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Prouver la majoration $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Prouver la majoration $\mathbb{P}(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

III.1.218 Mines-Télécom PC 2016

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fait les hypothèses suivantes :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid x_n = 1) = 0,2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 0,4.$$

On note $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n .
2. En déduire une expression de x_n .
3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(X_n)$ et de $\text{Var}(X_n)$.

III.1.219 Mines-Ponts PSI 2024

On considère une urne composée de n boules :

- une est rouge,
- b sont blanches,
- $n - b - 1$ sont noires.

On note $p = \frac{b}{n-1}$.

L'expérience consiste à tirer des boules avec remise et de s'arrêter lorsque la boule rouge est tirée.

On note :

- T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués en incluant celui de la boule rouge,
 - X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées.
1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ dont on calculera la somme.
 2. Donner la loi de probabilité de T .
 3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = i \mid T = k)$.
 4. En déduire la loi de X , calculer son espérance et sa variance.

III.1.220 ENS MP 2019

Soit E un ensemble au plus dénombrable. Soit μ, ν des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On introduit également $X \hookrightarrow \mu$ et $Y \hookrightarrow \nu$ des variables aléatoires indépendantes.

On définit la *distance en variation totale* par :

$$d_{\text{vt}}(\mu, \nu) = \sup_{A \subseteq E} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Montrer que :

$$\begin{aligned} d_{\text{vt}}(\mu, \nu) &= \frac{1}{2} \sup_{f \in E^{[-1,1]}} |\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})|. \end{aligned}$$

On pourra chercher une partie $\tilde{A}$ et une fonction $\tilde{f}$ qui atteignent les bornes supérieures respectives.

2. Désormais, $E = \mathbb{N}$. Pour μ et ν des mesures sur E , on note $\mu * \nu$ la loi de $X + Y$, où $X \hookrightarrow \mu$, $Y \hookrightarrow \nu$, X et Y indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n$ des mesures de probabilités. Montrer que :

$$d_{\text{vt}}(\mu_1 * \dots * \mu_n, \nu_1 * \dots * \nu_n) \leq \sum_{i=1}^n d_{\text{vt}}(\mu_i, \nu_i).$$

On pourra commencer par le cas $n = 2$.

III.1.221 Mines-Télécom MP 2026

Soit $p \in]0, 1[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

III.1.222 CCINP MP 2025

On considère une pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile.

On lance la pièce jusqu'à obtenir 2 piles.

On pose X la variable aléatoire donnant le nombre de faces obtenus.

Si $X = n$, on met $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne.

On tire une boule et on note Y son numéro.

1. Quelle est la loi de X ? La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Même question pour Y .

III.1.223 Mines-Télécom MP 2025

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p . Soit la variable $Y = |X_2 - X_1|$.
Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_2 - X_1 = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire la loi de Y .
3. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
4. Exprimer $\mathbb{E}((X_2 - X_1)^2)$ en fonction de $\text{Var}(X_1)$.

III.1.224 Mines-Ponts PSI 2026

1. Donner la décomposition en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$.
Donner en outre le rayon de convergence de cette série entière.
2. Trouver des conditions sur le couple $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ pour que la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ soit bien définie. On donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = r \binom{2n}{n} s^n.$$

3. On suppose maintenant que ces conditions sont vérifiées. Montrer que G_X (définie sur $[0, 1]$) vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1 - 4s)y' = 2sy.$$

4. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

III.1.225 Mines-Télécom PSI 2026

On dispose de n personnes qui lancent chacune et simultanément une pièce de monnaie, ces dernières étant toutes équilibrées.

1. Déterminer la probabilité d'avoir au moins un résultat différent des autres.
2. Soit X la variable aléatoire qui dénombre le nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'au moins un résultat différent. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

III.1.226 Mines-Télécom MP 2026

Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On définit M une matrice de taille n à coefficients réels telle que :

$$m_{ij} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

et on définit deux matrices colonnes de taille n à coefficients réels telles que :

$$(L_X)_i = \mathbb{P}(X = i) \quad \text{et} \quad (L_Y)_j = \mathbb{P}(Y = j).$$

1. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $\text{rang}(M) = 1$.
2. Inversement, on suppose que $\text{rang}(M) = 1$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

III.1.227 Mines-Télécom MP 2025

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant des lois de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{2}$.

Soit

$$T = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid X_m = X_{m+1} = 1\}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = 2)$.

Soit A_m l'évènement : « On n'obtient jamais deux 1 consécutifs lors des m premiers tirages et $X_m = 1$. ».

Soit B_m l'évènement : « On n'obtient jamais deux 1 consécutifs lors des m premiers tirages et $X_m = 0$. ».

On note $p_m = \mathbb{P}(A_m)$ et $q_m = \mathbb{P}(B_m)$.

2. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} \\ q_{m+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{P}(T = m) = \frac{F_m}{2^{m+1}}$$

où $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci.

4. Calculer $\mathbb{P}(T = +\infty)$.

III.1.228 Mines-Télécom MPI 2026

Soit f définie par :

$$f(t) = \frac{t}{2 - t^2}.$$

1. Donner le développement en série entière en 0 de f , ainsi que le rayon de convergence de cette série entière.
2. Existe-t-il une variable aléatoire X telle que la fonction génératrice de X soit égale à f ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X .

III.1.229 X ESPCI

On dispose d'un sac avec n cordes. À chaque étape, on tire au hasard deux extrémités de cordes, qu'on noue entre elles. Si elles sont les extrémités d'une même corde, on obtient une boucle qu'on met de côté. Sinon, on obtient une nouvelle corde qu'on remet dans le sac. On effectue des tirages tant qu'il reste des cordes dans le sac.

1. Calculer la probabilité p_1 qu'au premier tirage, les deux extrémités forment une boucle.
2. Déterminer l'espérance du nombre N_k de boucles après k tirages.

III.1.230 Mines

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire simultanément deux jetons. On note X le numéro du plus petit numéro tiré, Y le numéro du plus grand.

1. Donner les lois de X et de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

III.1.231 Centrale

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$. On considère l'évènement

$$A : |f(X) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$|\mathbb{E}(f(X)) - f(x_0)| \leq \varepsilon + 2M \mathbb{P}(\bar{A}).$$

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$.

III.1.232 Mines-Ponts PSI 2026

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $M = (X, Y)$ la loi conjointe de X et Y .

Soit d_1 et d_2 deux droites du plan réel. Soit p_1 et p_2 des projecteurs orthogonaux sur d_1 et d_2 respectivement.

On note $Z_k = (p_1 \circ p_2)^k(M)$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\mathbb{E}(\|Z_k\|^2)$.

III.1.233 Mines-Télécom PSI 2026

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération.

On note X la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la première boule blanche. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $u_n = \mathbb{P}(X > n)$ la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.

1. Exprimer u_n sous la forme d'un produit, puis montrer que l'on a :

$$u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

2. On rappelle l'équivalent suivant pour $n \rightarrow +\infty$:

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. En déduire que l'évènement « Tirer au moins une boule blanche. » est presque sûr.
4. La variable X admet-elle une espérance ? Interpréter ce résultat en lien avec celui de la question précédente.

III.1.234 CCINP PSI 2026

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à l'évènement $(X = n)$, Y suit une loi binomiale.

Déterminer, pour tout entier k , la probabilité $(Y = k)$ sachant $(X = n)$. En déduire la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi de $X - Y$.

III.1.235 Mines-Télécom PSI 2026

Une marque de céréales insère dans chacune de ses boîtes une figurine à collectionner. La collection complète comporte n figurines distinctes ($n \geq 2$).

On suppose que lors de l'achat d'une boîte, la figurine obtenue est tirée au hasard de manière uniforme parmi les n modèles possibles, et que les achats successifs sont mutuellement indépendants.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note T_k le nombre d'achats nécessaires pour obtenir une $k^{\text{ème}}$ figurine distincte, après en avoir déjà collectionné $k - 1$ distinctes.

Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, justifier que la loi de T_k est une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Donner son espérance $\mathbb{E}(T_k)$ et sa variance $\text{Var}(T_k)$.

2. On note $X_n = \sum_{k=1}^n T_k$ la variable aléatoire modélisant le nombre de boîtes qu'il faut acheter pour obtenir la collection complète. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$.
3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale usuelle, déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Les variables $T_1, \dots, T_n$ étant mutuellement indépendantes et sachant que $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donner un équivalent de $\text{Var}(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.1.236 Oral Mines-Télécom PSI 2026

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $p = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p' = \mathbb{P}(Y = 0)$. À tout $\omega \in \Omega$, on associe la matrice

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ pour que $M(\omega)$ soit diagonalisable.
2. En déduire $\mathbb{P}(M \text{ est diagonalisable})$ en fonction de p et p' .
3. On suppose désormais en plus que X et Y ont la même loi.

Montrer que

$$\mathbb{P}(M \text{ est diagonalisable}) \geq \frac{1}{2}$$

et préciser les cas d'égalité.

III.1.237 Mines-Télécom MP 2026

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Montrer que X suit une loi géométrique si et seulement si :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

III.1.238 Mines-Télécom PSI 2026

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{i!j!} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y .
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Soit Z une variable aléatoire vérifiant :

$$Z = X + Y.$$

Déterminer la loi de Z .

III.1.239 Centrale-Supélec PSI 2026

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n} \in]0, 1[^n$.

On introduit pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire B_i qui suit une loi de Bernoulli de paramètre b_i .

On pose $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et $P(X) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(B = k) X^k$.

Montrer que P n'admet que des racines réelles.

III.1.240 PT 2021

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On définit les variables aléatoires :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n , puis son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de T_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction génératrice G_{S_n} de S_n en précisant son ensemble de définition.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que t^{T_n} est d'espérance finie et que :

$$\mathbb{E}(t^{T_n}) = \frac{G_{S_n}(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

4. Étudier la limite de $\mathbb{E}(t^{T_n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.1.241 PT 2023

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

1. Rappeler la définition de la loi géométrique.
2. Déterminer la loi de $U = X + Y$.
3. Soit $\ell \in U(\Omega)$. Déterminer la loi de X sachant ($U = \ell$).
4. Déterminer la loi de $V = X - Y$ et son espérance.
5. Déterminer la covariance de X et Y .

III.1.242 ENS Lyon MP 2022

1. Donner l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
2. Une boîte contient n cartes. Un collectionneur en tire une et la remet dans la boîte, et ainsi de suite jusqu'à toutes les avoir tirées. Calculer l'espérance du nombre de tirages.

III.1.243 Mines MP 2023

On considère une urne contenant quatre jetons : 0, 1, 1, 2. On tire n jetons avec remise, et on note S la valeur totale obtenue. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.

III.1.244 Mines MP 2023

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = \alpha \exp(1 + t^2)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Trouver α et déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N})$, $\mathbb{P}(X \in 3\mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(X \in 6\mathbb{N})$.

III.1.245 Mines MP 2024

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [a, b]$, on considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ avec un moment d'ordre 2 et ayant toutes pour espérance x . On définit les suites de fonctions :

$$E_n(x) = \mathbb{E}(f(X_{n,x})) \quad \text{et} \quad V_n(x) = \text{Var}(X_{n,x}).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

III.1.246 Mines MP 2025

Soit $p \in [0, 1]$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $p = \frac{1}{2}$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_{2n} = k).$$

III.1.247 ENS Lyon MP 2022

On tire des vecteurs aléatoirement avec remise dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^n$ et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour en obtenir une famille génératrice. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.248 Mines MP 2023

On considère un graphe aléatoire $G = (V, E)$ défini comme suit. On suppose que $n = |V| \geq 2$. On fixe $p_n \in]0, 1[$ et on ajoute une arête entre deux sommets distincts de G selon une loi de Bernoulli de paramètre p_n .

1. Combien d'éléments l'ensemble E peut-il avoir au maximum ?
2. Pour $x \in V$, on appelle *degré* de x et on note $\deg(x)$ la variable correspondant au nombre d'arêtes de G dont x est une extrémité. Déterminer sa loi.
3. On dit que $x \in V$ est *isolé* lorsque $\deg(x) = 0$, et on note Z_n la variable aléatoire correspondant au nombre de sommets isolés de G . Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = n(1 - p)^{n-1}.$$

4. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \frac{\text{Var}(Z_n)}{(\mathbb{E}(Z_n))^2}.$$

5. On suppose à présent qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$p_n = C \frac{\ln(n)}{n}.$$

Déterminer un développement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$.

6. Déterminer un développement asymptotique de $\mathbb{P}(Z_n > 0)$.

On distinguera les cas $C > 1$ et $C < 1$.

III.1.249 ENS MP 2025

Soit $p \in]0, 1[$.

1. Donner la définition, la série génératrice et l'espérance de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
2. Montrer que la loi $\mathcal{G}(p)$ est sans mémoire.
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{G}(p)$.

Déterminer la loi de $Y = X_1 + \dots + X_n$.

4. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{c_0}{k} (1 - p)^k \quad \text{où } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Déterminer c_0 et calculer la série génératrice de Z .

5. On considère une variable aléatoire N de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et une suite $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes indépendantes de N . On note $R = Z_0 + \dots + Z_N$. Trouver λ et p tels que R ait la même loi que Y .

III.1.250 ENS MP 2025

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $S_0 = k \in \mathbb{Z}$ et :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n - 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.
Calculer la loi de S_n sachant $(S_1 = k_1, \dots, S_m = k_m)$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, N\}$. On décide que la marche $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'arrête lorsqu'on atteint 0 ou N , et on admet qu'elle s'arrête presque sûrement. Calculer la probabilité qu'elle s'arrête en 0.

III.1.251 Mines-Ponts MP 2026

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et T des variables aléatoires sur Ω mutuellement indépendantes. On suppose que les X_k sont identiquement distribuées et que T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On note $X = X_1$ et $S = \sum_{k=1}^T X_k$.

1. Rappeler les inégalités de Markov et de Tchebychev.
2. Montrer que S est une variable aléatoire sur Ω .
3. On suppose dans cette question que X et T ont des moments d'ordre 2 (i.e. sont de carré sommable).

(a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_S(t) = (G_T \circ G_X)(t).$$

(b) En déduire que :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X),$$

puis que

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}(T)\text{Var}(X) + \text{Var}(T)(\mathbb{E}(X))^2.$$

4. On suppose désormais que X suit une loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < 0 < b$. Soit $x \in]a, b[\cap \mathbb{Z}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n,x} = x + \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_n = S_{n,0}.$$

Posons encore :

$$T_x = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \{S_{n,x} \notin]a, b[\}.$$

(a) Montrer que :

$$\mathbb{P}(T_x > b - a) \leq 1 - 2^{-(b-a)}.$$

(b) À l'aide de l'indépendance des X_i , simplifier l'écriture suivante :

$$\mathbb{P}([T_0 > (n+1)(b-a)] \cap [T_0 > n(b-a)] \cap [S_{n,b-a} = x]).$$

III.1.252 Mines-Ponts PSI 2026

On considère l'équation différentielle

$$(E(\omega)) : y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0,$$

où $A \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $B \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ et A, B indépendantes.

Déterminer la probabilité que toutes les solutions de $(E(\omega))$ tendent vers 0 en $+\infty$.

III.1.253 ENS

Une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite *décomposable* s'il existe deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes X_1 et X_2 , non presque sûrement constantes, telles que $X = X_1 + X_2$.

1. Une variable aléatoire de Bernoulli est-elle décomposable ? Une variable aléatoire binomiale est-elle décomposable ?
2. Montrer que le polynôme $T^4 + 2T + 1$ ne peut se factoriser comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}_+$. En déduire une variable aléatoire réelle discrète décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.
3. Soit $n \geq 3$ un entier qui n'est pas premier et soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$. Démontrer que X est décomposable.

III.1.254 ENS MP 2023

Soit E un ensemble fini, $V : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $a \in E$ est un *minimum local* lorsque $f(a) \leq f(b)$ pour tout $b \in V(a)$.

Soit M un entier plus grand que $\sqrt{|E|}$. On tire $(b_i)_{1 \leq i \leq M}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur E . Soit k tel que $b_k = \min_{1 \leq i \leq M} f(b_i)$.

On dispose d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $u_0 = b_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ si u_n est un minimum local, sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Montrer que la probabilité que u_M soit un minimum local est d'au moins $\frac{1}{2}$.

III.1.255 X ESPCI 2024

Soit n un nombre pair de prisonniers numérotés de 1 à n . On dispose n boîtes devant eux numérotées de 1 à n . On a n cartons portant un numéro de 1 à n . Chaque carton est placé au hasard dans une boîte. Chacun leur tour, les prisonniers ouvrent des boîtes jusqu'à tomber sur leur numéro. Si leur numéro a déjà été trouvé par un prisonnier auparavant, ils n'ouvrent aucune boîte. Les prisonniers sont libérés si aucun prisonnier n'a ouvert plus de $\frac{n}{2}$ boîtes. Quelle est la probabilité que les prisonniers soient libérés ?

III.1.256 X 2018

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes.

On suppose que $r \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$ personnes disparaissent.

Déterminer le nombre moyen de couples restants.

III.1.257 Mines-Télécom MP 2026

On considère trois joueurs jouant au ballon.

Lorsque le joueur A a la balle, il a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de la donner au joueur B et de $\frac{2}{3}$ de la donner au joueur C .

Lorsque le joueur B a la balle, il a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de la donner au joueur A et de $\frac{2}{3}$ de la donner au joueur C .

Lorsque le joueur C a la balle, il a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de la donner au joueur A et de $\frac{2}{3}$ de la donner au joueur B .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur de composantes $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$, où $\mathbb{P}(A_n)$ est la probabilité que le joueur A ait le ballon au $n^{\text{ème}}$ lancer, et de même pour $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$ concernant respectivement les joueurs B et C .

1. Déterminer la matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

III.1.258 X 2018

On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et prend une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée. Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

III.1.259 ENS 2018

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet. On dit que $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ est une *sous-suite croissante* de longueur k lorsque

$$\begin{cases} i_1 < \dots < i_k \\ A_{i_1} < \dots < A_{i_k} \end{cases}$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -uplet aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $\ell_n(k)$ le nombre de sous-suites croissantes de longueur k de $(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer l'espérance de $\ell_n(k)$.

III.1.260 ENS MP/MPI 2023

Soit $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers.

On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme.

Donner une expression simple de la probabilité de l'évènement « Le morphisme φ est surjectif. ».

III.1.261 X 2018

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que pour toute partie A bornée de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y_n \in A) < +\infty$.

III.1.262 ENS 20216

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_n = 2^j) = \frac{1}{2^j}.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\ln(2)S_n}{n \ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

III.1.263 CCINP MP 2026

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

1. Retrouver la loi de $X + Y$.

Soit la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} X+Y & 1 & -1 & 0 \\ 0 & Y & 1 & 1 \\ 0 & 0 & X-Y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
3. Déterminer la probabilité que M soit nilpotente.
4. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

III.1.264 Mines-Télécom MP 2026

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On tire les boules une à une sans remise.

Soit X le rang de tirage de la première boule blanche.

Soit Y le nombre de boules rouges dans l'urne quand la première boule blanche est tirée.

1. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi de Y en fonction de celle de X .

III.1.265 ENS PC 2024

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Poisson indépendantes de paramètre 1 et

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} X_k z^k$$

pour $z \in]-1, 1[$.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(|(1-x)f(x) - 1| > \varepsilon) = 0.$$

Discuter d'une généralisation si les X_k ne sont pas des variables de Poisson.

III.1.266 Mines-Ponts MP 2026

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $(p, q) \in]0, 1[^2$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, indépendantes.

Déterminer $\mathbb{P}(X \equiv Y \pmod{m})$.

III.1.267 ENS PC 2024

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On ajoute une par une, dans une urne initialement vide, des boules ayant chacune une chance $\frac{1}{N}$ d'être rouge. On arrête d'ajouter des boules dès qu'on a mis une boule rouge. Puis, on retire au hasard les boules, une par une, de l'urne, en s'arrêtant dès qu'on a tiré la boule rouge.

Combien reste-t-il de boules dans l'urne à la fin de l'expérience, en espérance ?

III.1.268 ENS PC 2024

On tire successivement des boules, sans remise, uniformément au hasard, dans une urne qui contient n boules multicolores dont exactement deux sont rouges. On s'arrête quand on tire la seconde boule rouge, et on note T le nombre de tirages effectués. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

III.1.269 ENS PC 2024

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées prenant des valeurs entières strictement positives et dont la loi est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule :

$$\mathbb{P}(X_1 \geq n) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{avec } \alpha \in]0, 1[.$$

1. Montrer que ces variables ont une espérance infinie.
2. Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives $c > 0$ et $C < +\infty$ telles que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1 - Ct^\alpha \leq \mathbb{E}(e^{-tX_1}) \leq 1 - ct^\alpha.$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C' < +\infty$ telle que, pour tout $K \geq 1$ et tout $N \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^N X_k \geq K\right) \leq \frac{C'}{K^\alpha}.$$

Indications :

- i) On pourra borner inférieurement $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^N X_k}{KN^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)$.
 - ii) On utilisera l'inégalité $(1 - e^{-1})\mathbb{P}(X \geq K) \leq \mathbb{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{X}{K}\right)\right)$.
4. Montrer qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^N X_k \leq \varepsilon\right) \leq e^{-\frac{c'}{\varepsilon^\alpha}}.$$

Indication : montrer que la même inégalité est vraie en remplaçant la somme $\sum_{k=1}^N$ par $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} X_i$.

III.1.270 ENS PC 2024

Soit σ une permutation aléatoire uniforme de $\{1, \dots, n\}$. On dit que k est un *maximum local* de σ si $\sigma(k-1) < \sigma(k) > \sigma(k+1)$ (sauf en $k=1$ ou n , où on compare avec son seul voisin au lieu des deux).

Quelle est l'espérance du nombre de maxima locaux de σ ? (Autrement dit, le nombre moyen de maxima locaux, quand on moyenne sur toutes les permutations possibles.)

III.1.271 ENS PC 2024

Soit $\lambda > 0$ et

$$X_n = \sum_{i=1}^n X_{in}$$

où $X_{1n}, \dots, X_{nn}$ sont des variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $n \mapsto \mathbb{E}(e^{tX_n})$ converge et identifier sa limite. La fonction génératrice de quelle loi reconnaît-on?

III.1.272 ENS PC 2024

Soit n et k des entiers strictement positifs fixés et a un entier positif. On choisit un sous-ensemble à k éléments $X \subset \{1, \dots, k+a\}$ aléatoirement selon une loi uniforme et un sous-ensemble à n éléments $Y \subset \{1, \dots, k+n+a\}$ aléatoirement selon une loi uniforme également et tels que X et Y soient indépendants. Montrer que la probabilité

$$\mathbb{P}(\min(Y) > \max(X))$$

ne dépend pas de a .

III.1.273 CCP 2016

On considère un fumeur qui désire arrêter de fumer. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'évènement : « Le fumeur fume le jour n . » et $p_n = \mathbb{P}(F_n)$. Lorsque le fumeur fume un certain jour, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité $\frac{1}{4}$. S'il ne fume pas un certain jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Traduire ces hypothèses en termes de probabilité.
2. (a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par les p_n .
(b) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 et n , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
3. On suppose que $p_1 = \frac{11}{12}$. On fait de plus les deux hypothèses supplémentaires suivantes.
Si le fumeur fume le premier jour, il fume les deux jours suivants avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
S'il fume le premier jour, il fume le troisième jour avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
(a) Calculer la probabilité que le fumeur fume le premier jour et le troisième jour.
(b) Calculer la probabilité qu'il fume les trois premiers jours.
(c) Calculer la probabilité qu'il fume l'un des trois premiers jours.

III.1.274 CCINP 2018

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Soit $k, m \in \mathbb{N}$ et

$$A_k = i^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Exprimer A_k^m en fonction de i^{km} selon la parité de m et trouver le spectre de A_k^m .

2. Soit une variable aléatoire K suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et M une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Soit enfin V la variable aléatoire donnant le nombre de valeurs propres complexes de A_k^m .
- (a) Calculer $\mathbb{P}(2 \text{ divise } M)$ et $\mathbb{P}(M \equiv 1 \pmod{2})$. En déduire la loi de V .
 - (b) Donner les couples (k, m) tels que $1 \in \text{Sp}(A_k^m)$.
 - (c) Que vaut $\mathbb{P}(1 \in \text{Sp}(A_k^M))$?

III.1.275 Mines-Ponts 2021

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements.

On note :

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si $B = C$, et on note alors A cet ensemble qui est par définition la limite de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors A est un évènement et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

2. On note :

$$B_n = \bigcap_{p \leq n} \bigcup_{k \geq p} A_k \quad \text{et} \quad C_n = \bigcup_{p \leq n} \bigcap_{k \geq p} A_k.$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n et C_n sont indépendants.

- (a) Montrer que B et C sont indépendants.
- (b) On suppose que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

III.1.276 Mines-Ponts 2026

Pour ouvrir une serrure, on dispose de n clés, on les essaie successivement, sans remise. Quelle est la probabilité que la serrure s'ouvre au $k^{\text{ème}}$ essai ?

III.1.277 TPE/EIVP 2017

Une personne sur 10 000 est atteinte d'une maladie M . Un test existe pour détecter la maladie. Si une personne est malade, elle est positive 99% du temps. Si une personne n'est pas malade, elle est positive 1% du temps. Une personne fait le test qui se révèle positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

III.1.278 Mines-Ponts 2019

Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{p_k}$?
3. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, on considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements mutuellement indépendants. On note $\limsup A_n$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_n .
 - (a) Montrer que $\limsup A_n$ est un évènement.
 - (b) On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{kn \mid k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{n}.$$

III.1.279 CCINP

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = p_n.$$

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n.$$

1. Prouver que l'intervalle $] - 1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1 + X_2$.

Démontrer que pour tout $t \in] - 1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
- (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

On admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.

On note S_n la somme des numéros tirés.

Soit $t \in] - 1, 1[$.

Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n .

III.1.280 Centrale 2017

Soit $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i < +\infty$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i).$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(X_i)$.
2. Soit A l'évènement : « L'ensemble des $i \in \mathbb{N}^*$ tels que $X_i > 0$ est fini. ». Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
3. On pose $(p_i)_{i \geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant.

On pose $Y = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i^{X_i}$.

Justifier que Y est presque sûrement bien définie. Que dire de $\mathbb{E}(Y)$?

III.1.281 CCINP

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$.
 - (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
Indication : on pourra utiliser, sans le prouver, l'égalité $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.
 - (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

III.1.282 CCINP

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $\mathbb{E}(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

III.1.283 CCINP

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \in L^2$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que :

$$\forall a \in]0, +\infty[, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1) \right| \geq a \right) \leq \frac{\text{Var}(Y_1)}{na^2}.$$

3. *Application*

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Indication : considérer la suite $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli, où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

III.1.284 Navale MP 2021

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivant la même loi. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose $T, X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.

1. Montrer que $V = \prod_{i=1}^T X_i$ admet un moment à tout ordre.
2. Calculer l'espérance et la variance de V .

III.1.285 TPE/EIVP PSI 2018

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une matrice de projecteur.

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, soit $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

3. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
4. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

III.1.286 CCINP MP 2026

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ et $\mathbb{P}(Y = n) = q_n$.

On définit :

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

1. Montrer que, pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \sum_{n \in A} |p_n - q_n|$$

et

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \sum_{n \in \bar{A}} |p_n - q_n|.$$

2. En déduire que :

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq d(X, Y).$$

3. Montrer que :

$$d(X, Y) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \min(p_n, q_n).$$

4. En déduire que :

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n + q_n) - \sum_{n=0}^{+\infty} \min(p_n, q_n).$$

III.1.287 Centrale PSI 2024

Un automate allume, à la date n , une diode rouge ou une diode verte. Si à la date n il allume une diode rouge, il allume une diode verte à la date $n + 1$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$; si à la date n il allume une diode verte, il allume une diode rouge à la date $n + 1$ avec une probabilité $q \in]0, 1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que la diode allumée soit rouge (resp. verte) à l'instant n .

1. Trouver $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ r_n \end{pmatrix}$, à l'aide de la formule des probabilités totales.
2. Déterminer $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} B + C = I_2 \\ B + (1 - p - q)C = A \end{cases}$$

puis en déduire A^n pour $n \geq 1$.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

III.1.288 Mines-Ponts PSI 2024

Déterminer la distance moyenne entre deux points d'un cercle. On pourra introduire une variable aléatoire uniforme de paramètre N , que l'on fera ensuite tendre vers $+\infty$.

III.1.289 Mines-Ponts PSI 2024

Le nombre N d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson de paramètre a . À sa naissance, chaque enfant a une probabilité $p \in]0, 1[$ de survivre, indépendamment des autres. On note M le nombre d'enfants qui ont survécu.

1. Déterminer la loi conjointe (N, M) puis la loi et l'espérance de M .
2. Les variables aléatoires N et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

III.1.290 C.C.E. Mines PC 2015

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On définit $Z = X + Y$.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z .

III.1.291 CCINP PSI 2024

Un conducteur se place à un carrefour et compte le nombre de personnes qui n'ont pas attaché leur ceinture de sécurité. Le nombre de voitures qui passent au carrefour est noté X et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 200. La probabilité qu'un conducteur n'ait pas attaché sa ceinture est $\frac{3}{10}$, indépendamment les uns des autres. On note S le nombre de conducteurs sans ceinture et A le nombre de conducteurs ayant attaché leur ceinture.

1. Déterminer $\mathbb{P}(S = k \mid X = n)$ pour $k, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(S = k)$ et en déduire que S suit une loi de Poisson.
3. La variable A suit-elle une loi de Poisson ?
4. Les variables A et S sont-elles indépendantes ?

III.1.292 Centrale PSI 2024

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note $(T_n = k)$ l'évènement « Au cours des n tirages on a obtenu exactement k boules distinctes. ».

1. Donner $\mathbb{P}(T_n = 1)$, $\mathbb{P}(T_n = 2)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$.
2. Établir une relation entre $\mathbb{P}(T_{n+1} = k + 1)$, $\mathbb{P}(T_n = k)$ et $\mathbb{P}(T_n = k + 1)$.
3. En déduire l'espérance de T_n .

III.1.293 Mines-Télécom MP 2026

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement A_k : « X est un multiple de k . ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.
3. Soit l'évènement B : « X est premier. ». Donner un encadrement de $\mathbb{P}(B)$:

$$\frac{13}{32} \leq \mathbb{P}(B) \leq \frac{233}{252}.$$

III.1.294 CCINP MP 2026

Soit $p \in]0, 1[$. Un mobile se déplace le long d'un axe gradué. La probabilité qu'il saute à gauche est p , celle qu'il saute à droite est $q = 1 - p$.

Soit R_n l'évènement : « Le mobile est en O à l'étape n . » et $u_n = \mathbb{P}(R_n)$.

Soit S_n l'évènement : « Le mobile revient en O pour la première fois à l'étape n . » et $v_n = \mathbb{P}(S_n)$.

1. Calculer u_n et v_n .
2. Montrer que

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n$$

est définie et continue sur $[0, 1]$, et que

$$G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$$

est définie et continue sur $[0, 1[$.

3. Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad F(t)G(t) = G(t) - 1.$$

III.1.295 ENS PSI

Dénombrer les permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dont les cycles, dans la décomposition en cycles à supports disjoints, sont tous de longueur paire.

III.1.296 X FUF 2024

Lors d'une compétition de saut en hauteur, une athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$ n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussite du $n^{\text{ème}}$ saut est $\frac{1}{n}$. L'athlète s'arrête au premier échec.

1. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Trouver la loi de X .
2. Déterminer la fonction génératrice de X .
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

III.1.297 X FUF 2024

Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n).$$

III.1.298 X FUF 2024

Soit $k, n \geq 1$ des entiers. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n = \text{Card}(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n)$.

III.1.299 X FUF 2025

On coupe en deux un bâton. En moyenne, quelle est la longueur du plus petit bout ?

III.1.300 X FUF 2025

Quelle est la valeur la plus probable d'une variable aléatoire de Poisson ?

III.1.301 ENS MP 2023

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $\Omega = S_n$. On note A_i l'évènement « i est un point fixe de σ . ».

1. Rappeler la définition d'une probabilité uniforme et donner $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.
2. Soit N la variable aléatoire, qui à σ associe son nombre de points fixes. Exprimer N en fonction des $\mathbf{1}_{A_i}$, puis donner $\mathbb{E}(N)$ et $\text{Var}(N)$.
3. Soit $F \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que :

$$\binom{|F|}{k} = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{i \in F}.$$

4. En déduire que $\mathbb{E}(N(N-1) \cdots (N-k+1)) = 1$.
Calculer la variance de $N(N-1) \cdots (N-k+1)$.
5. Connaissez-vous une autre loi vérifiant cela ?

III.1.302 ENS 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère un jeu où deux joueurs B et C choisissent d'une manière indépendante chacun un nombre de $\{1, \dots, n\}$:

$$\mathbb{P}(\text{« } B \text{ choisit } i. \text{ »}) = p_i \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\text{« } C \text{ choisit } i. \text{ »}) = q_i.$$

Lorsqu'ils choisissent les nombres, une règle nous dit lequel est gagnant. Au cas où les deux nombres sont identiques, le gain est nul.

Si un joueur gagne, il gagne 1, s'il perd, il perd 1.

1. Calculer l'espérance du gain de B .
2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique A sont imaginaires pures.
3. Si de plus les coefficients de A sont dans $\{-1, 1\}$, donner le rang de A .

III.1.303 X FUF 2024

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose pour $1 \leq k \leq n$:

$$Y_k = X_1 \cdots X_k.$$

1. Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.
2. Que se passe-t-il si la loi n'est plus uniforme sur $\{-1, 1\}$?

III.1.304 X 2021

Une particule peut, en équiprobabilité, mourir, ne rien faire, se diviser en 2, ou se diviser en 3. Quelle est la probabilité que la population soit réduite à 0 ?

III.1.305 Centrale-Supélec

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On mélange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes. Quelle est la probabilité que les cartes de numéro impair soient correctement ordonnées ?

III.1.306 x

Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p -cycles, d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

III.1.307 x 2021

Soit $A_n = [0, n]^2$ et C_n l'ensemble des carrés dans A_n à sommets entiers.

On note X_n la variable aléatoire sur C_n qui suit la loi uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire de l'aire de X_n .

Déterminer la loi de X_n .

III.1.308 ENS Lyon 2021

Soit A, B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ . On pose $p(\lambda)$ la probabilité de l'évènement suivant :

« L'équation différentielle

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

admet une solution sur $\mathbb{R}$ qui s'annule une infinité de fois. »

Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p(\lambda)$.

III.1.309 ENS MP

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

1. Montrer que, pour tout réel t , l'ensemble

$$A_t = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k X_k \leq t \right)$$

est un évènement.

2. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(A_t)$ est continue.

III.1.310 x MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice aléatoire de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, N une matrice aléatoire de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

Montrer que :

$$\mathbb{P}(M \in GL_{n+1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(N \in GL_n(\mathbb{R})).$$

III.1.311 x MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}.$$

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

III.1.312 Mines-Ponts MP 2024

On considère une expérience consistant à tirer des boules avec remise, de telle sorte qu'à chaque tirage la probabilité d'un tirage gagnant soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'on a un *doublé au rang* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ si les tirages $k-1$ et k sont gagnants. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les événements A_k : « Au bout de k tirages il y a eu au moins un doublé. » et B_k : « Au bout de k tirages le premier doublé est en position k . ».

1. Exprimer $\mathbb{P}(B_{k+2})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$ et p .
2. Exprimer $\mathbb{P}(B_{k+3})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_{k+2})$, $\mathbb{P}(B_{k+1})$, $\mathbb{P}(B_k)$ et p .
3. Donner une formule explicite pour $\mathbb{P}(B_k)$.

Indication : on pourra s'aider de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p^2(1-p) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.1.313 Centrale MP

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dispose $n+1$ boules blanches et noires dans un urne. On note X_0 la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant initial. On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On effectue alors l'opération « tirage-remplacement » suivante. On tire deux boules de l'urne. Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans l'urne ; si elles sont de la même couleur, on les remplace par une boule noire et une boule blanche. On itère de « tirage-remplacement » et on note X_k la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ opération.

1. Montrer, par un argument de symétrie, que l'espérance de X_k est constante.
2. On pose $U_k = (\mathbb{P}(X_k = 1), \dots, \mathbb{P}(X_k = n))^T$. Construire $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k.$$

3. Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

III.1.314 x ESPCI

Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$. On munit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit

$$E_1 = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid p_1 \text{ divise } k\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid p_2 \text{ divise } k\}.$$

Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si n ne s'écrit pas sous la forme $n = kp_1p_2 + \ell p_1$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq \ell p_1 < p_2$.

III.1.315 Mines-Ponts 2025

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n + 1) = \alpha \mathbb{P}(X = n) + \beta^{n+1},$$

où α et β sont deux réels positifs.

1. Montrer que $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ et déterminer la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

III.1.316 Mines-Ponts 2025

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

On note g la restriction de la fonction génératrice de X à l'intervalle $[0, 1]$.

Montrer que :

$$g \in C^m([0, 1]) \iff \mathbb{E}(X^m) < +\infty.$$

III.1.317 Mines-Ponts MP 2025

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p .

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $X + Y$.

III.1.318 Mines-Ponts MP 2025

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. On considère :

- a boules rouges ;
- b boules noires ;
- c boules blanches.

On effectue des tirages sans remise jusqu'à trouver une boule blanche.

Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules rouges obtenues.

Trouver la loi de Y et $\mathbb{E}(Y)$.

III.1.319 ENS MP

On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire T donnant le premier instant k pour lequel il existe $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ tel que $k-i$ soit pair, les lancers aux instants k et i aient donné face, et les lancers à tous les instants strictement compris entre k et i aient donné pile. Montrer que T est d'espérance finie, et calculer son espérance.

III.1.320 ENS MP

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de « pile » soit égal au double du nombre de « face ». Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

III.1.321 ENS MP

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$.

Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- i) pour tout $\alpha > 1$, on a $\mathbb{P}(X_1 \geq \alpha x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbb{P}(X_1 \geq x))$;
- ii) il existe une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ divergeant vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{b_n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

III.1.322 Mines-Ponts MP 2025

Soit X une variable aléatoire discrète, réelle et bornée. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et strictement positive. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)}.$$

III.1.323 ENS MP

Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{K}_{=n}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_{<n}[X]$) l'ensemble des polynômes de degré égal à n (resp. inférieur à n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit P_n (resp. Q_n) une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathbb{K}_{=n}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_{<n}[X]$) ; on suppose P_n et Q_n indépendantes. Calculer l'espérance du nombre d'étapes dans l'algorithme d'Euclide relatif à (P_n, Q_n) .

III.1.324 ENS MP

On définit la notion de *graphe* $G = (S, A)$ où

- S est l'ensemble des *sommets* ;
- $A \subset \{\{x, y\} \mid (x, y) \in S^2 \text{ avec } x \neq y\}$ est l'ensemble des *arêtes*.

On dit que deux graphes sont *isomorphes* s'il existe une bijection entre les deux ensembles de sommets qui respecte les arêtes. Soit $p \in]0, 1[$. On prend $S = \mathbb{N}$. On considère des graphes sur $\mathbb{N}$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, tels que $x \neq y$, l'arête $\{x, y\}$ est présente avec probabilité p fixée, les variables de Bernoulli associées à ces paires étant supposées indépendantes.

1. Soit $p, p' \in]0, 1[$ et $G_p, G_{p'}$ deux variables aléatoires qui vérifient la loi précédente pour les paramètres respectifs p et p' .
Montrer que, presque sûrement, G_p et $G_{p'}$ sont isomorphes.
2. Montrer qu'il est presque sûr que, pour toute partition (N_1, N_2) de $\mathbb{N}$, le graphe de G_p induit sur N_1 ou celui induit sur N_2 est isomorphe à G_p .

III.1.325 Mines 2023

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance $\mathbb{E}(X) = m$.

1. Montrer que $\text{Var}(X) \leq (m - a)(b - m)$.
2. Montrer que cette inégalité est optimale.

III.1.326 Mines 2023

Soit $p \in]0, 1[$. Dans un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n , on tire S jetons, où S est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p . Quelle est la probabilité d'obtenir des jetons de numéros consécutifs ?

III.1.327 Mines 2023

Soit $\sigma \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n . Pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_m = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) \geq m\}$ et $Y_m = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) \geq m\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m et leur espérance.

III.1.328 Mines 2023

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme sur $\{-1, 2\}$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = \llcorner \text{Il existe } k \geq 0 \text{ tel que } S_k = -n. \lrcorner$ et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(\llcorner \text{Il existe } k > 0 \text{ tel que } S_k = 0. \lrcorner)$ en fonction de p_{-1} et p_2 .
2. Trouver une relation entre p_{n+2} , p_n et p_{n-1} .
3. En déduire la valeur de p_n .

III.1.329 ENS PSI

Soit $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{N}^2$ et on considère le rectangle $[0, n] \times [0, 2]$. On appelle *recouvrement* de $[0, n] \times [0, 2]$ tout ensemble fini formé de rectangles translés de $[0, 1] \times [0, 2]$ (rectangles verticaux) et de $[0, 2] \times [0, 1]$ (rectangles horizontaux) qui recouvrent $[0, n] \times [0, 2]$ sans que leurs intérieurs ne se chevauchent.

On note u_n le nombre de recouvrements de $[0, n] \times [0, 2]$. On munit l'ensemble des recouvrements de $[0, n] \times [0, 2]$ de la probabilité uniforme.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. En déduire une expression de u_n .
2. On note $P_{1,n}$ la probabilité qu'il y ait un rectangle vertical tout à gauche. Calculer $P_{1,n}$ et montrer que la suite $(P_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite L .
3. On note V_n le nombre de rectangles verticaux. Calculer $\mathbb{E}(V_n)$.
Indication : on pourra écrire $V_n = \sum_{i=1}^n U_{i,n}$, où $U_{i,n}$ est l'indicatrice de l'évènement : « Il y a un rectangle vertical en position i . ».
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(V_n)}{n} = L$.
Indication : découper la somme entre $[1, \sqrt{n}]$, $[\sqrt{n}, n - \sqrt{n}]$ et $[n - \sqrt{n}, n]$.
5. On note $V_{i,j,n}$ l'évènement : « Il y a un rectangle vertical en i et en j . ».
Calculer $\mathbb{E}(V_{i,j,n})$.
6. Calculer $\text{Var}(V_n)$, puis en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

III.1.330 Mines 2023

On tire au hasard un élément A de $\mathcal{P}([1, n])$. Calculer la probabilité que $\text{Card}(A)$ soit un entier pair.

III.1.331 ENS MP/MPI

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble de cardinal n . Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur S_n . Si $i, j \in [1, n]$, on pose $e_i \star e_j = e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E_n, \star)$ soit un groupe, sachant que $\star$ admet un élément neutre, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

III.1.332 X MP/MPI

Une grille $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (resp. à gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve au bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité que la goutte d'eau sorte du tuyau à un instant t .
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

III.1.333 X MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « La matrice $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible. ».

Montrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

III.1.334 Mines 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Un restaurant contient une infinité de tables, chacune ayant une infinité de places. Le premier client qui arrive choisit une table au hasard. Pour $n \in \mathbb{N}$, le $(n+1)^{\text{ème}}$ client arrivé choisit une table indépendamment des clients précédents : il s'assoit à une table déjà occupée avec une probabilité $\frac{n}{n+\alpha}$, et à une table vide avec la probabilité $\frac{\alpha}{n+\alpha}$.

Soit A_n la variable aléatoire donnant le nombre de tables occupées une fois que n clients sont installés.

Pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $p_{n,k} = \mathbb{P}(A_n = k)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Calculer $p_{n,1}$.
 - (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $p_{n+1,k}$ en fonction de $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$.
2. Exprimer A_n comme une somme de variables de Bernoulli.
3.
 - (a) Calculer l'espérance et la variance de A_n .
 - (b) Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$, puis montrer que $\text{Var}(A_n)$ a le même équivalent.

III.1.335 Mines 2017

Une urne contient initialement $b > 0$ boules blanches et $r > 0$ boules rouges. On effectue une infinité de tirages successifs dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, ainsi que $c \geq 0$ boules de la même couleur que la boule tirée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n la variable aléatoire donnant le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages. Donner la loi de X_n .
2. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir une boule rouge ?
3. Soit Y la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de Y . Cette variable admet-elle une espérance ?

III.1.336 Mines 2017

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_k = \alpha \left(\frac{\beta^k + \gamma^k}{k!} \right).$$

1. Pour quelles valeurs de (α, β, γ) peut-il exister une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?
2. Dans ce cas, X peut-elle suivre une loi de Poisson ?

III.1.337 Centrale 2023

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et X_x une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre x . Calculer $\mathbb{E}(X_x)$, puis montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbb{P}(|X_x - \mathbb{E}(X_x)| \geq \varepsilon x) = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

quand x tend vers $+\infty$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$.

2. Déterminer le domaine de définition de u_α .
3. Déterminer u_1 et u_2 .
4. Montrer que pour tout $\alpha < 0$, on a $u_\alpha(x) = o(e^x)$ quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que pour tout $\alpha \in]-1, 0[$, on a $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$ quand x tend vers $+\infty$.

III.1.338 X 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur S_n (permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$). On appelle k -montée tout k -uplet $(i_1, \dots, i_k)$ de $\llbracket 1, n \rrbracket^k$ vérifiant :

$$i_1 < \dots < i_k \quad \text{et} \quad \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k).$$

On pose $r_\sigma = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma \text{ a une } k\text{-montée}\}$.

Montrer que :

$$\mathbb{P}(r_\sigma \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

III.1.339 Mines 2017

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X \leq Y$, $\mathbb{P}(Y = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k \mid Y = n) = \frac{1}{n}.$$

Soit $Z = Y - X + 1$.

1. Comparer les lois de X et Z .
2. (a) On suppose que X suit une loi géométrique.
Montrer que X et Z sont indépendantes.
(b) On suppose réciproquement que X et Z sont indépendantes. Montrer que X suit une loi géométrique.
3. On suppose que Y a une espérance finie. Montrer qu'il en est de même pour X , et exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$.

III.1.340 ENS MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, $Q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Soit S une partie finie non vide de $\mathbb{K}$, $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur S . Montrer que :

$$\mathbb{P}(Q(U_1, \dots, U_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

III.1.341 ENS MP

On considère des variables aléatoires réelles X, Y, Z discrètes. On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $X + Z$.

1. Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
2. Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3. Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?
4. Et si X, Y et Z sont indépendantes ?

III.1.342 ENS MP

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et telles que :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$.

III.1.343 ENS MP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur le groupe S_n .

1. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n Y_n = Y_n X_n) = 0.$$

2. Donner une expression de $\mathbb{P}(X_n Y_n = Y_n X_n)$.

III.1.344 ENS MP

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose :

$$\Phi_X : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{E}(e^{-\lambda X}).$$

1. Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Φ_X caractérise la loi de X .

III.1.345 ENS PC

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t)$.

1. Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante et bornée, on a $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$.
2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.
Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si $\lambda \leq \mu$.
3. On suppose X et Y indépendantes et $X \prec Y$.
Montrer que $\mathbb{P}(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$.

III.1.346 Mines-Télécom 2015

La probabilité d'obtenir pile avec une pièce truquée est 0.3.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 3 piles en 10 lancers.
2. Calculer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir une première fois pile.

III.1.347 EIVP 2016

Par des raisonnements d'analyse combinatoire, montrer que :

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
2. $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$;
3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

2 Nombres complexes

III.2.1 X ESPCI

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ xyz &= 1 \\ |x| = |y| = |z| &= 1 \end{cases}$$

III.2.2 Mines-Ponts MP 2023

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

III.2.3 ENS PC 2015

Soit a et b deux nombres complexes distincts. Soit P et Q deux polynômes complexes non constants. On fait les hypothèses :

$$P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\}) \quad \text{et} \quad P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\}).$$

Montrer que P et Q sont égaux.

III.2.4 Mines-Télécom MP 2022

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

III.2.5 ENSEA/ENSIIE 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n} |\alpha - 1|$.

On rappelle que $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$.

III.2.6 Mines-Télécom 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n$ définie par $f(z) = z^2$.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle une involution ?

III.2.7 Centrale 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

III.2.8 Mines-Ponts PC 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et impair. On pose $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Montrer l'existence de $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-w^k}{1+w^k}$ et calculer P_n .
2. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

III.2.9 Mines-Ponts PC 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n^* = \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ et

$$P_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} (x - \alpha) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n^*} \frac{1}{1 - \alpha}.$$

1. Simplifier P_n .
2. Simplifier S_n .

III.2.10 CCINP

Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

$$1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$.

III.2.11 CCINP MP 2024

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (On ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre.)
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.
3. En déduire, pour $n \geq 2$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

III.2.12 ENSAM 2012

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

III.2.13 X-ENS

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

III.2.14 CCINP

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

III.2.15 Mines 2015

On considère le plan complexe $\mathbb{C}$. Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3 ait pour orthocentre le point O , d'affixe 0.

III.2.16 Centrale 2015

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note Ω_P l'ensemble des nombres complexes tels que le polynôme $P(X) + c$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note Θ_P l'ensemble des nombres réels r tels que le polynôme $P(X) + r$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que Θ_P est un intervalle non vide et ouvert dans $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que Θ_P soit non borné.

III.2.17 Mines-Ponts PSI 2015

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

III.2.18 CCP PC 2015

Soit $w = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Soit $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

Calculer $S + T$ et ST , puis en déduire S et T .

III.2.19 Mines-Ponts PSI 2015

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^n = \frac{1+ai}{1-ai}.$$

III.2.20 CCINP PC 2018

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.

1. Exprimer $|1+z|$ en fonction de θ .
2. Montrer que $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

III.2.21 Centrale-Supélec PSI 2014

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 des quatre racines du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient sur les quatre sommets d'un carré du plan complexe.

III.2.22 Mines-Ponts PSI 2017

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2, z^5 soient alignés.

III.2.23 ENS Ulm

Soit $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $z_n = \sum_{k=1}^m a_k^n$.

Que dire des nombres complexes $a_1, \dots, a_m$ si la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

III.2.24 ENSEA/ENSIIE PSI 2023

Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mapsto \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Trouver tous les z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Trouver tous les z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

III.2.25 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$.
2. Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

III.2.26 CCINP PC

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$, puis que $\frac{3+4i}{5} \in \mathbb{U}$.
2. Soit a_k la partie réelle de $(3+4i)^k$ et b_k sa partie imaginaire.
Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k , puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.
3. Montrer que, pour $k \geq 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3, puis montrer que le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4. Conclure.
4. Démontrer l'inégalité :

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leq |\beta - \alpha|.$$

III.2.27 Mines-Télécom MP 2018

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0.$$

Indication : l'équation possède une solution réelle.

2. Que peut-on dire du triangle ABC , où A, B, C sont les points du plan dont les affixes sont les racines trouvées à la question 1 ?

III.2.28 Centrale-Suplélec PSI 2025

- Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Rappeler la définition de « f est bornée sur Ω ».
 - Rappeler la définition de « f admet un maximum sur Ω ».
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.
 - L'application φ est-elle bornée ?
On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.
 - Montrer que φ est bornée sur D .
 - Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.

III.2.29 Mines-Télécom MP 2022

Soit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

où $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

- Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ l'application f est-elle bijective ?
- Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $f \circ f = \text{Id}$?

III.2.30 Mines-Télécom MP 2016

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z) = 3$.

III.2.31 CCINP TSI 2024

Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P .
- Trouver toutes les racines de P .

III.2.32 X MP 2019

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x + jy + j^2z = 0$, avec $j^3 = 1$ et $j \neq 1$.

Que peut-on dire du triangle xyz ?

III.2.33 ENS MPI 2025

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$. Prouver qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + bi$.
- Démontrer que $z \mapsto ze^z$ est surjective sur $\mathbb{C}$.

III.2.34 Mines-Ponts MP

Calculer $\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}}$.

III.2.35 CCINP PC 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n = (X + 1)^n + (X - 1)^n$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n , puis factoriser ce polynôme sur $\mathbb{C}$.

III.2.36 Centrale-Supélec PSI 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$.
2. Calculer le produit des solutions non nulles.

III.2.37 TPE/EIVP MP 2017

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont comprises dans l'enveloppe convexe contenant les racines de P .

III.2.38 X MP 2019

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| = \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

III.2.39 CCINP PC 2019

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant un tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z^n) = P_n(f(z)).$$

On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1} .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z^n) = Q(f(z))$$

est P_n .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$.

Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n .

5. (a) Montrer que $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
(b) En déduire le coefficient constant de P_n .

$$6. \text{ Calculer } \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right).$$

$$7. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right).$$

III.2.40 Mines-Ponts PC 2024

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer l'existence d'un polynôme réel P_n tel que :

$$(1 + iX)^{2n+1} - (1 - iX)^{2n+1} = 2iX P_n(X^2).$$

2. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
3. Déterminer les racines de P_n .
4. Simplifier $\prod_{k=1}^n \left(4 + \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)$.

III.2.41 X-ENS

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Prouver qu'il existe une partie I contenue dans $\{1, \dots, n\}$ telle que :

$$\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

III.2.42 ENSEA/ENSIIE PSI 2024

Soit $n > 1$ un entier. On considère le polynôme P tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

1. Déterminer les racines de P .
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}} \right| = n$.
3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

III.2.43 TPE/EIVP MP 2017

Soit a, b, c trois nombres complexes quelconques. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\begin{cases} x + y + z &= a \\ x + jy + j^2z &= b \\ x + j^2y + jz &= c \end{cases}$$

admette une solution (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

III.2.44 Mines-Télécom MP 2019

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $4X^4 + 3X^2 + 1$.
3. Trouver quatre diviseurs (positifs) de 40301.

III.2.45 X MP 2014

Soit z une racine $n^{\text{ème}}$ primitive de l'unité. Montrer pour $d \geq 1$:

$$z^{(k+n)^d} = z^{k^d}.$$

Calculer le module de la somme des z^{k^2} pour k variant de 0 à $n-1$.

III.2.46 CCINP PC 2021

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

III.2.47 CCINP PC 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-1)^{2n+1} - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer les racines complexes du polynôme P .
2. En déduire une simplification du produit :

$$\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

III.2.48 X PC 2024

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ a 4 racines distinctes qui sont toutes sur le même cercle dans le plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

III.2.49 ENS PC 2025

Soit $n > 2$ un nombre impair. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k^2 i}{n}} \right| = \sqrt{n}.$$

III.2.50 PT 2016

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z}{z+2} \end{aligned}$$

1. Déterminer les invariants de f .
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
3. Déterminer les $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
Même question avec la condition $f(z) \in i\mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Déterminer une relation entre les modules des nombres complexes $f(z) - 1$ et $z + 2$, puis une relation entre leur argument.
5. Soit $R > 0$. Déterminer $f(C)$ avec $C = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\} \mid |z+2| > R\}$.

III.2.51 CCINP TSI 2012

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 9 + i\sqrt{3}$, et I est le milieu du segment OA .

1. (a) Déterminer l'afixe de I ainsi que les distances OA et OB .
 (b) i. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{AO}, \vec{AB})$.
 ii. Calculer l'aire du triangle OAB .
2. Montrer que l'ensemble des points M d'afixe z tels que $|z| = |z - z_A|$ est une droite passant par I .
3. On considère l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f(z) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}$$

- (a) Calculer $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_I)$.
- (b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Montrer que :

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

III.2.52 Mines-Ponts MP 2026

Trouver tous les entiers naturels n tels que

$$(X + 1)^n - X^n - 1$$

admette des racines complexes multiples.

III.2.53 X ESPCI

Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}} \frac{1}{2 - z}$.

III.2.54 Mines-Télécom MP 2026

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P_n = (X^2 + 1)^n - (X + i)^{2n}.$$

1. Vérifier que $-i$ est racine de P_n et préciser sa multiplicité.
2. Déterminer toutes les racines de P_n .

III.2.55 X MP 2025

Soit

$$\alpha = \frac{12 + 5i}{13}.$$

1. Montrer que α n'est pas racine de l'unité.
2. Montrer que α est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$.
3. Montrer que α n'est pas racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

III.2.56 Mines-Ponts PC 2025

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

1. Exprimer les nombres $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

III.2.57 ENS Lyon MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

III.2.58 Mines-Ponts MP 2026

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On écrit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Calculer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

2. Soit $A_1, \dots, A_n$ des points du plan complexe d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$.
Montrer qu'il existe un point P sur le cercle unité d'affixe z_P tel que :

$$\prod_{i=1}^n x_i \geq 1 \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = |z_i - z_P|.$$

III.2.59 ENS PC 2024

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (P \circ P)(z) = 0\}.$$

III.2.60 Mines-Ponts 2019

1. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction $\frac{X^k}{X^n + 1}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. On note $z_1, \dots, z_n$ les zéros de $X^n + 1$.

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$,

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

III.2.61 x

Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q dans $\mathbb{C}$ pour que $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8m} + pX^{4m} + q$, où $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

III.2.62 x

Soit P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que l'ensemble des racines de P (resp. $P - 1$) soit égal à l'ensemble des racines de Q (resp. $Q - 1$).
Montrer que $P = Q$.

III.2.63 ENS

On considère $n + 1$ nombres complexes $z_0, z_1, \dots, z_n$ distincts tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on ait

$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(z_k).$$

Montrer que $z_1, \dots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0 .

III.2.64 x

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les racines de P forment un parallélogramme.
2. Même question avec un rectangle.

III.2.65 x

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles $x_1, \dots, x_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Que vaut $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)}$?

III.2.66 ENS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P admet deux racines réelles distinctes et que P'' divise P .

1. Montrer que les racines de P sont toutes simples.
2. Montrer que les racines de P sont toutes réelles.

III.2.67 x

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une partie $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que

$$\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

On introduira, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S_\theta = \left\{ j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \theta - \frac{\pi}{2} \leq \arg(z_j) \leq \theta + \frac{\pi}{2} \right\},$$

ainsi que la fonction $f(\theta) = \left| \sum_{k \in S_\theta} z_k \right|$. On cherchera une minoration de f , que l'on intégrera sur $[0, 2\pi]$.

III.2.68 ENS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul ayant une racine z_0 telle que $|z_0| < 1$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à celui de P , tel que pour tout complexe z de module 1 on ait $|Q(z)| = |P(z)|$ et pour tout z de module strictement inférieur à 1 on ait $|Q(z)| > |P(z)|$.

III.2.69 ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls, dont on notera, pour tout $1 \leq k \leq n$, ρ_k le module et θ_k un argument. On désigne par I_n l'ensemble des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{-1, 1\}$.

1. Montrer que

$$\max_{\varepsilon \in I_n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon(k) z_k \right| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^n \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)|.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \frac{\pi}{2} \max_{\varepsilon \in I_n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon(k) z_k \right|.$$

3. Prouver que $\frac{\pi}{2}$ est la plus petite constante strictement positive telle que l'inégalité ci-dessus ait lieu pour tout n et tout n -uplet $(z_1, \dots, z_n)$ de nombres complexes non nuls.

III.2.70 x

1. Déterminer les parties finies non vides A de $\mathbb{C}$ stables par $f : z \mapsto z^2 + z + 1$ et $g : z \mapsto z^2 - z - 1$.
2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2 + X + 1) = P(X)P(X + 1).$$

III.2.71 x ESPCI

Soit $n \geq 3$, $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que :

$$\prod_{i=1}^n |z - a_i| = 1.$$

III.2.72 x FUF 2024

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

III.2.73 Centrale PSI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la factorisation de $P(x) = (X+1)^n - e^{2ina}$.
2. Déterminer la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right).$$

III.2.74 x MP

On note G le groupe des bijections affines du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même.

1. Montrer que G est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
2. Pour $g \in G$, on note (a_g, b_g) l'unique couple de complexes tel que $g : z \mapsto a_g z + b_g$. À quelle condition sur (a_g, b_g) l'application g admet-elle un unique point fixe ?
3. Soit $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$. On pose $h = g_1^3 g_2^3 g_3^3$.
Calculer a_h et b_h en fonction des a_{g_i} et b_{g_i} .
4. On admet que si $a_{g_1} a_{g_2} a_{g_3} = j$ et si $a_{g_1}, a_{g_2}, a_{g_3}$ sont tous distincts de j , alors

$$b_h = -j^2 a_{g_1}^2 a_{g_2} (a_{g_1} - j)(a_{g_2} - j)(a_{g_3} - j)(\alpha + \beta j + \gamma j^2)$$

où α, β, γ désignent les points fixes respectifs de $g_2 g_3, g_3 g_1$ et $g_1 g_2$.

On se donne un triangle direct ABC du plan complexe.

On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On note α l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\alpha})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\alpha})$; β l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\beta})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\beta})$; γ l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\gamma})$ et $\frac{b}{3}$ une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\gamma})$.

Montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral. On appliquera ce qui précède en prenant pour g_1 (resp. g_2, g_3) la rotation de centre A (resp. B, C) et d'angle de mesure $\frac{2a}{3}$ (resp. $\frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}$).

III.2.75 x 2024

On définit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \text{et} \quad G = \{z \in \mathbb{U} \mid \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$, on note $f(z)$ comme étant le point d'intersection de la droite liant i et z avec l'axe réel.

1. Démontrer :

$$z \in G \iff f(z) \in \mathbb{Q}.$$

2. On définit :

$$P = \{(a, b, c) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\}.$$

On définit la relation $\sim$ sur P par :

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \iff \exists r \in \mathbb{Q}, (a, b, c) = r(a', b', c').$$

Démontrer que l'ensemble quotient $P/\sim$ est de cardinal infini.

III.2.76 ENS PC

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
3. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

III.2.77 Mines-Ponts

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. On suppose que $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$. Démontrer que les racines complexes de P sont de module supérieur ou égal à 1.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Démontrer que :

$$\min_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

III.2.78 Mines-Ponts

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines comptées avec multiplicités. On suppose que P est à coefficients entiers.

Démontrer que pour tout entier naturel q non nul, $P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$ est à coefficients entiers.

III.2.79 X MP

On se propose de donner une démonstration du théorème de D'Alembert-Gauss.

1. Démontrer qu'il suffit de démontrer le théorème pour les polynômes à coefficients réels.

Dans la suite, on écrira le degré d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$ où $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair.

2. Démontrer le théorème dans le cas où $n = 0$.

Dans la suite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$, où $n \geq 1$ est fixé. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$. On admet l'existence d'un surcorps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur lequel P est scindé, et on note $x_1, \dots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixé $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + cx_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.

3. Démontrer que le polynôme

$$Q_c = \prod_{i \leq j} (X - y_{ij}(c))$$

est à coefficients réels.

4. Démontrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est élément de $\mathbb{C}$.
5. Démontrer finalement que l'un des x_i est élément de $\mathbb{C}$.

III.2.80 ENS MP

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Pour tout $r > 0$, on note D_r le disque complexe ouvert de centre $(0, 0)$ et de rayon r . Démontrer que :

$$D_{\frac{1}{n}} \subset P(D_1).$$

III.2.81 X MP

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et

$$M = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n e_i z_i \right| \mid (e_1, \dots, e_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

Montrer que $\sum_{i=1}^n |z_i| \leq 2M$.

III.2.82 X MP

1. Trouver les P de $\mathbb{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.
2. Trouver les F de $\mathbb{C}(X)$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.

III.2.83 ENS MP/MPI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $e(y) = e^{2i\pi y}$. Soit

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^N x_n e(nt).$$

Soit $R \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_R) \in \mathbb{R}^R$.

1. (a) Montrer que $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq NR \sum_{k=1}^N |x_k|^2$.
(b) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Delta(t) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |n - t|.$$

On suppose les t_i distincts. Soit $\delta > 0$ tel que :

$$\delta \leq \min_{1 \leq i \neq j \leq R} \Delta(t_i - t_j).$$

Montrer que :

$$\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq (2N\pi + \delta^{-1}) \sum_{k=1}^N |x_k|^2.$$

Indication : on pourra montrer que, pour une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|g(a)| \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} |g(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} |g'(t)| dt$.

III.2.84 X MP

Soit $f = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à $\mathbb{Q}^*$. On pose $H = \max(|c_0|, \dots, |c_n|)$.

1. Montrer que pour le complexe i on a :

$$|f(i)|^2 \leq H^2 \left(\frac{n^2}{2} + n + 1 \right).$$

2. Montrer que $|f(i)|^2 \geq 2^n$.
3. En déduire que si $n \geq 10$ alors $n \leq 5 \log_2(H)$.

III.2.85 ENS Lyon MP/MPI

Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ vérifiant la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle que soit S partie non vide de $\mathbb{U}_n$, il existe un entier naturel $p \leq \frac{cn}{|S|}$ ainsi qu'une p -liste $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments de $\mathbb{U}_n$ telle que :

$$\left| \bigcup_{k=1}^p (z_k + S) \right| \geq \frac{n}{2}.$$

III.2.86 Mines 2017

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tel que $P(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \varepsilon \text{ et } |P(z)| < 1.$$

III.2.87 Mines 2017

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $n(z)$ le nombre de solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = z$; par exemple, si $P = (X - 2)^2$, alors $n(0) = 1$, car l'équation $P(x) = 0$ a une seule solution. Calculer :

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z)).$$

III.2.88 CCP 2015

Soit $\alpha = e^{\frac{i\pi}{10}}$. Les nombres α^3 , α^7 et α^9 sont-ils racines de $1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8$?

III.2.89 CCP 2015

Trouver $P \in \mathbb{C}^3[X]$ tel que $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$, $P'(j^2) = j^2$.
Indication : on pourra s'intéresser au polynôme $R(X) = P(X) - X$.

III.2.90 CCP 2016

Soit

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Montrer que, pour tout $z \in P$, $f(z) \in D$ et que f réalise une bijection de P sur D .

3 Équations fonctionnelles

III.3.1 Centrale 2010

Trouver les fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

III.3.2 X-ENS 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $f(f(n)) = n + 2023$ pour tout entier n .

III.3.3 Centrale 2020

Trouver les fonctions réelles définies et continues sur $]0, +\infty[$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$,

$$f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

III.3.4 Mines-Ponts PSI 2022

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X + 1) = (X + 4)P(X)$.

III.3.5 X PC 2015

1. Montrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \cos$.

III.3.6 X MP

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \end{cases}$$

Que dire de f ?

On commencera par montrer que f est bornée au voisinage de 0 en considérant la fonction $\varphi : x \mapsto x + x^{-1}$.

III.3.7 Centrale

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors ω^2 l'est aussi.
2. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.
3. En déduire que 0 n'est pas une racine de P .
4. Déterminer P en le factorisant.

III.3.8 x

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y).$$

III.3.9 x MP

Trouver toutes les fonctions continues f telles que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + r) - f(x) \in \mathbb{Q}$.

III.3.10 CCP MP

On note F l'ensemble des fonctions de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

1. Soit $f \in F$. Montrer que f vérifie une équation différentielle de la forme

$$y'' + ky = 0. \quad (1)$$

2. Déterminer les solutions de (1).
3. Déterminer F .

III.3.11 Mines-Télécom PSI 2015

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

III.3.12 x MP

Trouver toutes les fonctions f et g appartenant à $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que, pour tous x et t appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $f(xt) = f(x)f(t)$.

III.3.13 x-ENS

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient, pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

III.3.14 TPE/EIVP PC 2016

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$.

III.3.15 Mines-Ponts MP 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.

III.3.16 Mines-Ponts MP

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

III.3.17 Centrale

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

III.3.18 Mines-Ponts PC 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = f(x) + 1.$$

III.3.19 Centrale MP 2023

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = 2f(x) - x.$$

III.3.20 CCINP MP 2022

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 - X)P'' = 6P$.

III.3.21 Centrale PC 2024

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.
2. $P(X^2) = P(X + 1)P(X)$.

III.3.22 Mines-Ponts MP 2022

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

III.3.23 X-ENS

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 1) = P(X^2 + X + 1)$.

III.3.24 Mines-Ponts PSI 2019

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \cos(P(x))$.

1. Trouver les solutions de degré 0.
2. Trouver les solutions de degré 1.
3. Trouver toutes les solutions.

III.3.25 X 2024

Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'on ait

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x)).$$

III.3.26 X 2024

Trouver les fonctions $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que

$$f(x) = 2 \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right).$$

III.3.27 X PC 2019

Trouver les fonctions f de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$|f| + |1 + f'| \leq 1.$$

III.3.28 X PC 2019

Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

III.3.29 CCP 2015

Trouver les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

III.3.30 CCP 2015

On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)). \quad (E)$$

1. Soit f une fonction vérifiant la relation (E), et les conditions $f(0) = f(1) = 0$.
 - (a) Montrer que f est impaire.
 - (b) Montrer que f est 2-périodique et en déduire que f est bornée.
 - (c) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$.
 - (d) Qu'en déduire sur f ?
2. Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété (E).

III.3.31 Mines-Ponts 2015

Trouver toutes les fonctions f continues de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t) dt.$$

III.3.32 ENS Ulm

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \geq 0, \quad f(xy) \geq f(x)f(y) \text{ et } f(1) = 1.$$

III.3.33 Centrale PSI 2017

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle (E) : $2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème (E) se ramène à deux équations différentielles du premier ordre, et résoudre le problème (E).

III.3.34 X ESPCI

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

III.3.35 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

III.3.36 Mines

Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \exists a, b \in \mathbb{R}_+, \quad f([x, y]) = [a, b] \quad \text{et} \quad |x - y| = |a - b|?$$

III.3.37 Mines-Ponts MP 2015

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$f'(f(x))f'(x) = 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) > 0.$$

III.3.38 Centrale-Supélec PC 2014

Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \cos(x) f(x).$$

III.3.39 X FUF 2024

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x + y}.$$

III.3.40 X MP 2020

Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n > 0, \quad f(n + 1) > f(f(n)).$$

III.3.41 Mines 2022

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t) f(2t) dt.$$

III.3.42 ENS Ulm 2022

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x - 1) + f(x + 1) + f(x - \pi) + f(x + \pi)}{4}.$$

III.3.43 Mines-Télécom MP 2023

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $XP(X) = (X - 3)P(X + 1)$.

1. Montrer que si P vérifie la relation, alors 1, 2 et 3 sont des racines de P .
2. Donner tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X + 1)$.
3. Conclure.

III.3.44 Mines-Télécom MP 2023

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x - \pi) + \sin(x).$$

III.3.45 Mines-Télécom MP 2023

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

III.3.46 Mines-Ponts MP 2023

1. Soit $c > 2$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue 1-périodique vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x).$$

Montrer que $f = 0$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x - n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

III.3.47 Mines-Ponts PC 2023

On admet que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, alors toute fonction définie sur I , à valeurs réelles, continue et injective est strictement monotone. Pour tout réel x , on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x + 1\}.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x + 1) = f(x) + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$.
4. On pose $d = f(0)$ et on note g la restriction de f à l'intervalle $[0, d]$.
 - (a) Montrer l'encadrement $0 < d < 1$.
 - (b) Montrer que g réalise une bijection de $[0, d]$ sur $[d, 1]$ et que celle-ci est continue et strictement croissante.
5. Décrire les éléments de $\mathcal{E}$.

III.3.48 Mines-Télécom PSI 2019

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)f(x-t) \, dt.$$

III.3.49 TPE/EIVP MP 2015

Trouver les fonctions $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t} \, dt = f(x).$$

III.3.50 X MP 2018

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

III.3.51 X MP 2017

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h.$$

III.3.52 X ESPCI 2015

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y).$$

III.3.53 X

Montrer qu'il n'existe pas trois fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f, g et h telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(f(x) + g(y)) = xy.$$

III.3.54 ENS PC 2024

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)^2 = f(t\sqrt{2}).$$

III.3.55 X PSI 2023

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotones telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

III.3.56 Mines-Ponts PC 2024

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 + (1 + f'(x))^2 \leq 1.$$

Que dire de f ?

III.3.57 X-ENS

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \quad f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) \, dt.$$

III.3.58 Centrale-Supélec PC 2022

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in]-1, 1[$. Soit encore $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x).$$

2. Exprimer la fonction F dans le cas où f est la fonction cosinus.

III.3.59 Mines-Ponts PC 2015

Trouver les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) \, dt + 1.$$

III.3.60 X MP 2015

Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée vérifiant :

$$f'(t) = f(t-1).$$

III.3.61 ENS MP 2014

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$.

Que dire de f ?

III.3.62 ENS Lyon PC 2016

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$?

III.3.63 X MP 2019

On dit que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est *multiplicative* si :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

1. Décrire ces fonctions.
2. Décrire celles qui sont croissantes.

III.3.64 Mines-Télécom PSI 2019

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

avec $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine fonction u .

2. Montrer que u est solution de (E) .
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E) .

III.3.65 Mines-Ponts

Soit l'équation fonctionnelle :

$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

1. Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xh(x)$. À quelle condition sur h , la fonction f est-elle solution de (E) ?

On définit par récurrence une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $h_0 : x \mapsto 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_{n+1} : x \mapsto h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Soit $x \in [0, 1]$ et $T_x : y \mapsto y - \frac{xy^2}{2}$.

3. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0, 1]$ et que $T_x([0, 1]) \subset [0, 1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
4. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $[0, 1]$.
5. Montrer que (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

III.3.66 Mines-Ponts

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x \cos(x).$$

III.3.67 X MP 2013

Soit f de classe C^∞ , 1-périodique. Résoudre :

$$g(t + \sqrt{ab}) - g(t) = f(t).$$

III.3.68 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ telles que :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \, dx = 1.$$

III.3.69 ENS PC 2024

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (P \circ P)(z) = 0\}.$$

III.3.70 ENS PC 2024

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$f(7x + 1) = 49f(x).$$

III.3.71 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait :

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{x - \frac{1}{n}}^{x + \frac{1}{n}} f(t) \, dt.$$

III.3.72 ENS PC 2025

Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait :

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{x - \frac{1}{n}}^{x + \frac{1}{n}} f(t) \, dt.$$

III.3.73 ENS MP 2015

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que :

- $\forall x \in]0, +\infty[, f(x + 1) = \ln(x) + f(x)$;
- $f(1) = 0$;
- f est convexe sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que, en cas d'existence, la fonction f est unique.
2. Expliciter f .

III.3.74 ENS PC 2025

Le but de l'exercice est de construire une solution non nulle pour l'équation fonctionnelle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : f'(x) + f(x) = \frac{-f(x+1)}{1+x^2}.$$

1. Pour $S \in C(\mathbb{R})$, résoudre $f' + f = S$.
2. Soit $x_0 > 0$. On définit une suite de fonctions sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1)e^t}{1+t^2} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que cette suite est bien définie sur $[x_0, +\infty[$.
- (b) Montrer que si x_0 est suffisamment grand, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est définie et vérifie l'équation (E).
Déterminer son comportement quand $x \rightarrow +\infty$.

III.3.75 PT 2017

Soit n un entier naturel impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2).$$

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E).
2. Déterminer le degré du polynôme P .
3. Notons ω une racine $n^{\text{ème}}$ de -1 . Montrer que $-\omega$ est racine de P .
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant l'équation (E) ?

III.3.76 Mines-Ponts PC 2025

On cherche les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(E) : f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

Soit f une solution.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
2. Montrer que, si $f(x_0) = 0$, alors $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que, si f s'annule, alors f est nulle.
4. Déterminer toutes les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient (E).

III.3.77 Mines-Ponts MP 2026

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto f(x+a)$ et $F_f = \text{Vect}((f_a)_{a \in \mathbb{R}})$.

1. Proposer une fonction f telle que F_f soit de dimension finie.
2. Montrer que si F_f est de dimension finie, $F_{f'}$ l'est également.
3. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\dim(F_f) = 1$.
4. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\dim(F_f) = 2$.

III.3.78 CCINP PSI 2026

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $I = [-a, a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, et vérifiant les conditions suivantes :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x),$$

où φ est une fonction telle que, pour tout $x \in I$,

$$|\varphi(x)| \leq c|x|,$$

où c est une constante appartenant à $\mathbb{R}^*$. On suppose que l'existence de c est vérifiée.

1. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

converge et définit, par sa somme, une fonction continue.

2. Vérifier que la série précédente est bien solution du problème.
3. Montrer que la différence de deux solutions du problème est nulle.
4. En déduire l'ensemble des fonctions solutions du problème.
5. En supposant que φ est de classe C^1 , montrer que f est dérivable.

III.3.79 X 2021

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x+y^3) + f(x-y^3)}{2}.$$

III.3.80 X 2014

Déterminer les fonctions $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) - f(x) = x.$$

III.3.81 X 2021

Soit $b \geq 0$. Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$f^2 \leq b^2 - (b - f')^2.$$

III.3.82 X

Trouver tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $P^2 = 1 + (X^2 - 1)Q^2$.

III.3.83 ENS

Soit a, b, c des réels strictement positifs deux à deux distincts. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0.$$

III.3.84 x

Soit a et b deux nombres réels. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, si $x \neq y$,

$$f'(ax + by) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

III.3.85 ENS

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'on ait $f(f(x)) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III.3.86 x

Trouver les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

III.3.87 x FUF 2024

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2024}.$$

III.3.88 Mines-Ponts

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x).$$

III.3.89 Centrale-Supélec

1. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective.

Démontrer que g est strictement monotone.

On cherche les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ g)(x) = 2g(x) - x.$$

2. Démontrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.
3. Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.

III.3.90 x MP

Soit $M, m \in \mathbb{R}$ avec $0 < m < M$, $f \in C(\mathbb{R}, [m, M])$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}.$$

1. On suppose $m > 2$ ou $M < \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe une unique solution bornée de (E) .

2. Montrer que les solutions bornées de (E) ne s'annulent pas.

III.3.91 Centrale MP

1. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + f(-x).$$

2. On donne $\alpha \in]-1, 1[$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ développables en série entière au voisinage de tout point telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + f(\alpha x).$$

III.3.92 Centrale PSI 2010

Montrer qu'il existe $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + f(t)^2} dt.$$

La fonction f est-elle bornée ? unique ?

III.3.93 Mines-Télécom 2019

Trouver l'ensemble des fonctions f dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

III.3.94 CCP 2015

Soit $a \in \mathbb{R}$ et S_a l'ensemble des fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -f(a-x)$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que si f appartient à S_a , alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
2. Déterminer S_a .

4 Divers

III.4.1 X/Centrale

On a $2n + 1$ cailloux. Lorsqu'on isole n'importe lequel d'entre eux, on peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n cailloux dont la somme des masses est égale. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

III.4.2 x

Calculer :

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi]} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}.$$

III.4.3 Mines

1. Montrer que $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est une racine d'un polynôme de degré trois à coefficients entiers.
2. Justifier que a est irrationnel.

III.4.4 X-ENS

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer la *formule d'inversion de Pascal* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k (-1)^{n-k}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de *dérangements* de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe. Calculer d_n .

III.4.5 ENS ULSR MP 2023

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) > 0\}.$$

III.4.6 x

Montrer que $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \min\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$

III.4.7 X-ENS MP

On considère $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que les racines de P ont une partie réelle strictement négative si et seulement si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$.

III.4.8 x MP

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant n racines réelles distinctes supérieures à 1.

On pose $Q(x) = (1 + X^2)P(X)P'(X) + X(P(X)^2 + P'(X)^2)$.

Montrer que Q admet au moins $2n - 1$ racines réelles distinctes.

III.4.9 x PC 2015

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et p, q deux nombres réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

III.4.10 x

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

III.4.11 x-ENS

Soit $I \subset \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) $x \mapsto xf(x)$ est convexe ;
- ii) $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

III.4.12 Mines-Ponts

Déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $x^y = y^x$. Peut-on trouver des solutions non entières ?

III.4.13 x

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

III.4.14 x PC 2019

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = x^n + ax + b$$

avec $n \geq 2$ entier et a, b réels.

1. Montrer que f n'a pas plus de 3 racines réelles différentes.
2. Donner un exemple avec 3 racines réelles différentes.
3. Montrer que si de plus n est pair, f n'a pas plus de 2 racines réelles différentes.

III.4.15 x

Soit f la fonction définie pour tout $\lambda \in]0, 1]$ par :

$$f(\lambda) = \sup_{x \in [0, \frac{1}{\lambda}]} \left(e^{-x} - (1 - \lambda x)^{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de f en 0.

III.4.16 Mines-Ponts

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $a + b \geq n$.

Montrer que
$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$

III.4.17 X-ENS MP

Montrer que la fonction sinus n'est pas la restriction à $]a, b[$ d'une fraction rationnelle.

III.4.18 X

Soit I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *logarithmiquement convexe* si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_a : x \mapsto f(x)a^x$ est convexe.

III.4.19 Mines-Ponts PC 2022

Montrer que la seule involution continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est $\text{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

III.4.20 X-ENS

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *négligeable* (ou de *mesure nulle*) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que :

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon$$

où $\mu(I_n)$ désigne la longueur de l'intervalle I_n .

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On note Z l'ensemble des zéros de f' . Montrer que $f(Z)$ est négligeable.

III.4.21 Mines-Ponts PSI 2019

On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^k - ax - b)^2 e^{-x} dx$.

Montrer que I_k existe, est atteint, et calculer sa valeur.

III.4.22 X-ENS PC 2023

Soit $x_0 < \dots < x_n$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Montrer qu'il existe des nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ l'on ait

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k).$$

III.4.23 X-ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Calculer $T_{n+1} + T_{n-1}$. (Les polynômes T_n sont appelés *polynômes de Tchebychev*.)

2. Montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant. Déterminer ses racines et les extrema de la fonction $x \mapsto T_n(x)$.
3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré n , on a

$$\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

avec égalité si et seulement si $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

III.4.24 Mines

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$P(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x+k) \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré inférieur à } n.$$

III.4.25 CCP

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f et tout g de E ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III.4.26 Mines-Ponts

Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda \in]-1, 1[$.

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)\}$.

1. Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une fonction non nulle de E qui est développable en série entière.
3. Déterminer E .

III.4.27 Centrale

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer à quelles conditions sur n et p , les polynômes $X^n - 1$ et $(X + 1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

III.4.28 X PC 2019

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = f(1) \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2.$$

On définit :

$$\begin{aligned} H &: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{-1}^1 f^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Montrer que le minimum de H sur E est atteint et le calculer.

III.4.29 X PC 2019

Soit $n \geq 3$ un entier. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à n côtés dont les milieux sont fixés.

III.4.30 Mines PSI 2017

Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$.

III.4.31 Mines-Ponts 2012

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

III.4.32 Mines-Ponts 2016

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arctan(x - 1) + \arctan(x) + \arctan(x + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

III.4.33 Mines-Ponts

Quelles sont les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont limite uniforme de polynômes convexes ?

III.4.34 Centrale PSI

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t) \ln(t) \, dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t) \ln(t) \, dt = \int_0^\pi P(t) Q(t) \sin(t) \, dt$.

III.4.35 x ESPCI

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$$

et le déterminer.

III.4.36 x ESPCI

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
 - (a) Calculer $\frac{P'(X)}{P(X)}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ privé des racines de P . En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X)P''(X) \leq P'(X)^2$.
 - (b) Montrer que, si $\deg(P) \geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

III.4.37 Mines-Ponts PSI

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes deux à deux. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls, autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $|a_k| + |a_{k+1}| \neq 0$.

III.4.38 x MP 2019

Pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, on considère sa *fonction moyenne* :

$$\begin{aligned} Mf &: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (M^m f)(n) = f(1).$$

III.4.39 Mines-Ponts MP 2019

Soit $a_1 < \dots < a_n$ des entiers, et

$$P = 1 + \prod_{i=1}^n (X - a_i)^2.$$

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

III.4.40 Mines-Télécom MP 2024

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

III.4.41 Mines-Télécom MP 2022

Exprimer $\sin(3x)$ comme polynôme de $\sin(x)$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

III.4.42 Mines-Ponts 2021

On pose $g : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Déterminer pour quelles valeurs de α la fonction g est polynomiale.

III.4.43 CCINP PC 2014

Soit

$$P : x - y + z = 3 \quad \text{et} \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Déterminer l'intersection de S et P .

III.4.44 X MP 2015

Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est un *nombre algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

III.4.45 X MP 2019

Existe-t-il des fractions rationnelles non constantes $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ telles que $X^2 + Y^2 = 1$?

III.4.46 Mines-Ponts MPI 2024

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

- (b) Étudier la réciproque.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie.

Soit $a \in]0, 1[$ et $f : E \rightarrow E$ telle que :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \|f(u) - f(v)\| \leq a\|u - v\|.$$

Démontrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5}(\cos(x) - \sin(y), \sin(x) - \cos(y)).$$

Démontrer que f admet un unique point fixe.

III.4.47 ENSEA/ENSIIE MP 2021

Montrer que l'équation

$$\arctan(x) + x = 1$$

admet une unique solution sur $[0, 1]$.

III.4.48 CCINP PC 2019

Soit E un ensemble non vide et f une application de E dans lui-même.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f \circ f$ est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

III.4.49 ENSEA/ENSIIE MPI 2023

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 + 1$.

III.4.50 Mines-Ponts MP 2018

1. Comment définir l'angle formé par deux plans dans $\mathbb{R}^3$?
2. Trouver l'angle formé par les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$P_1 : 2x + 3y - z = 0 \quad \text{et} \quad P_2 : x - 2y + 3z = 0.$$

III.4.51 Mines-Ponts PC 2024

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Montrer que toute fonction de classe C^2 sur I est différence de deux fonctions convexes.

III.4.52 CCINP PSI 2012

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

III.4.53 Mines-Télécom PSI 2021

Résoudre le système suivant où $(m, a, b) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$$

III.4.54 CCINP PSI 2014

Soit la conique d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.

1. Donner la nature de cette conique. La tracer.
2. Donner l'équation des tangentes aux points d'intersection avec les axes.

III.4.55 TPE/EIVP MP 2017

Soit un entier n supérieur ou égal à 2 et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes. Comparer la moyenne arithmétique des racines de P et celle des racines de P' .

III.4.56 X MP 2023

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$0 \leq x \leq y \leq x^2 + z \quad \text{et} \quad z < \frac{1}{4}.$$

Montrer que :

$$y \leq 2z \quad \text{ou} \quad x \geq 1 - z.$$

III.4.57 ENSEA/ENSIIE MP 2019

On définit une suite de polynômes telle que $H_0 = 1$ et $H_{n+1}(X) = XH_n(X) - H'_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer H_1 et H_2 .
2. Expliciter, en justifiant, le degré de H_n .
3. Montrer que pour tout entier n non nul, $H'_n(X) = nH_{n-1}(X)$.
4. En déduire que $H_n(X+a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{n-k}(a) X^k$.

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

III.4.58 TPE/EIVP MP 2017

Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 A(t)P(t) dt.$$

III.4.59 Mines-Ponts MP 2025

Soit

$$f(x) = x^3 - \ln(x).$$

Déterminer les intervalles sur lesquels f admet une fonction réciproque, et donner un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction réciproque.

III.4.60 X 2022

On considère le nombre rationnel :

$$r = \frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 \dots$$

1. Que vous inspire r ?
2. Formuler une conjecture à l'aide d'une série, puis la démontrer.
3. Que peut-on dire du développement décimal de r ?
4. En déduire une conjecture faisant intervenir la suite de Fibonacci, puis la démontrer.

III.4.61 X 2022

Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

III.4.62 ENS 2022

Montrer que, dans tout triangle, on peut inscrire une ellipse tangente au milieu de chaque côté du triangle.

III.4.63 Mines 2022

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$. Calculer, sous réserve d'existence :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(a_i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i P'(a_i)}.$$

III.4.64 X 2022

Existe-t-il un cercle contenant exactement trois points à coordonnées rationnelles ?

III.4.65 Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{A'(k)} \frac{A}{X-k}.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

III.4.66 Mines 2022

On pose $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.

On note $A = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid a_i \neq 0\}$ et $\mu(P) = \text{Card}(A)$. On suppose que $(x-1)^k$ divise P pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mu(P) \leq k$.

1. On pose $P_0 = 1$ et $P_{s+1} = X(X-1) \cdots (X-s)$ pour $s \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $s \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que $a_i = 0$ pour tout $i \in A$. Conclure.
3. Discuter de l'optimalité de la minoration obtenue.

III.4.67 Mines-Télécom MP 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme

$$P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1.$$

1. Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n .
2. Dans le cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne.

III.4.68 TPE/EIVP MP 2018

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible.

Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admet que des racines simples.

III.4.69 X MP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$.

III.4.70 X ESPCI 2024

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non constants, n'ayant pas de racine en commun et tels que AB est un carré. Montrer que A et B sont des carrés.

III.4.71 Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $a_0 \neq 0$
- ii) $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists ! P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$

III.4.72 Centrale-Supélec TSI 2025

Soit f une fonction 1-périodique, définie par :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = |x|.$$

- Tracer le graphe de f sur deux périodes.
- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
- Déterminer les sommes suivantes :

(a) $A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

(b) $B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

(c) $C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

III.4.73 Centrale-Supélec TSI 2024

Soit f une fonction 2π -périodique, impaire, telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = x(\pi - x).$$

- Tracer f sur deux périodes.
- Calculer la série de Fourier de f .
- Calculer $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

III.4.74 Mines-Ponts MP 2015

Étudier $x \mapsto \frac{\ln(|x-1|)}{\ln(|x-2|)}$.

III.4.75 Mines-Ponts MP 2025

On considère un sous-espace vectoriel U convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est *convexe* si :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. On suppose que f est différentiable.

Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in U, \quad f(y) - f(x) \geq Df(x) \cdot (y - x).$$

2. Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Montrer que $\min \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ pour $f \in \mathcal{F}$ est atteint par la seule fonction affine appartenant à $\mathcal{F}$.

III.4.76 Centrale-Supélec TSI 2024

Soit une surface S d'équation $z^3 = xy$ et la droite D d'équation $x = 2$ et $y = 3(z+1)$. Déterminer les plans tangents à S qui contiennent D .

III.4.77 Mines-Ponts MP 2018

Soit f une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(x) = e^{-xf(x)}$.

1. Étudier les variations de $x \mapsto (f(x) + f(-x))^2$.
2. Qu'en déduire sur f ?
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ supérieure ou égale à 1.

III.4.78 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], \quad f(x) \neq f\left(x + \frac{3}{10}\right).$$

1. Montrer que f s'annule en 7 points distincts de $[0, 1]$.
2. Dessiner l'allure de cette fonction.

III.4.79 ENS MP 2016

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.

1. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit rationnelle en ces points. Montrer qu'alors F est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers.
2. On suppose désormais qu'il existe une infinité d'entiers tels que F soit entière en ces points. Montrer que F est un polynôme à coefficients rationnels.

III.4.80 CCINP PC 2023

1. Soit $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.
Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$

- (a) Exprimer Q' .
 - (b) À l'aide de la fonction $g : t \mapsto e^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0).$$

- (a) Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire.
 - (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
 - (c) Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. Ce nombre est noté u_n .
4. Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-\frac{1}{n}}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n).$$

III.4.81 CCINP MP 2018

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = 0$.
3. Pour quels entiers p l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = p$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

III.4.82 Mines-Télécom PC 2018

On se place dans un repère orthonormé du plan. On considère n points du plan, $A_1, \dots, A_n$, donnés par leurs coordonnées dans ce repère orthonormé : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i(a_i, b_i)$. Soit $M(x, y)$. On définit f telle que $f(M) = \sum_{i=1}^n MA_i^2$. Déterminer les éventuels extrema de f .

III.4.83 CCINP TSI 2021

Étudier la courbe paramétrée par $\left(\frac{t^2}{1-t^2}, \frac{t^3}{1-t^2} \right)$.

III.4.84 CCINP PSI 2016

Soit la surface d'équation $xyz = 1$.

1. Cette surface est-elle régulière ?
2. Montrer que quelque soit le point de cette surface, les intersections du plan tangent à la surface en ce point avec les plans Oxy , Oxz et Oyz forment un tétraèdre dont le volume est toujours le même.

III.4.85 X MP 2017

Soit α, β et γ les trois angles d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta)} \geq \frac{8}{3 + 2\cos(\gamma)}.$$

III.4.86 Mines-Ponts MP 2017

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$ et $m_j = \cos((j-1)x)$.
Montrer que m_j est un polynôme en $\cos(x)$.

III.4.87 Mines-Ponts MP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une subdivision de $[a, b]$. On note A l'ensemble des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont affines sur $[s_k, s_{k+1}]$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel, de dimension finie, et déterminer sa dimension.
2. Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement. Montrer que $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et que sa limite est dans A .

III.4.88 Mines-Ponts MP

Pour tout réel t , on considère la droite d'équation $(1-t^2)y + 2tx = 2t - 4$. Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes ces droites.

III.4.89 Centrale PC 2013

Étudier la courbe donnée par l'équation polaire $\rho(t) = \frac{\cos(t)}{1 - \cos(t)}$.

III.4.90 Mines-Ponts MP 2015

Montrer qu'il existe une fraction rationnelle F telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'on ait $F(\tanh(x)) = \tanh(5x)$. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

III.4.91 CCINP TSI 2023

On pose, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire.
2. Montrer que f^{-1} est C^∞ et admet un développement limité à tout ordre en 0.
3. Déterminer le développement limité de f^{-1} , en 0, à l'ordre 4.

III.4.92 Centrale-Supélec MP 2019

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que P et Q ont les mêmes racines. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $P + \alpha$ et $Q + \alpha$ ont les mêmes racines. Montrer que $P = Q$.

III.4.93 CCINP MPI 2024

Soit $n \geq 2$ entier, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On pose deux fonctions f et g telles que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} & \text{si } \prod_{i=1}^n x_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On pose également $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid g(x_1, \dots, x_n) = 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ , en particulier sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.
2. Déterminer μ et $A \in \Gamma \cap]0, +\infty[^n$ tels que $f(A) = \mu$.
3. En déduire que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

III.4.94 ENS MP 2023

1. Montrer l'existence d'une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta).$$

Montrer que ces polynômes sont à coefficients entiers.

2. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Trouver les valeurs rationnelles possibles de $\cos(r\pi)$.

III.4.95 Centrale 2015

On considère $n + 1$ nombres réels tels $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Montrer, après avoir justifié l'existence des intégrales considérées, qu'il existe $n + 1$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k).$$

III.4.96 CCINP MPI 2024

1. Soit $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{2i\pi t}.$$

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$.

2. Soit g une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$. On note :

$$\phi : t \mapsto \frac{1}{i} \int_a^t \frac{g'(s)}{g(s)} ds \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto g(t) e^{-i\phi(t)}.$$

- (a) Montrer que ϕ est de classe C^1 .
- (b) Montrer que ψ est constante.
- (c) Montrer qu'il existe $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in [a, b], \quad g(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}.$$

3. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe C^1 tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}$.

Pouvait-on déduire la valeur de la question 1 ?

III.4.97 CCINP PC 2024

- 1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- 2. On note M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
 - (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.
 - (b) En déduire le spectre de $M + I_3$.
- 3. Soit $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in]0, 1[\mid x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$.
 - (a) Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Montrer que la fonction f définie sur D par :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^n + x_2^n + x_3^n + (1 - x_1 - x_2 - x_3)^n$$

est de classe C^2 sur D et calculer ses dérivées partielles.

- 4. Montrer que le seul point critique de f est $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
- 5. Calculer la matrice hessienne de f en a .
- 6. En déduire que f admet un minimum local strict en a .

On admettra dans la suite que f atteint un minimum global strict en a .

- 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de même loi à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n) \geq \frac{1}{4^{n-1}}$.

III.4.98 Centrale-Supélec TSI 2025

Faire une étude complète de la courbe paramétrée par :

$$x(t) = 3 \cos(t) + \cos(3t) \quad \text{et} \quad y(t) = 3 \sin(t) + \sin(3t).$$

III.4.99 X ESPCI 2023

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \frac{2n}{5}$.

III.4.100 Mines-Télécom MP 2023

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

III.4.101 Mines-Ponts MP 2025

Soit n un entier naturel non nul et x un réel tel que $x \notin \llbracket 1, n \rrbracket$.

On définit :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{(k-x)^2}.$$

Calculer $\frac{u_n(x)}{v_n(x)}$.

III.4.102 X ESPCI 2019

On pose $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $f : (x, y) \mapsto x + ixy$.

Représenter $f(\mathbb{R}^2)$. La courbe présente-elle des points multiples ? Si oui, les déterminer.

III.4.103 Mines-Télécom MP 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle α . Montrer que $\alpha > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi \alpha^n)$ converge.

III.4.104 ENS MP/MPI 2024

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$. Démontrer que :

$$(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx).$$

III.4.105 X PC 2023

Soit P défini par $P(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $P|_{\mathbb{N}^2}$ soit injective.

III.4.106 Mines-Ponts MPI 2023

Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.
Ce résultat est-il vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

III.4.107 Mines-Télécom PSI 2023

Soit

$$f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)).$$

Tracer le graphe de f .

III.4.108 X ESPCI 2017

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, prouver l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

III.4.109 Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, soit $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$.

Pour quels couples (n, p) , le nombre $S_{n,p}$ est-il un entier ?

III.4.110 Mines-Ponts MP 2017

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt.$$

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.
2. On pose $e_0 : t \mapsto 1$ et pour $k > 0$, $e_k : t \mapsto \sqrt{2} \cos(kt)$.

Interpréter $S_n(f) = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

3. Montrer que $\sum_{k \geq 0} \langle f, e_k \rangle^2$ converge.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que :

$$\|f - p \circ \cos\|_\infty \leq \varepsilon.$$

5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0$ et déterminer la somme de $\sum_{k \geq 0} \langle f, e_k \rangle^2$.

III.4.111 X MP 2019

Soit deux ensembles A et B . On admet que si on dispose de deux injections respectivement de A dans B et de B dans A , alors A et B sont en bijection et ont même cardinal.

1. Montrer que $\{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

III.4.112 Mines-Télécom MP 2019

Déterminer tous les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = n$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

III.4.113 Mines-Ponts MP 2018

Soit $P = X^n + \dots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $Q = X^n + \dots + b_{n-1}X + b_n \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que si les b_i sont assez proches des a_i , alors Q est scindé à racines simples.

III.4.114 ENS MP 2019

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 10 ayant 8 racines (au moins) dans $\mathbb{U}$, 2 (au moins) dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $P(0) = 1$ et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

III.4.115 Centrale-Supélec PSI 2015

On sait que pour tout $x \in]0, 1[$, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que x puisse s'écrire $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ en base 10. On définit f sur $[0, 1]$ qui associe 0 à 0, 1 à 1 et, pour tout $x \in]0, 1[$ associe $0, a_2 a_1 a_3 \dots$.

1. Donner la représentation graphique de f .
2. La fonction f est-elle continue sur $[0, 1]$?
3. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?
4. Donner une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) dx$.

III.4.116 ENS MP 2015

Soit f de classe C^∞ . On dit que x est un « *super zéro* » de f si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = 0$. Quelles sont les implications valables entre les trois propositions suivantes ? Pour les implications fausses, fournir des contre-exemples.

- La fonction f s'annule une infinité de fois.
- La fonction f s'annule une infinité de fois sur un segment.
- La fonction f a un super zéro.

III.4.117 CCINP PC 2024

1. Déterminer $\sup \left\{ n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
2. Comparer e^π et π^e .

III.4.118 X MP

1. Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \quad (\text{formule de Legendre})$$

2. Par combien de zéros l'entier $100!$ s'achève-t-il ?

III.4.119 Centrale-Supélec MP 2015

Soit N une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$. On dit que N est une *valeur absolue* si et seulement si :

- $\forall x \in \mathbb{Q}, N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(xy) = N(x)N(y)$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Une valeur absolue N est dite *ultramétrique* si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \quad N(x + y) \leq \max(N(x), N(y)).$$

La valeur absolue N est dite *triviale* si elle est constante sur $\mathbb{Q}^*$.

Si p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p -adique définie sur les entiers. On pose par convention $\nu_p(0) = +\infty$.

1. Soit N une valeur absolue. Déterminer $N(1)$ et $N(-1)$.
2. Soit $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, où $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, et p un nombre premier.
Montrer que $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ ne dépend que de q .
On le note $\nu_p(q)$. On définit pour $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-\nu_p(q)}$.
Montrer que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
3. Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $N = |\cdot|_p^\alpha$.

III.4.120 Mines-Ponts

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe.
2. On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ell x$ existe.

III.4.121 Mines-Ponts MP 2024

Soit $n \geq 2$ entier. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

III.4.122 Centrale-Supélec MP 2017

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que α est *valeur asymptotique* de f s'il existe une fonction $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma(t)) = \alpha$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs asymptotiques de $f : z \mapsto \frac{z}{1 + |z|}$.
2. Même question pour $f : z \mapsto e^z$.
3. Même question pour $f : z \mapsto \sin(z)$.

III.4.123 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad x^n - 1 \geq n \left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

III.4.124 Mines-Ponts MP 2016

Soit X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On dit qu'une matrice A vérifie la propriété (P) si et seulement si ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X - Y & Y - Z \\ X - Y & 0 & 0 \\ Y - Z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Calculer la probabilité que A vérifie la propriété (P) .

2. Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie la propriété (P) si, et seulement si, elle est diagonale.

III.4.125 ENS MP 2015

Soit H l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, dont la bijection réciproque est continue. Quelle est la nature de H ? Quels sont ses sous-groupes finis ?

III.4.126 X MP 2018

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = 0 \implies \operatorname{Re}(x) < 0.$$

Montrer que tous les coefficients de P sont de même signe.

III.4.127 X MP 2018

1. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et n un entier supérieur à 1. Montrer que

$$\frac{\sin(4n\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)}$$

est un polynôme en $\cos^2(\theta)$ de degré inférieur ou égal à $2n - 1$.

2. Montrer que $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2^{4n-3}}}.$

3. Calculer de la même façon $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right).$

III.4.128 X MP 2018

Décrire qualitativement l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy - 2y^2 = 0\}.$

III.4.129 CCINP PC 2024

Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Montrer que P et Q possèdent les mêmes racines.
2. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

III.4.130 ENS

On se propose de montrer que $\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des entiers vérifiant $a_n - b_n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Conclure.

III.4.131 x

Montrer que parmi treize réels distincts on peut toujours en choisir deux, disons x et y , tels que :

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

III.4.132 ENS MP 2017

On dit que P est un *polygone entier* si P est l'enveloppe convexe de points de $\mathbb{Z}^2$. On dit que P est équivalent à Q , et on note $P \sim Q$, si P et Q sont des polygones entiers et s'il existe une transformation affine A qui envoie P sur Q et telle que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Quelle est le nombre de classes d'équivalence (éventuellement infini) ? Même question si l'on fixe l'aire du polygone.

III.4.133 Mines-Télécom MP 2018

Déterminer toutes les fonctions convexes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

III.4.134 ENS MP 2016

Soit F et G deux polynômes non constants à coefficients entiers tels que pour tous entiers a et b , $F(a) - F(b)$ divise $G(a) - G(b)$. Montrer qu'il existe un polynôme H à coefficients rationnels tel que $G(X) = H(F(X))$.

III.4.135 Mines-Télécom MP 2017

Soit λ et μ deux nombres réels. On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 \in \mathbb{R}_2[X] \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P'_n \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, existe-t-il P_0 tel que $P_n = Q$?

III.4.136 Mines-Ponts MP 2016

Soit E l'ensemble défini par :

$$E = \{f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}), f \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+\}.$$

On pose ϕ définie par, pour tout f dans E et pour tout x dans $\mathbb{R}_+$:

$$\phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\tanh(tx)}{\cosh(t)} dt.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
2. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(t) = \arctan(nt)$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(\phi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

III.4.137 Mines-Ponts MP 2018

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $ff'' = 0$. On pose :

$$Z_{ff'} = \{x \in [a, b] \mid f(x)f'(x) = 0\}.$$

1. Montrer que $Z_{ff'}$ est un intervalle fermé.
2. Montrer que f est affine.

III.4.138 Mines-Ponts PC 2018

Soit P et Q deux polynômes réels non nuls. L'équation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = e^x$$

peut-elle avoir une infinité de solutions ?

III.4.139 ENS MP 2018

Soit n un nombre premier. On considère dans le plan le triangle T formé par l'origine et les points de coordonnées $(0, n)$ et $(n, 0)$. On subdivise ce triangle en n triangles t_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, où chaque t_i est formé par l'origine et les points de coordonnées $(i-1, n+1-i)$ et $(i, n-i)$.

1. On admet le *théorème de Pick* :

Soit P un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières. Alors $S = A + \frac{B}{2} - 1$, où S est l'aire du polygone, A le nombre de points intérieurs à coordonnées entières du polygone, et B le nombre de points à coordonnées entières appartenant à la frontière du polygone.

Montrer alors que pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, les t_i ont le même nombre de points intérieurs à coordonnées entières.

2. Démontrer le théorème admis.

III.4.140 X-ENS PSI 2021

Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2) , et tel que, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\lambda e_1 + \mu e_2\| = \|\lambda|e_1 + |\mu|e_2\| \quad \text{condition } (C_1)$$

On veut montrer que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$|\lambda_1| \leq |\mu_1| \text{ et } |\lambda_2| \leq |\mu_2| \implies \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| \leq \|\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2\| \quad \text{condition } (C_2)$$

1. Donner un exemple d'espace vectoriel normé dans lequel (C_1) est vérifiée, puis un exemple dans lequel elle ne l'est pas.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mu \mapsto \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$. Montrer que :

$$\forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(\mu_1) + \varphi(\mu_2)}{2}.$$

3. En déduire que φ est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in [0, 1], \quad \varphi((1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2) \leq (1 - \alpha)\varphi(\mu_1) + \alpha\varphi(\mu_2).$$

4. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire la propriété (C_2) .

III.4.141 ENS MP 2017

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément :

- $\forall \alpha > 0, f(x) = o(x^\alpha)$;
- $\forall \beta > 0, (\ln(x))^\beta = o(f(x))$?

III.4.142 ENS MP 2014

1. Montrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tous entiers p, q avec q non nul, l'on ait :

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2}.$$

2. En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}.$$

III.4.143 X MP 2018

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire, nul en 1 et en -1 , et strictement positif sur $] -1, 1[$. Soit $\mathcal{S}$ l'aire sous la courbe de P entre -1 et 1. Soit $\mathcal{T}$ l'aire du triangle défini par l'axe des abscisses et les tangentes à P en -1 et en 1.

Montrer que $\mathcal{S} \geq \frac{2}{3}\mathcal{T}$.

III.4.144 ENS

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m a_k z_k^n = 0.$$

Montrer que $a_1 = \dots = a_m = 0$.

III.4.145 X MP 2021

Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe un cercle du plan dont le nombre de points d'intersection avec $\mathbb{Q}^2$ soit n ? L'intersection peut-elle être infinie?

III.4.146 ENS MP 2017

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Trouver les fonctions f de $\llbracket 0, n \rrbracket^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- La fonction f est nulle aux « bords » de $\llbracket 0, n \rrbracket^d$: pour $x \in \llbracket 0, n \rrbracket^d$, si une des coordonnées de x est dans $\{0, n\}$, alors on a $f(x) = 0$.
- Pour tout $x \in \llbracket 0, n \rrbracket^d$ n'ayant aucune coordonnée dans $\{0, n\}$, on a :

$$\sum_{y \in A_x} (f(x) - f(y)) = 0,$$

où A_x désigne l'ensemble des points de $\llbracket 0, d \rrbracket^n$ « adjacents » à x , c'est-à-dire obtenus en ajoutant ou soustrayant 1 à une des coordonnées de x .

III.4.147 Mines-Ponts MP 2019

1. Soit $P = (X - r_1)^{\alpha_1} \dots (X - r_n)^{\alpha_n}$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des r_j , $1 \leq j \leq n$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+d} = \frac{u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+d-1}}{d},$$

où $d \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\ell = \frac{2(u_0 + 2u_1 + \dots + du_{d-1})}{d(d+1)}.$$

III.4.148 X MP 2019

Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$V(f) = \sup_{n \geq 2, a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b} \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Montrer que :

$$V(f) < +\infty \iff f \text{ est la différence de deux fonctions croissantes.}$$

III.4.149 X MP 2016

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels, et la fonction P définie pour tout θ réel par :

$$P(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\theta) + \dots + \lambda_n \cos(n\theta) + \mu_1 \sin(\theta) + \dots + \mu_n \sin(n\theta).$$

Montrer que si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\theta) \geq 0$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$ pour tout θ .

III.4.150 X MP 2024

1. Soit n un entier supérieur à 1 et premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.
2. On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0, \underbrace{142857}_{142+857=999} \underbrace{142857}_{142+857=999} \dots \underbrace{142857}_{142+857=999} \dots && \text{avec } 142 + 857 = 999 \\ \frac{2}{7} &= 0, \underbrace{285714}_{285+714=999} \underbrace{285714}_{285+714=999} \dots \underbrace{285714}_{285+714=999} \dots && \text{avec } 285 + 714 = 999 \\ \frac{1}{13} &= 0, \underbrace{076923}_{76+923=999} \underbrace{076923}_{76+923=999} \dots \underbrace{076923}_{76+923=999} \dots && \text{avec } 76 + 923 = 999 \end{aligned}$$

Expliquer.

III.4.151 Mines-Ponts PSI 2019

Soit $\gamma \in [-1, 1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit

$$S_\alpha(\gamma) = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\gamma x) \text{ et } f(0) = \alpha\}.$$

1. Déterminer $S_\alpha(-1)$ et $S_\alpha(1)$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n$.
3. Montrer que la somme de la série précédente appartient à $S_1(\gamma)$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et T définie sur E par :

$$\forall t \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t) dt.$$

4. Montrer que f est un point fixe de T si et seulement si $f \in S_\alpha(\gamma)$.
5. Soit $a \in]0, 1[$ et $(f, g) \in E^2$. Majorer $\|T(f) - T(g)\|_\infty$ en fonction de $\|f - g\|_\infty$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur $[-a, a]$.
6. Montrer que, pour tout $\gamma \in [-1, 1]$, T possède un unique point fixe dans $S_\alpha(\gamma)$. En déduire un élément de $S_\alpha(\gamma)$.

III.4.152 Mines-Ponts MP 2025

Soit a, b, c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que :

$$\sin(a) \sin(b) \sin(c) \leq \frac{1}{8}.$$

III.4.153 X MP

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. On note, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$n(z) = \text{Card}(\{x \in \mathbb{C} \mid P(x) = z\}).$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\deg((p - z) \wedge P') = d - n(z)$.
2. Calculer :

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z)).$$

III.4.154 Centrale-Supélec MP 2017

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $E = \{a \in \mathbb{R} \mid P + a \text{ est scindé}\}$.

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que Q' l'est aussi.
2. Soit a et b des éléments de E . Montrer que $\frac{a+b}{2} \in E$.
3. On suppose que P est unitaire. Montrer que P est scindé si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^{\deg(P)}.$$

III.4.155 ENS PC 2024

Un *répunit* est un nombre entier positif dont l'écriture décimale ne comprend que des 1. Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que l'image d'un répunit par ce polynôme soit toujours un répunit.

III.4.156 X MP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_i)_{i \in [1, n]}$ les racines de $X^n + 1$. Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z^k - 1)^2}.$$

2. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Montrer l'inégalité de Bernstein :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \|P'\| \leq n\|P\|.$$

III.4.157 ENS PC 2025

On définit la fonction Rev par $\text{Rev}(0) = 0$ et si $P \neq 0$ est tel que $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k.$$

1. La fonction Rev est-elle linéaire ? inversible ?
2. Montrer qu'elle est inversible dans $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid P(0) \neq 0\}$.
3. Déterminer les $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$.

III.4.158 Centrale

Un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est dit *stable* si :

$$P(\lambda) = 0 \implies \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de P dans $\mathbb{C}$ et

$$Q = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X - (\lambda_i + \lambda_j)).$$

1. Montrer que P est stable si et seulement si P et Q ont leurs coefficients tous strictement positifs.
2. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$.
Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$, $ab - c > 0$ et $c > 0$.

III.4.159 ENS Lyon 2025

Soit $F, G \in \mathbb{Q}[X]$. Déterminer des conditions nécessaires pour que $F(\mathbb{Q}) = G(\mathbb{Q})$.
On pourra commencer par supposer $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ et montrer que $\deg(F) = \deg(G)$.

III.4.160 PT 2018

Soit Γ un cercle, $A, N \in \Gamma$, H le projeté de A sur la tangente à Γ en un point M .

1. Paramétrer le problème et calculer les coordonnées de H .
2. Déterminer l'aire maximale du triangle MHN .

III.4.161 PT 2015

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer toutes les matrices colonnes X de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle courbe est définie par X ?

III.4.162 PT 2017

Soit $a > 0$. On considère la courbe définie par les conditions :

$$x > 0, \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

1. Déterminer un paramétrage de cette courbe.
2. Déterminer un paramétrage de la normale en tout point M de la courbe.
3. On note $\mathcal{C}_M$ le cercle tangent à la courbe en M et centré sur l'axe Oy .
Donner une équation de $\mathcal{C}_M$.
4. Soit $A(a\sqrt{2}, 0)$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_M$ passant par A sont orthogonales.

III.4.163 Centrale-Supélec PC 2012

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$$P(X+1) - P(X) = Q(X).$$

III.4.164 x

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$.

1. Montrer que $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leq 2\sqrt{2}$.
2. Étudier le cas d'égalité.

III.4.165 ENS MP 2014

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $l \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ et $n \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

1. Calculer :

$$\sum_{0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n < r} e^{\frac{2\pi(i_1 + i_2 + \dots + i_n)}{r}}.$$

2. Ensuite on interdit à i_k de prendre la valeur l .
Calculer la nouvelle somme.

III.4.166 x 2023

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que pour tous α et β réels le polynôme $\alpha A + \beta B$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les racines de A et B sont entrelacées. (Entre chaque racine de A , il existe une racine de B .)

III.4.167 C.C.E. Mines PC 2016

Déterminer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Indication : on pourra utiliser une comparaison avec intégrale.

III.4.168 x MP 2025

Soit

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 7\}.$$

1. Tracer l'ensemble E .
2. On note $E_{\mathbb{Q}} = E \cap \mathbb{Q}^2$ l'ensemble des points de E à coordonnées rationnelles.
Soit $(x, y) \in E_{\mathbb{Q}}$. On considère la tangente à E en ce point. Montrer que le second point d'intersection de cette tangente avec E appartient aussi à $E_{\mathbb{Q}}$.
On définit alors une fonction f qui, à tout x tel qu'il existe $y \in \mathbb{Q}$ avec $(x, y) \in E_{\mathbb{Q}}$, associe l'abscisse du second point d'intersection de la tangente en (x, y) avec E .
3. On pose $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est injective.

III.4.169 Mines-Télécom 2022

Soit Γ la courbe paramétrée par $z(t) = x(t) + iy(t)$ avec x et y de classe C^1 .

1. Montrer que la courbure de Γ s'écrit $\gamma(t) = \frac{(\arg(z'(t)))'}{|z'(t)|}$.
2. Déterminer le rayon de courbure de la courbe paramétrée par

$$z(t) = \cos(t) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + i \sin(t) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

III.4.170 PT 2021

On considère, pour tout $m \in \mathbb{R}$, le cercle d'équation

$$\mathcal{C}_m : (x - (m - 1))^2 + (y - m)^2 = m^2.$$

1. Déterminer la droite passant par l'ensemble des centres de $\mathcal{C}_m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les droites du plan qui sont tangentes à tous les cercles $\mathcal{C}_m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre l'origine et de rayon 1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $m \in \mathbb{R}$ pour que l'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_m$ soit non vide.

III.4.171 PT 2023

On considère 4 points A_0, B_0, C_0 et D_0 dans le plan. On définit quatre suites de points du plan par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_{n+1} le milieu de $A_n B_n$, B_{n+1} le milieu de $B_n C_n$, C_{n+1} le milieu de $C_n D_n$, D_{n+1} le milieu de $D_n A_n$, et a_n, b_n, c_n et d_n les affixes respectives des points A_n, B_n, C_n et D_n .

1. Déterminer la figure que forment les points A_1, B_1, C_1 et D_1 .
2. Déterminer une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}(\text{Id}_4 + M) \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}^T.$$

3. Déterminer une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
4. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Interpréter géométriquement.

III.4.172 PT 2019

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature géométrique de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer les nombres réels λ tels qu'il existe une droite horizontale $\mathcal{D}_\lambda$ passant par le point A_λ de coordonnées $(0, 0, \lambda)$ et coupant une seule fois la surface $\mathcal{S}$.
3. Donner une équation cartésienne de la réunion des droites $\mathcal{D}_\lambda$ précédentes.

III.4.173 C.C.E. Mines MP 2015

Soit P un polynôme à coefficients entiers et quatre entiers $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4}$ distincts tels que $P(\lambda_i) = 7$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Montrer que l'équation $P(n) = 14$ n'admet pas de solution entière.

III.4.174 PT 2022

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $f_0 : x \mapsto x$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{a + f_n(x)}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de la fonction f_n .
2. Montrer que les courbes des fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ passent par un même point que l'on déterminera.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}.$$

4. Déterminer une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

5. En déduire une expression de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.4.175 ENS MP 2017

1. Soit Ω l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. L'ensemble Ω est-il équipotent à $\mathbb{N}$? à $\mathbb{R}$? à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$? On pourra utiliser le théorème suivant :

Soit X et Y deux ensembles. S'il existe $f_1 : X \rightarrow Y$ injective et $f_2 : X \rightarrow Y$ surjective, alors X est équipotent à Y .

2. Soit X un ensemble et $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction croissante pour l'inclusion. Montrer que f admet un point fixe.
3. Démontrer le théorème utilisé dans la question 1.

III.4.176 ENS MP 2015

On considère la sphère de rayon 1 d'un espace de dimension 3, qu'on note S . On se dote également d'un réel α . On donne les deux énoncés suivants :

- i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in S^{3n},$

$$\exists p \in S, \sum_{i=1}^n \|a_i - p\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|b_i - p\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|c_i - p\|^\alpha.$$
- ii) $\alpha = 2$

Montrer l'équivalence de ces deux énoncés.

III.4.177 Centrale-Supélec PC 2013

On considère l'ensemble $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = 2x, z = 0\}$.

1. Quelle est la nature de Γ ?
2. On considère S la surface définie par la rotation de Γ autour de $\mathbb{R}e_1$. Donner son équation.
3. On considère Σ la surface définie par la rotation de Γ autour de $\mathbb{R}e_2$. En donner un paramétrage.
4. Donner l'équation de la surface définie par rotation de Γ autour de $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$.

III.4.178 X MP 2015

1. On se donne n réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Montrer que l'on a :

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \alpha_i} = 1.$$

2. On définit $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ par :

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-r+1} - 1)}{(q^r - 1)(q^{r-1} - 1) \cdots (q - 1)}.$$

Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ est un polynôme à coefficients entiers en q .

3. Soit n entiers $0 < a_1 < \cdots < a_n$. On pose la matrice

$$A = \left(\begin{bmatrix} a_i \\ j - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Montrer que l'on a :

$$\det(A) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{q^{a_i} - q^{a_j}}{q^i - q^j}.$$

III.4.179 Mines-Ponts PC 2016

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Dans cette question, on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f , noté P_f , est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de fonction f pour lequel $P_f = \mathbb{Q}$.
3. On suppose que f admet 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.
Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ admet une infinité de solutions dans $]0, \frac{1}{2}[$.

III.4.180 X MP 2014

Soit $x, y > 0$. Montrer que $x^x + y^y \geq x^y + y^x$.

III.4.181 CCP PC 2016

Pour tout couple (n, p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $E_{n,p}$ le nombre de solutions de l'équation

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) = p,$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Calculer $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$.
2. On note $S_{n,p}$ le nombre de solutions de l'inéquation $\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq p$.
Exprimer $E_{n,p}$ à l'aide de certains des $S_{n,k}$.
3. Montrer l'égalité $E_{n,1} = 3^n - 1$.
4. Plus généralement, prouver l'égalité suivante :

$$E_{n,p} = (2p+1)^n - (2p-1)^n \quad \text{si } p \geq 1.$$

5. En déduire qu'il existe une constante C telle que $E_{n,n}$ soit équivalent à $C(2n)^n$.
6. Compter le nombre de solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = p \\ \min(|x_1|, \dots, |x_n|) = p-1 \end{cases}$$

III.4.182 ENS 2026

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$,

$$n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{2}{n+1}.$$

2. En déduire une conséquence sur le nombre d'Euler.
3. Montrer que la famille $\{1, e, e^{-1}\}$ est $\mathbb{Q}$ -libre.
4. En déduire que e^2 est irrationnel.

III.4.183 ENS MP 2015

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe deux polynômes Q, R de même degré que P dont la somme vaut P et tels que les racines de Q et R soient de module inférieurs à 1.

III.4.184 X ESPCI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ des réels distincts classés par ordre croissant.

1. Montrer que

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \mid \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} \geq 1 \right\}$$

est une réunion finie d'intervalles disjoints.

2. On note S la somme de leur longueur en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme. Montrer que $S = n$.

III.4.185 Mines-Télécom PT 2026

On considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On note $M(t)$ le projeté orthogonal de l'origine O sur la tangente à $\mathcal{P}$ au point de paramètre t .

1. Trouver un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{P}$ au point de paramètre t . Déterminer les coordonnées du point $M(t)$ pour tout réel t .
2. Étudier et tracer la courbe Γ , lieu du point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
3. Soit $P(t)$ le point de la parabole $\mathcal{P}$ de paramètre $t \neq 0$ et $M(t)$ son point associé sur la courbe Γ . Montrer que $M(t)$ appartient au cercle de diamètre $[O, P(t)]$.
4. Déterminer $\tan(\alpha)$ tel que $\vec{T} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$, où $\vec{T}$ désigne le vecteur unitaire tangent à Γ du repère de Frenet en $M(t)$.
5. Déterminer le rayon de courbure à Γ au point $M(t)$.

Indication : on pourra remarquer que $X^3 + 6X^2 + 9X + 4 = (X + 4)(X + 1)^2$.

III.4.186 Mines-Télécom PT 2006

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le demi-cône de révolution $\mathcal{S}$ d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On considère la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que la courbe Γ est bien entièrement incluse dans le demi-cône $\mathcal{S}$. Justifier la régularité de cette courbe.
2. Calculer la longueur de l'arc Γ compris entre les points de paramètres $t_1 = 0$ et $t_2 = \ln(2)$.
3. Déterminer en tout point $M(t)$ le vecteur unitaire tangent $\vec{T}(t)$ dirigé dans le sens des t croissants.
4. Soit $\alpha(t)$ l'angle géométrique entre le vecteur $\vec{T}(t)$ et le vecteur $\vec{k}$. Montrer que cet angle est indépendant de t .
5. Donner une représentation paramétrique cartésienne de la projection orthogonale de Γ sur le plan Oxy . Montrer que l'angle entre son vecteur position et son vecteur tangent est constant.
6. Déterminer une équation du plan tangent au cône $\mathcal{S}$ au point $M(t)$. Vérifier que la tangente à Γ en $M(t)$ est contenue dans ce plan.

III.4.187 Mines-Télécom PT 2026

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $F(1, 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M du plan équidistants du point F et de la droite $\mathcal{D}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. En déduire une représentation paramétrique de cette courbe.
2. Pour tout réel t , déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathcal{P}$ au point $M_t(t^2, 2t)$.
3. Soit t et u deux réels distincts. Déterminer le point d'intersection $P_{t,u}$ des tangentes $\mathcal{T}_t$ et $\mathcal{T}_u$.

Montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si leur point d'intersection appartient à la directrice $\mathcal{D}$.

4. Soit $A(a, b)$ un point du plan. Déterminer une équation dont les solutions sont les paramètres des points de contact des tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A .

Discuter, suivant la position de A , le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A .

En déduire que, pour tout point de la directrice $\mathcal{D}$, passent exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ et que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

5. Pour $t \neq 0$, on note H_t le projeté orthogonal de M_t sur la directrice $\mathcal{D}$. Montrer que la tangente $\mathcal{T}_t$ est une bissectrice de l'angle formé par les droites $M_t F$ et $M_t H_t$.

III.4.188 Mines-Télécom PT 2026

Dans l'espace affine euclidien usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère $\mathcal{S}$ et le cylindre $\mathcal{C}$ d'équations respectives $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. On note $\Gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$.

1. Montrer que la courbe Γ est l'image de l'application $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $M(t) = \left(1 + \cos(t), \sin(t), 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

Déterminer la plus petite période strictement positive de ce paramétrage.

2. Montrer que le paramétrage est régulier sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les couples de paramètres distincts $(s, t) \in [0, 4\pi[$ vérifiant l'égalité $M(s) = M(t)$. En déduire que la courbe passe deux fois par un même point A , puis déterminer les deux tangentes à Γ en ce point.

3. On pose $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ et $G(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 - 1$.

Soit $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que les vecteurs $\nabla F(M(t))$ et $\nabla G(M(t))$ sont linéairement indépendants.

Déterminer les équations des plans tangents à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$, puis en déduire une représentation paramétrique de la tangente à Γ en $M(t)$.

4. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{C}$ au point A . Expliquer pourquoi leur intersection ne permet pas, en ce point, de déterminer une tangente unique à Γ .

III.4.189 Mines-Télécom PT 2026

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$, la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 - y^2 = 2z$ et la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$.

1. Montrer que la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur le plan Oxy est une hyperbole dont on déterminera le centre et les asymptotes.
2. En déduire un paramétrage de $\mathcal{C}$ de la forme $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$.
3. Trouver le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ dont l'intersection avec $\mathcal{S}$ est la réunion de deux droites d_1 et d_2 .
4. Donner un paramétrage de d_1 et d_2 . Montrer que leur point d'intersection A appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{P}'$ est le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .
5. Calculer la courbure de $\mathcal{C}$ en un point ayant une ordonnée nulle.

III.4.190 Mines-Télécom MPI 2026

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs des paramètres m, a et b :

$$\begin{cases} mx + my + mz + t = a \\ mx + y + mz + t = b \end{cases}$$

III.4.191 X MP 2026

On pose :

$$F = \{f : [1, n] \rightarrow [1, n] \mid \forall k \in [1, n-1], f(k) \leq f(k+1) \leq f(k) + 1\}.$$

1. Calculer $\text{Card}(F)$.
2. Calculer :

$$\sum_{f \in F} \text{Card}(\{i \in [1, n] \mid f(i) = i\}).$$

III.4.192 CCINP PC 2026

Soit B l'ensemble des fonctions de classe C^∞ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.

1. Montrer que $\cos \in B$.
2. Montrer que B est un sous-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ .

Pour tout $f \in B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x-t) dt.$$

3. Montrer que F est bien définie et bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter F' .
5. Montrer que $F(x) + F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit u l'application qui à f associe F .

6. Montrer que u est un endomorphisme de B .
7. Déterminer $f \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u(f) = \lambda f$, puis déterminer le spectre de u .

III.4.193 Centrale-Supélec MP 2026

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{k^r x^k}{k!}$, pour $r \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et α_N le nombre de partitions de $\{1, \dots, N\}$.

(a) Calculer α_1, α_2 et α_3 .

(b) Montrer que $\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \alpha_k$.

(c) Montrer que $\sum \frac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel vérifiant $|x| < 1$.

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par $\sum \frac{\alpha_N x^N}{N!}$.

En déduire la formule explicite de α_N , sous forme de somme.

III.4.194 PT 2017

Soit $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(3t), b \sin^3(t)) \end{aligned}$$

- Restreindre l'intervalle d'étude de f .
- On suppose que $b = 1$.
 - Déterminer les points doubles et un vecteur directeur de la tangente en ces points.
 - Donner un développement limité de f en 0. Que peut-on en déduire ? Donner l'allure de la courbe au voisinage du point de coordonnées $(1, 0)$.
 - Donner les variations de x et y , puis tracer la courbe paramétrée.
- Dans le cas général, comparer les courbes obtenues pour b et $-b$. Comment en déduit-on toutes les courbes du cas $b = 1$?

III.4.195 X MP 2022

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $x_n, y_n \in]0, 1[$ tels que :

$$n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n + x_n} \quad \text{et} \quad n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1 + y_n}.$$

2. Montrer qu'il n'existe aucun $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $a + be + ce^2 = 0$.

III.4.196 Mines-Ponts MP 2026

Montrer que s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists P_a \in \mathbb{R}[X], \quad f|_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]} = P_a,$$

alors f est polynomiale.

III.4.197 x 2015

Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

III.4.198 x 2018

Soit $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A + B = C$. On suppose que A, B et C n'ont aucune racine commune et que l'un des trois polynômes est de degré supérieur à 0. On pose $D = A'B - AB'$.

1. Soit z une racine de ABC de multiplicité n . Montrer que z est racine de D de multiplicité au moins $n - 1$.

On note μ le nombre de racines distinctes de ABC .

2. Montrer que :

$$\mu \geq \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - \deg(D).$$

3. Montrer que :

$$\mu > \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)).$$

III.4.199 x 2018

Montrer que la somme des distances au carré d'un point aux sommets d'un polygone régulier ayant $n \geq 3$ côtés ne dépend que de la distance au centre du polygone.

III.4.200 x 2018

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, $A_0(-1, 0)$ et $A \in \mathcal{C} \setminus \{A_0\}$. On note M le point d'intersection de la tangente au cercle en $(1, 0)$ et de la droite A_0A . Montrer que M est à coordonnées rationnelles si et seulement si A est à coordonnées rationnelles.

III.4.201 ENS 2016

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose :

$$\|P\| = \max_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|.$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $t \in \mathbb{C}$, on pose :

$$g_t(X) = \frac{P(tX) - P(t)}{X - 1}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $t \in \mathbb{C}$, montrer que g_t est un polynôme. Déterminer $g_t(1)$.
3. Soit $n \geq 1$. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$g_t(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k g_t(z_k) \frac{X^n + 1}{z_k - X}.$$

4. En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^n \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}.$$

5. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $\|P'\| \leq n\|P\|$.

III.4.202 x 2022

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, t_0 -périodique, qui atteint son maximum global en $x_0 \in [0, t_0[$. On définit :

$$f_1(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) + \sin(\alpha x)$$

$$f_3(x) = f(x) + f(\alpha x)$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles périodiques ?

III.4.203 x 2013

Soit $n \geq 2$.

Donner un exemple de fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que la famille $\{f, f', \dots, f^{(n-1)}\}$ soit libre et $f^{(n)} = f$.

III.4.204 x 2013

Soit $A = \{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Montrer que A contient une infinité de puissances de 2.

III.4.205 ENS 2014

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ le nombre de racines de P dans $\mathbb{R}_+^*$, comptées avec multiplicité.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines réelles sont simples.

Montrer que $Z(P') \geq Z(P) - 1$.

2. Soit

$$P = a_1 X^{n_1} + a_2 X^{n_2} + \dots + a_p X^{n_p},$$

où les a_i sont non nuls et $n_1 < n_2 < \dots < n_p$.

On note $V(P)$ le nombre de changements de signe de $(a_1, \dots, a_p)$.

(a) Montrer que $V(P) \geq Z(P)$.

(b) Montrer que $V(P) - Z(P)$ est un entier pair.

3. Montrer sans calcul que

$$P(X) = X^7 + 2X^6 - 3X^5 - X^2 + 7X - 8$$

a au moins deux racines complexes non réelles.

III.4.206 x 2018

Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $M(f) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k)$.

Montrer que si f coïncide avec une fonction polynomiale sur $\mathbb{N}^*$, alors $M(f)$ aussi.

III.4.207 x 2012

Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}.$$

Si $p \in \{0, \dots, n+1\}$, calculer $\sum_{i=0}^n x_i^p L_i(0)$.

III.4.208 Centrale-Supélec MP 2026

1. Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

(a) Définir $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que pour toutes parties A_1, A_2 de E :

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

2. Soit $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}^*$.

On définit $f_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois).

Soit $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \text{ est définie pour tout } n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que $\mathbb{R} \setminus D$ est dénombrable.

3. Soit $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(S) = \emptyset$.

III.4.209 Centrale-Supélec MP 2026

1. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Pour $b \geq 2$, on note :

$$D_b = \{(u_m)_{m \in \mathbb{Z}} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, u_m \in [0, b-1] \text{ et } \{m \leq 0 \mid u_m \neq 0\} \text{ est fini}\}.$$

(a) Montrer que la fonction $f : D_b \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{u_m}{b^m}$$

est bien définie.

(b) La fonction f est-elle injective ?

(c) Montrer que f est surjective.

III.4.210 Mines-Ponts MP 2026

Soit E un espace euclidien. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$f(x) = \frac{x}{\max(\|x\|, 1)}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne.

III.4.211 ENS MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

III.4.212 ENS MP/MPI 2023

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et *presque périodique*, c'est-à-dire telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x + nT) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que l'application

$$t \longmapsto \frac{1}{t} \int_0^t f(x) \, dx$$

possède une limite quand $t \rightarrow +\infty$.

III.4.213 ENS 2014

Soit E un espace vectoriel réel et $A \subset E$ une partie non vide. L'*enveloppe convexe* de A est définie par :

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, n \geq 1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, a_i \in A \right\}.$$

1. Dessiner $\text{conv}(A)$ lorsque A est un ensemble fini de petit cardinal en dimension 2.
2. On veut montrer le résultat suivant :

Si $x_1, \dots, x_{n+2}$ sont dans $\mathbb{R}^n$, alors on peut répartir ces $n+2$ points en deux ensembles A et B disjoints dont les enveloppes convexes sont non disjointes. Montrer que si $n = 2$ alors :

- (a) ce résultat est vrai pour les sommets d'un carré ;
- (b) ce résultat est vrai pour la réunion des sommets d'un triangle équilatéral et de son centre de gravité.

3. Soit $X_1, \dots, X_{n+2}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ non nul tel que :

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+2} x_{n+2} = 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+2} = 0 \end{cases}$$

4. Déterminer $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ pour les exemples de la question 2.
5. Conclure.

III.4.214 ENS MP/MPI 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$\left| m - \sum_{i \in S} x_i \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

III.4.215 ENS PC 2024

Soit P un polynôme unitaire de degré n .

1. Quels sont les degrés de $P \circ P$ et de P^n ?
2. Quel est le degré de $P \circ P - P^n$?
3. Quel est le degré de $P \circ P \circ P - P^{n^2}$?

III.4.216 PT 2015

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines réelles simples. On pose $Q = XP(X)$. Montrer que Q' est scindé à racines réelles simples.

III.4.217 CCP

Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$ admette une racine double. Déterminer dans ce cas les racines de P .

III.4.218 x

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et E un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1) \deg(P) + 1.$$

III.4.219 ENS

1. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.
Montrer que P n'a pas de racine double dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5. On suppose que P admet une racine double dans $\mathbb{C}$.
Montrer que P possède une racine dans $\mathbb{Q}$.

III.4.220 ENS

Soit $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que le polynôme $P = (X - a_1) \cdots (X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

III.4.221 ENS Lyon

Déterminer toutes les applications N de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

- $N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(xy) = N(x)N(y)$
- $\exists n \in \mathbb{N}, N(n) > 1$

III.4.222 Centrales/Mines

Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires tels que :

- $\deg(P) = n + 1$ et $\deg(Q) = n$;
- Q possède n racines réelles ;
- P et Q n'ont pas de racine commune.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$.

Montrer que :

$$F(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \iff P \text{ possède } n + 1 \text{ racines réelles entrelacées avec celles de } Q.$$

III.4.223 x

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et A l'ensemble des réels a tels que f admet un maximum local en a . Montrer que $f(A)$ est au plus dénombrable.

III.4.224 x

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + b = 1$. Montrer que pour tous réels positifs x et y , on a

$$1 + x^a y^b \leq (1 + x)^a (1 + y)^b.$$

III.4.225 ENS

1. Que peut-on dire d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $|P|$ admette un extremum local en un point de $\mathbb{C}$?
2. Même question pour une fonction somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

III.4.226 x

On définit des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ par $A_1 = \emptyset$, $B_1 = \{0\}$ et pour $n \geq 1$ entier,

$$A_{n+1} = B_n + 1 = \{x + 1 \mid x \in B_n\}$$

$$B_{n+1} = A_n \Delta B_n = (A_n \cup B_n) \setminus (A_n \cap B_n).$$

Montrer que si p est une puissance de 2, alors $B_p = B_1$.

Indication : on pourra considérer les polynômes $P_n = \sum_{k \in A_n} X^k$ et $Q_n = \sum_{k \in B_n} X^k$ et raisonner modulo 2.

III.4.227 ENS

Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geq 2$ et $U_1, \dots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A . On suppose qu'il existe un entier $a \geq 0$ tel que si $i \neq j$, $\operatorname{Card}(U_i \cap U_j) = a$. Montrer que $n \leq m$.

III.4.228 x

Soit A un ensemble de cardinal n , $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A avec k classes. Soit m le cardinal du graphe de $\mathcal{R}$. Montrer que $n^2 \leq km$.

III.4.229 ENS

Soit X un ensemble fini non vide et θ une application injective et non surjective d'une partie D de X dans X .

1. On suppose que $\theta(D) \subset D$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $p_1, \dots, p_n$ de X dans X vérifiant $p_i \circ p_i = p_i$ pour tout i telles que la restriction à D de $p_1 \circ \dots \circ p_n$ coïncide avec θ .
2. Montrer que la conclusion de la question 1 reste vraie sans l'hypothèse $\theta(D) \subset D$.
3. Soit α une application non bijective de X dans X . Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $\pi_1, \dots, \pi_n$ de X dans X vérifiant $\pi_i \circ \pi_i = p_i$ pour tout i et telles que $\alpha = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$. C'est le *théorème de Howie*.

III.4.230 ENS

Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ dont le premier chiffre de l'écriture décimale est i .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_i(n)}{n}$.

III.4.231 X-ENS

On munit $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de sa structure euclidienne canonique. Donner un équivalent lorsque r tend vers $+\infty$ du nombre $N(r)$ de points de $\mathbb{Z}^n$ de norme inférieure ou égale à r .

III.4.232 ENS

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée de taille $n \geq 2$, à coefficients entiers naturels et telle que, pour $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $a_{kl} = 0$ alors

$$\sum_{i=1}^n a_{il} + \sum_{j=1}^n a_{kj} \geq n.$$

Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \geq \frac{n^2}{2}$. Donner un exemple où il y a égalité.

III.4.233 ENS

Si P une partie non vide de $\mathbb{Z}^2$, on note :

$$-P = \{-p \mid p \in P\} \quad \text{et} \quad P + P = \{p + q \mid (p, q) \in P^2\}.$$

Trouver les parties P de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant les points suivants :

- $P \cup (-P) = \mathbb{Z}^2$;
- $P \cap (-P) = \{0\}$;
- $P + P \subset P$.

III.4.234 X

On considère 1 000 points dans le plan $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une droite ayant (au sens strict) 500 points d'un côté et 500 points de l'autre.

III.4.235 x

On considère n points du plan $\mathbb{R}^2$ qui ont la propriété suivante : toute droite passant par deux des points en contient un troisième. Montrer que tous les points sont alignés.

III.4.236 x

Montrer qu'il existe un polynôme $P(X, Y, Z) \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ tel que pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $P(a, b, c) = 0$ si, et seulement si, le triangle (a, b, c) est équilatéral.

III.4.237 x

Soit ABC un triangle et M un point à l'intérieur du triangle (au sens large, en comptant les trois segments). Déterminer les points M tels que la somme $MA + MB + MC$ soit minimale.

III.4.238 ENS

1. Pour quelles partitions de n sous la forme $n = a_1 + \dots + a_k$ (où les a_i sont dans $\mathbb{N}^*$), le produit $\prod_{i=1}^k a_i$ est-il maximal ?
2. Résoudre le même problème si on considère seulement les partitions constituées d'entiers 2 à 2 distincts.

III.4.239 x

Soit a, b deux réels strictement positifs. Quels sont les entiers naturels n tels que le polynôme $X^2 - (a^2 + b^2)$ divise $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$?

III.4.240 ENS

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe p, q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $(P')^p$ divise P^q .
2. Même question dans $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque de caractéristique nulle.

III.4.241 x

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.

1. On suppose que P est de degré inférieur ou égal à 2. Montrer qu'on peut écrire $P = \alpha(X - a)^2 + \beta(1 - X^2)$, avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $a \in [-1, 1]$.
2. On revient au cas général. Montrer l'existence de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = A^2 + (1 - X^2)B^2$.

III.4.242 ENS

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k), P(k+1), \dots, P(k+n)$ soient dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geq 1$. On note N le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$.
Montrer que N divise $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(0), P(1), P(4), \dots, P(n^2)$ soient dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $P(a^2) \in \mathbb{Z}$.

III.4.243 ENS

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y \mapsto f(x, y)$ est polynomiale pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto f(x, y)$ est polynomiale pour tout $y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace le corps $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

III.4.244 ENS

Pour quelles valeurs entières $n \geq m$ a-t-on $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i} \in \mathbb{N}$?

III.4.245 x

Démontrer que tout réel $x \in [0, 1[$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ non stationnaire à 9 (c'est-à-dire que pour tout $N \geq 1$, il existe $n \geq N$ tel que $a_n \neq 9$).

III.4.246 x

Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.

III.4.247 x

Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1[$. Pour chaque $k \geq 1$, on appelle u_k la $k^{\text{ème}}$ décimale dans le développement décimal propre de $f(k)$ et on pose $v_k = 0$ si $u_k = 1$ sinon. Montrer que $y = 0, v_1 v_2 \dots v_n \dots$ n'a pas d'antécédent par f . Conclusion?

III.4.248 ENS

Construire une injection $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout x , $\psi(x)$ est infini, et pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $\psi(x) \cap \psi(y)$ est fini.

III.4.249 Mines-Télécom MP 2026

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X + 1)^{2n} - (X - 1)^{2n}$.

1. Déterminer toutes les racines de P .
2. Déterminer la somme de ses racines.

III.4.250 x

Soit $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ des nombres réels. Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une permutation de $(y_1, \dots, y_n)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

III.4.251 ENS

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Pour toute famille au plus dénombrable $F = (]a_i, b_i[)_{i \in I}$ d'intervalles ouverts recouvrant E , on considère

$$l(F) = \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

On définit alors la *mesure extérieure de Lebesgue* de E par la formule

$$\mu(E) = \inf_F l(F),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles au plus dénombrables d'intervalles ouverts recouvrant E .

1. Quelle est la mesure extérieure d'un intervalle ?
2. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties de mesure extérieure nulle est encore de mesure extérieure nulle.
3. Quelle est la mesure extérieure de $\mathbb{Q}$?

III.4.252 x

On suppose donné pour tout réel x un intervalle ouvert $I(x)$ centré en x et dont la longueur, notée $\mu(I(x))$, est majorée par $c > 0$ fixé. Soit $a < b$ deux nombres réels. Montrer qu'il existe un nombre fini de réels $x_1, \dots, x_n$ tels que :

- $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n I(x_i)$;
- $\sum_{i=1}^n \mu(I(x_i)) \leq 2(b - a) + c$.

III.4.253 ENS

On suppose que $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = P(X)Q(X)$ où P, Q sont deux polynômes réels unitaires à coefficients positifs ou nuls. Montrer que les coefficients de P et Q sont dans $\{0, 1\}$.

III.4.254 x

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de π , le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$$

a toutes ses racines réelles.

III.4.255 ENS MP

L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

III.4.256 ENS

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application conservant l'orthogonalité (si ABC est un triangle rectangle en B , alors $f(A)f(B)f(C)$ est un triangle rectangle en $f(B)$). Que peut-on dire de f ?

III.4.257 Mines-Ponts PSI 2024

Soit $P = X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 8X + 1$.

1. Montrer que si z est racine de P alors $\frac{1}{z}$ est aussi racine de P .
2. Montrer que P possède une racine réelle $\alpha > 1$.
3. On note β une racine complexe de P distincte de α et $\frac{1}{\alpha}$.

On pose $t = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ et $s = \beta + \frac{1}{\beta}$.

Montrer que $s + t = 8$ et $st = 10$.

4. En déduire que $t > 2$ et que s est un réel tel que $0 < s < 2$.
5. Montrer que β n'est pas réel et que β est de module 1.

III.4.258 ENS MP

Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(2)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en considérant a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\ln(2) = \frac{a}{b}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{\text{ppcm}(1, 2, \dots, n)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \frac{1}{n!}(X^n(1-X)^n)^{(n)}$. Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x} dx = \frac{A_n}{b \cdot \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . On admet que $\pi_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$. Montrer que, pour n assez grand,

$$\text{ppcm}(1, 2, \dots, n) \leq 3^n.$$

4. Conclure.

III.4.259 ENS MP

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+X)^n P$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}_+$.

III.4.260 ENS MP

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g = f_1 + \dots + f_n$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que $g = 0$.

III.4.261 ENS

Soit P une partie de $\mathbb{N}$ stable par addition.

Montrer qu'il existe $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $P \cap [n, +\infty[= k\mathbb{N} \cap [n, +\infty[$.

III.4.262 X FUF 2025

Trouver tous les nombres réels α et β tels que

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^\beta \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

III.4.263 X 2021

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$P_m = X^4 - 2(m+2)X^2 + (m-2)^2.$$

Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles P_m peut s'écrire sous forme de produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[X]$?

III.4.264 X 2021

1. Est-ce qu'il existe un cercle passant exactement par 5 points à coordonnées rationnelles ? Que se passe-t-il si l'on remplace 5 par 2 ? 1 ? 0 ?
2. Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts dans le plan $\mathbb{R}^2$ à coordonnées rationnelles. Montrer qu'il existe un cercle dont les seuls points rationnels sont A et B .

III.4.265 ENS MP 2023

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall s \in \mathbb{R}, f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (sx - f(x))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{**}(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (sx - f^*(s))$$

1. Montrer que $f^{**}(x) = \sup\{a(x) \mid a \text{ fonction affine telle que } a \leq f\}$.
2. Comment adapter les définitions pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?
3. Est-il possible de calculer f^{**} pour $f : x \mapsto (1 - x^2)^2$? Représenter f et f^{**} .
Indication : montrer que f^{**} est convexe.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \iff f'(x_0) = 0 \text{ et } f^{**}(x_0) = f(x_0).$$

III.4.266 X 2021

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
2. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n dont les racines sont non nulles et dans la boule complexe fermée unité de centre O . Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fini.
3. Montrer que les racines d'un élément de $\mathcal{P}_n$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

III.4.267 x

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$.

Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

III.4.268 ENS

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, soit $N(d)$ le nombre de couples (m, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq m$ et $\binom{m}{n} = d$.

1. Montrer que l'application $(i, j) \mapsto \binom{1+j}{j}$ est strictement croissante en i et en j .

2. En considérant

$$B = \min \left\{ b \in \mathbb{N}^* \mid \binom{2n}{2} > d \right\},$$

montrer que $N(d) = O(\ln(d))$.

3. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{d=1}^x N(d) = 2.$$

III.4.269 x MP

Soit $m_1, \dots, m_n$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $x_1 < \dots < x_n$ des nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - x_i}.$$

Montrer que $f^{-1}([\lambda, +\infty[)$ est une réunion finie d'intervalles bornés. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

III.4.270 Centrale-Supélec

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.

III.4.271 Mines-Ponts

1. Démontrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que l'on ait, pour tout n entier naturel :

$$P_n \left(X + \frac{1}{X} \right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

2. Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$.

Démontrer que $2 \cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

III.4.272 x 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une *partition de n* est une suite finie décroissante d'entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_m$ qui vérifient $\sum_{k=1}^m a_k = n$.

On notera $p(n)$ le nombre de partitions de n .

Par convention $p(0) = 1$ et si $n < 0$ alors $p(n) = 0$.

Montrer que :

$$n \cdot p(n) = \sum_{k,l \geq 1} l \cdot p(n - kl).$$

III.4.273 ENS 2024

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Calculer $v_2(H_n)$.

III.4.274 x

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n.$$

Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X .

2. Donner une relation de récurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, donner une relation entre S_n'' et S_{n-1}' .
4. En déduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$.

III.4.275 ENS

Calculer :

$$\sup_{a,b,c > 1} \left(\left(1 - \frac{1}{a}\right)^b + \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^c + \left(1 - \frac{1}{3c}\right)^a \right).$$

III.4.276 Mines-Ponts

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement en série entière de :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(\alpha \arccos(x)) \end{aligned}$$

2. Pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est-elle polynomiale ?

III.4.277 x

Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.

III.4.278 x 2024

On considère $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
On définit :

$$\eta_{\pm}(A) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i \pm 1) \quad \text{et} \quad \alpha(A) = \sum_{\substack{B \subset A \\ a_n \in B}} \eta_{-}(B).$$

L'objectif est de démontrer que :

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} \eta_{-}(B) = \eta_{+}(A).$$

1. On suppose le résultat acquis. Démontrer que :

$$\alpha(A) = (a_n - a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-2} (a_{i+1} - a_i - 1).$$

2. Établir le résultat cherché.
3. On suppose que $A = \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer :

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset \\ B \cap (B+1) = \emptyset}} \eta_{-}(B).$$

III.4.279 CCINP

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.
On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \dots, x_n$ ses racines.
On note également

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \quad \text{et} \quad \sigma_n = \prod_{i=1}^n x_i.$$

1. Démontrer :

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2),$$

puis

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

2. Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?
3. Démontrer que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 3$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

III.4.280 ENS

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta).$$

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degré de T_n ? En déduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
3. Déterminer les triangles du plan euclidien dont les côtés ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π .

III.4.281 Mines-Ponts

Soit $B_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad B_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$

1. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ la famille $(B_0, \dots, B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
- (a) Démontrer que si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- (b) Démontrer que si $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- (c) Démontrer que si $P(n) - \lfloor P(n) \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

III.4.282 X MP

On définit la longueur d'un intervalle borné I de bornes a et b par $\ell(I) = |b - a|$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $I_1, \dots, I_N$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ tels que :

$$[0, 1[\subset \bigcup_{i=1}^N I_i.$$

Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^N \ell(I_i)$?

2. Soit $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p = 1$ et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait :

$$x_{q-1} \leq t_q \leq x_q \quad \text{et} \quad x_q - x_{q-1} \leq \delta(t_q).$$

3. Soit $(I_n)_{n \geq 1}$ une suite d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$ telle que :

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

III.4.283 Mines 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $(X-1)^k$ divise P . On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P . On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose :

$$A = \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_i \neq 0\}.$$

1. Soit $P_0 = 1$ et $P_s = \prod_{j=0}^{s-1} (X-j)$, pour $s \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall s \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \quad P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que, pour tout $i \in A$, on a $a_i = 0$. Conclure.
3. L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

III.4.284 X ESPCI

Soit $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}$ et $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$.

Montrer que, si $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

III.4.285 ENS MP/MPI

Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$, où $u_n : x \mapsto x^n$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

3. En déduire que si f est M -lipschitzienne, alors

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

III.4.286 ENS Lyon MP/MPI

Une partie E de $[0, 1]$ est dite *négligeable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'intervalles de $[0, 1]$ dont la réunion contient E et dont la somme des longueurs est majorée par ε . Soit f une fonction dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une partie négligeable E de $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in [0, 1] \setminus E$, on ait $f'(x) \geq 0$. Montrer que la fonction f est croissante.

III.4.287 ENS MP/MPI

Soit $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$. Montrer que $\deg(f) = \deg(g)$.

III.4.288 Mines-Ponts MP

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation

$$(E_n) : \tan(y) = 2n \tan\left(\frac{y}{2n}\right)$$

possède au moins $n - 1$ solutions dans $]0, n\pi[$.

2. Expliciter deux polynômes A, B à coefficients réels tels que

$$\tan(2nt) = \frac{A(\tan(t))}{B(\tan(t))}$$

pour tout réel t tel que $\tan(t)$ et $\tan(2nt)$ soient définis.

3. Mettre en évidence un polynôme P tel que les solutions de (E_n) soient les solutions de

$$P\left(\tan^{-2}\left(\frac{y}{2n}\right)\right) = 0.$$

4. Dénombrer les solutions de (E_n) dans $]0, n\pi[$.

III.4.289 Mines-Ponts PC

Calculer :

$$\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\sigma(i)}{i} \right\rfloor.$$

III.4.290 ENS MP/MPI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k \in [1, n]}$ et $(Q_k)_{k \in [1, n]}$ deux familles de polynômes réels, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) e^{Q_k(x)}.$$

Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

III.4.291 X MP

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k la borne inférieure de l'ensemble E_k des $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels qu'il existe une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ euclidien de rayon r contenant au moins k points de $\mathbb{Z}^2$.

1. Calculer R_k pour $k = 2, 3, 4$.
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que R_k est le minimum de E_k .
3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $4R_k^2$ est entier.
4. Donner un équivalent de R_k lorsque k tend vers $+\infty$.

III.4.292 ENS Lyon MP/MPI

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- f est croissante, à valeurs dans $[0, 1]$, f est continue à droite,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists b_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^k = f(x + b_k)$.

III.4.293 X ESPCI

Soit $P = X^2 + c_1X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}$.

III.4.294 X MP/MPI

On appelle *nombre de coefficients positifs* du polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_i \geq 0\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$.
Montrer que P^2 a au moins trois coefficients positifs.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

III.4.295 ENS Lyon MP/MPI

1. Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
2. Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X .
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

III.4.296 X MP 2021

On considère un ensemble fini E de cardinal n , et $q \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_q\}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une *q-antichaîne* si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, q \rrbracket, i \neq j, \quad A_i \not\subset A_j.$$

Le but est alors de déterminer le cardinal maximal d'une antichaîne.

1. Donner des exemples d'antichaînes de longueur n et n^2 .
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $|A| = m$. Combien y a-t-il de bijections ϕ de E vers $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\phi(A) = \{1, \dots, m\}$.
3. Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_q\}$ une q -antichaîne avec $|A_i| = m_i$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{\binom{n}{m_i}} \leq 1.$$

4. Quelle est la taille maximale d'une antichaîne ?

III.4.297 ENS PC

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx \end{aligned}$$

admet un unique point critique.

III.4.298 Centrale PC

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad P(n) \in \mathbb{Z}.$$

III.4.299 X ESPCI

Soit $n \geq 2$ entier. On pose :

$$\sigma = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \right\}.$$

Maximiser

$$S_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$$

lorsque $(a_1, \dots, a_n)$ décrit Σ .

III.4.300 Centrale 2023

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on pose :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

On considère la même définition si f est à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$.

On note pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

3. En déduire, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et r assez grand (à préciser), l'égalité

$$\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} dz.$$

III.4.301 ENS MP/MPI

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ coupant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E . Montrer que $P = 0$.

III.4.302 Centrale PSI 2024

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On pose $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

1. Expliciter $P^2(X)$ et en déduire que :

$$\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p + q + 1} \geq 1.$$

2. Exprimer $\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2 dt$ en fonction des a_k .

3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = -i \int_0^{\pi} Q(e^{it}) e^{it} dt.$$

4. En déduire que :

$$\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p + q + 1} \leq \pi \sum_{k=0}^n a_k^2.$$

III.4.303 ENS MP

On admet le théorème suivant :

Si une série entière a un rayon de convergence infini et si sa somme est bornée sur $\mathbb{C}$, alors cette somme est constante.

On note G l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $\alpha \geq 0$, $t \mapsto e^{\alpha|t|} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in G$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt.$$

1. Montrer que G n'est pas réduit à la fonction nulle.
2. Soit $f \in G$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^∞ .
3. Soit $f \in G$, $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose :

$$\varphi_a(z) = \int_a^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t) dt.$$

Montrer que φ_a est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et bornée sur le demi-plan $\text{Im}(z) \geq 0$.

4. Soit $f \in G$ telle que $\hat{f} = 0$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t) dt$$

est nul pour tous a, z . En déduire que φ_a est, pour tout a , bornée sur $\mathbb{C}$.

5. Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

III.4.304 ENS MP

Soit f une application bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, lipschitzienne et de réciproque lipschitzienne. Montrer que l'une des deux fonctions $x \mapsto f(x) - x$, $x \mapsto f(x) + x$ est bornée.

III.4.305 ENS MP

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie de $\mathbb{N}^*$. On dit que A est à sommes distinctes si, pour toutes parties I et J de A ,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j \implies I = J.$$

On note $f(n)$ le cardinal maximal d'une partie A à sommes distinctes incluse dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer que $f(n) \geq \log_2(n) + O(1)$.
2. Montrer que $f(n) \leq \log_2(n) + \log_2(\log_2(n)) + O(1)$.
3. En considérant $X \subset A$ un sous-ensemble aléatoire uniforme de A , montrer que :

$$f(n) \leq \log_2(n) + \frac{1}{2} \log_2(\log_2(n)) + O(1).$$

III.4.306 ENSEA 2016

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^x + 4^x = 5^x$.

III.4.307 CCINP 2024

Soit

$$(S) : \begin{cases} x + y + z &= 4 \\ xy + yz + xz &= 5 \\ xyz &= 2 \end{cases}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

Soit encore $P(T) = (T - x)(T - y)(T - z)$.

1. Calculer P .
2. Résoudre le système (S) .

III.4.308 ENSEA 2024

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

1. Dans $\mathbb{C}$, déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1 + X^2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer un polynôme P_n tel que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

3. Calculer $f^{(n)}(0)$.

III.4.309 CCINP 2024

Soit

$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

1. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-2)^2$.

III.4.310 CCINP 2024

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{aligned}$$

À quelles conditions a-t-on

1. $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$?
2. $\deg(\varphi(P)) < \deg(P)$?

III.4.311 Mines-Télécom 2018

Trouver le reste de la division euclidienne de $\prod_{k=0}^n (X \sin(k) + \cos(k))$ par $X^2 + 1$.

III.4.312 CCP 2017

Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$$Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X].$$

1. Montrer que 1 est racine de Q .
2. On pose $R(X) = (X-1)Q(X)$.
Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
3. Montrer que z , racine complexe de Q , vérifie

$$q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$$

et en déduire que $|z| \leq 1$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et comparer les deux nombres $|z|^k$ et $|z|^q$ pour $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

4. On suppose que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.
 - (a) Justifier sans calcul que R' est factorisable en produit de polynômes de degré 1, puis effectuer cette factorisation. Montrer que 1 est racine double de R . Montrer que les autres racines de R sont simples.
 - (b) Soit A une matrice complexe, diagonalisable, d'ordre n et dont le spectre est inclus dans l'ensemble des racines complexes de Q . Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.
5. Montrer que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.

III.4.313 CCP 2015

On note x, y, z les racines réelles de $X^3 + aX^2 + bX + c$.
Exprimer $x + y + z$ et $xy + xz + yz$ en fonction de a, b et c .

III.4.314 CCINP 2019

On note J_n la matrice de coefficients $(J_n)_{ij} = \frac{1}{2}$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon.
On donne $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout $n \geq 2$, $P_n = \det(XI_n - J_n)$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin((n+1)x) + \sin((n-1)x) = 2 \cos(x) \sin(nx).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(X) = XP_{n-1}(X) - \frac{1}{4}P_{n-2}(X).$$

3. On pose $Q_n = 2^n P_n$. Montrer que :

$$Q_n(\cos(x)) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \quad \text{pour } x \in]0, \pi[.$$

4. Montrer que P_n est scindé et que les sous-espaces propres de J_n sont des droites vectorielles.

5. Calculer :

$$\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

6. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

III.4.315 CCP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

III.4.316 CCINP 2021

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k < n$.

1. Montrer que :

$$(k+1)(k+2) \binom{n+2}{k+2} = (n+1)(n+2) \binom{n}{k}.$$

2. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

III.4.317 CCP 2016

On donne un ensemble E de cardinal n et, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note Ω_i l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $\text{Card}(B) = i$ et $A \cup B = E$.
Trouver $\text{Card}(\Omega_i)$. (On pourra au préalable étudier le cas $n = 5$, $i = 3$.)